خیلی سبز!

ماجرای بیست ریاضی و آمار ۳ انسانی

پایه دوازدهم

بر اساس سبک جدید امتحانات نهایی
۶۰٪
نمره پذیرش دانشگاه
ویژه ارتقاء معدل

فرشاد پورالیاس

درسنامه | سؤال‌های امتحانی با پاسخ تشریحی | امتحان نهایی

- بیش از ۶۰۰ سؤال امتحانی برگرفته از کتاب درسی، امتحان‌های نهایی و تألیفی به همراه پاسخنامه تشریحی
- پوشش کامل کتاب درسی با درسنامه‌های کاملاً کاربردی و انواع مثال‌های آموزشی
- بررسی انواع تیپ‌های سؤالات امتحان نهایی و روش حل آن‌ها در کادرهای «در امتحان نهایی چه خبر؟»
- آزمون‌های جامع فصل به فصل
- آزمون‌های نوبت اول و دوم
- به همراه یک جلد ضمیمه رایگان برای مرور سریع در ایام امتحانات

+ Jet Questions
سؤال‌های پیشرو برای بیست گرفتن

مقدمهٔ ناشر

سلام

خوب که فکر می‌کنم می‌بینم همیشه یک جای کارمان لنگ است. می‌گویید چرا؟ چون از همان اول که آموزش رشتهٔ انسانی در کشورمان شروع شد، بنا بر این گذاشته شد که بچه‌های این رشته، نیاز ندارند که درس ریاضی را چندان خوب و درست بخوانند و همین شد که تا سال‌ها، کسانی که خواندن ریاضی و فیزیک و ... را دوست نداشتند می‌رفتند رشتهٔ انسانی.

اما اگر نگاهی به رشته‌های دانشگاهی علوم انسانی بیندازیم، می‌بینیم که مدیریت، اقتصاد، حقوق، فلسفه، علوم اجتماعی، حسابداری، بانکداری و ... همگی به قدرت استدلال و تحلیل قوی نیاز دارند. فارغ‌التحصیلان این رشته‌ها کسانی هستند که در برنامه‌ریزی حیطه‌های مختلف مسائل کشور مؤثرند و از آن مهم‌تر، زمینهٔ اصلی کارشان در ارتباط با همهٔ افراد جامعه است.

شاید آن نظر اولیه که می‌گفت دانش‌آموز و دانشجوی رشتهٔ انسانی به ریاضی نیاز ندارد، نگاهش به ریاضی عبارت بود از محاسبات، فرمول‌ها، روابط جبر و مثلثات و ...؛ اما اساس ریاضی چیز دیگری است:

استدلال، تحلیل و نتیجه‌گیری منطقی همگی از مواردی هستند که با درک درست ریاضی به دست می‌آیند. فکر می‌کنم دیگر زمان آن رسیده که بچه‌های انسانی با رویکردی جدید و همراه با علاقه به ریاضی نگاه کنند.

مؤلف خوبمان آقای پورالیاس، کتابی برایتان نوشته است که یادگیری ریاضی را بسیار ساده و لذت‌بخش می‌کند. مطمئنم با خواندن این کتاب، نگاهتان نسبت به ریاضی و موفق‌شدن در آن به کلی تغییر می‌کند. برایمان بنویسید که نظر شما دربارهٔ درس ریاضی چیست؟ و بنویسید که با خواندن این کتاب چه تغییری کرده‌اید؟

خوش باشید

مقدمهٔ مؤلف

تقدیم به

رشد و توسعهٔ هر جامعه در سایهٔ ارج‌نهادن به علوم انسانی تحقق می‌یابد...

دانش‌آموزان انسانی که هوشمندانه پای در این عرصه نهادند.

به قول زنده‌یاد قیصر امین‌پور عزیز:

ما در عصر احتمال به سر می‌بریم
در عصر شک و شاید
در عصر پیش‌بینی وضع هوا
از هر طرف که باد بیاید
در عصر قاطعیت تردید
عصر جدید
عصری که هیچ اصلی
جز اصل احتمال
یقینی نیست

دوستان عزیز دوازدهمی سلام

ما هم در کنار خانوادهٔ بزرگ خیلی‌سبز تمام توان خودمان را گذاشتیم تا این کتاب به بهترین شکل ممکن به دست شما عزیزان برسد و بتوانیم شما را در این مسیر همراهی کنیم.

این کتاب که شامل سه بخش اصلی است تا، شما را برای کسب بهترین نتیجه در امتحان نهایی آماده کند:

بخش ۱: درس‌نامه

در این قسمت سعی کردیم با متنی روان، کلیهٔ مطالب کتاب درسی را برای یادگیری بهتر شما عزیزان به طور کامل پوشش دهیم. هم‌چنین برای راحت‌ترشدن مسیر آموزشی، هر درس را به قسمت‌های کوچک‌تر تقسیم کردیم تا بتوانیم نگاه دقیق‌تر و عمیق‌تری بر مطالب درسی داشته باشیم.

بخش ۲: سؤالات امتحانی

در پایان هر بخش از درس‌نامه با قراردادن انواع تیپ‌های سؤالات امتحانات نهایی سال‌های گذشته و سؤالات مهم کتاب درسی، آمادگی شما را برای امتحان نهایی خودتان چندین برابر می‌کنیم. حتی اگر زمان خیلی کمی تا آزمون دارید می‌توانید با حل و بررسی سؤالات این قسمت آمادگی نسبی برای امتحان نهایی را کسب کنید. (این توصیه برای شرایط اورژانسی چند شب مانده به امتحان است.)

توجه: در قسمت سؤال‌های امتحانی با توجه به رویکرد جدید امتحانات نهایی، سؤالات سخت‌تری را برایتان در کتاب قرار دادیم و آن‌ها را با آیکون مشخص کرده‌ایم. این سؤالات نسبت به سؤالات دیگر مفهومی‌تر و سطح بالاتر هستند که اکیداً توصیه می‌شود بعد از تسلط کامل بر درس‌نامه و سؤالات امتحانی دیگر، مورد بررسی قرار بگیرند.

بخش ۳: آزمون‌ها

در این قسمت سعی کردیم با قراردادن آزمون‌های تألیفی شبیه آزمون‌های نهایی و آزمون‌های نهایی برگزارشده آخرین گام آمادگی شما عزیزان را برای شرکت در آزمون را برداریم که در این قسمت با شکل و ساختار کلی آزمون نهایی آشنا می‌شوید. بهتر است این آزمون‌ها در شرایط یک آزمون واقعی با زمان‌بندی و نوشتن کامل راه حل‌ها و تصحیح آن به کمک بارم‌بندی‌های داخل پاسخ‌نامه‌های آن انجام گیرد.

به همراه این کتاب یک جلد کتاب ضمیمهٔ رایگان هم دریافت خواهید کرد که شامل مرور سریع ریاضی انسانی دوازدهم است که بتوانید قبل از امتحان‌هایتان با آن درس‌هایتان را مرور کنید.

چند توصیه برای استفادهٔ مؤثر از این کتاب:

۱ لطفاً بدون قلم و کاغذ سراغ این کتاب نیایید.

۲ با توجه به پیوستگی مطالب ریاضی لطفاً از وسط یک فصل شروع به مطالعه نکنید.

۳ در مثال‌های حل‌شدهٔ درس‌نامه، بعد از بررسی کامل پاسخ سؤال، سعی کنید بار دوم بدون نگاه به پاسخ، آن را به طور کامل حل کنید.

۴ بعد از مطالعهٔ کامل درس‌نامه به سراغ نمونه سؤالات امتحانی آن بروید. در این مرحله با دقت خیلی زیاد صورت سؤال را بخوانید و هر چیزی که به ذهنتان می‌رسد را یادداشت کنید و سعی کنید با استفاده از آن‌ها به پاسخ مسئله برسید. در صورت نیاز، پاسخ‌های تشریحی این قسمت هم می‌تواند به شما کمک کند. لطفاً در این مرحله همان اول کار به سراغ پاسخ‌نامه نروید.

۵ سؤالاتی که در قسمت قبل به کمک پاسخ‌نامه حل کردید را علامت بزنید تا در فرصتی دیگر دوباره آن‌ها را حل کنید.

۶ بعد از مطالعه و تسلط روی هر فصل، می‌توانید آموخته‌های خودتان را با آزمون جمع‌بندی آخر فصل بسنجید.

توصیه‌های مشاوره‌ای:

۱ استفاده از جملات با بار معنایی منفی مانند «ریاضی درس سختی است و من نمی‌توانم یاد بگیرم» را به طور کامل کنار بگذارید. حتی اگر سال‌های قبل نتیجهٔ مناسبی کسب نکرده‌اید.

۲ با مطالعهٔ مستمر در طول سال تحصیلی از انباشته‌شدن مطالب برای روزهای امتحان جلوگیری کنید.

۳ هر چند وقت یک بار به سؤالاتی که در حل آن‌ها دچار مشکل شده‌اید مراجعه و دوباره آن‌ها را بررسی کنید.

این اثر که حاصل کار گروهی افراد ارزشمندی با تخصص‌های مختلف از تایپ، صفحه‌بندی، ویراستاری، طراحی جلد، چاپ و ... است. (می‌توانید نام برخی از این دوستان ارزشمند را در صفحهٔ اول کتاب مشاهده کنید) که تلاش در کنار آن‌ها باعث افتخار من است. از تمامی تلاش‌های این عزیزان قدردانی می‌کنم و سپاس‌گزارم.

همیشه سبز باشید

فرشاد پورالیاس

فهرست

فصل اول: آمار و احتمال

فصل دوم: الگوهای خطی

فصل سوم: الگوهای غیرخطی

امتحانات

فصل ۱ : آمار و احتمال

بخش ۱: شمارش

شمارش یعنی شمردن! *خب، شمردن چی؟؟؟* شمردن تعداد حالت‌ها و انتخاب‌هایی که می‌تواند در هر مسئله‌ای اتفاق بیفتد. *خب می‌شینیم می‌شمریم!!! ای بابا* در این درس می‌خواهیم تکنیک‌هایی برای شمارش سریع‌تر و دقیق‌تر حالت‌ها یاد بگیریم. توصیهٔ من به شما قبل از واردشدن به این درس این است که اصلاً در پاسخگویی به سؤالات عجله نکنید و در صورت نیاز چندین بار صورت سؤال را با صبر و حوصله بخوانید.

اصل جمع

در منوی یک کافی‌شاپ، سه نوع بستنی و چهار نوع قهوه وجود دارد و شما تصمیم دارید بستنی «یا» قهوه میل کنید. به چند طریق می‌توانید این انتخاب را انجام دهید؟

با توجه به این‌که فقط یک نوع بستنی یا یک نوع قهوه انتخاب خواهید کرد، کافی است تعداد بستنی‌ها را با تعداد قهوه‌ها جمع کنید؛ یعنی شما $۳+۴=۷$ انتخاب دارید. در این سؤال ما از اصل جمع استفاده کردیم.

تعریف اصل جمع اگر عملی را بتوان به m طریق و عمل دیگری را بتوان به n طریق انجام داد، به طوری که این دو عمل را نتوانیم با هم انجام دهیم، آن‌گاه به $m+n$ طریق می‌توان عمل اول «یا» عمل دوم را انجام داد.

توجه: قبل از استفاده از اصل جمع در صورت سؤال به دنبال لفظ «یا» یا مفهومی باشید که این دو عمل هم‌زمان انجام نشوند.

مثال: میترا به چند طریق می‌تواند فقط یک تبلت «یا» یک گوشی از بین ۱۲ تبلت و ۱۵ گوشی موجود در فروشگاه خریداری کند؟

پاسخ: در صورت مسئله از لفظ «یا» استفاده شده است. همچنین با توجه به صورت سؤال فقط یکی از دو عمل خرید تبلت یا خرید گوشی اتفاق خواهد افتاد؛ پس با توجه به اصل جمع $۱۲+۱۵=۲۷$ حالت خرید برای میترا از این فروشگاه وجود دارد.

مثال: دبیر ورزش قصد دارد از ۷ نفر دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم و ۱۲ نفر دانش‌آموز پایهٔ یازدهم فقط یک نفر را به عنوان سرگروه ورزشی انتخاب کند. این کار به چند طریق امکان‌پذیر است؟

پاسخ: در این سؤال خبری از لفظ «یا» نیست. اما با توجه به این‌که فقط یک نفر قرار است از پایهٔ دوازدهم یا یازدهم انتخاب شود و این عمل نمی‌تواند هم‌زمان اتفاق بیفتد (یعنی سرگروه انتخاب‌شده نمی‌تواند هم از پایهٔ یازدهم و هم از پایهٔ دوازدهم باشد)، با توجه به اصل جمع تعداد نفرات هر دو پایه را با هم جمع می‌کنیم. $۷+۱۲=۱۹$

۱۹ حالت برای انتخاب سرگروه وجود دارد.

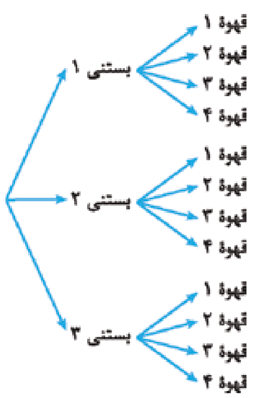
تعمیم اصل جمع: اصل جمع را می‌توان برای بیشتر از دو عمل نیز به کار برد. به شرطی که این عمل‌ها را نتوانیم هم‌زمان انجام دهیم.

مثال: می‌خواهیم از بین ۱۰ خودروی سواری، ۱۲ خودروی وانت و ۶ خودروی کامیون یک خودرو انتخاب کنیم. به چند طریق می‌توانیم این خودرو را انتخاب کنیم؟ *(نهایی شهریور ۹۹)*

پاسخ: با توجه به این‌که قرار است یک خودرو از این سه نوع خودرو انتخاب شود و این کار نمی‌تواند هم‌زمان اتفاق بیفتد (خودروی انتخاب‌شده سواری یا وانت یا کامیون است) طبق اصل جمع داریم: $۱۰+۱۲+۶=۲۸$

انتخاب یک خودرو از خودروهای موجود به ۲۸ طریق ممکن است.

اصل ضرب



دوباره به همان کافی‌شاپی که ۳ نوع بستنی و ۴ نوع قهوه داشت می‌رویم و این بار شما قصد دارید یک نوع بستنی «و» یک نوع قهوه میل کنید. به چند طریق می‌توانید این انتخاب را انجام دهید؟

برای روشن‌ترشدن موضوع، بستنی‌ها و قهوه‌های موجود را شماره‌گذاری می‌کنیم و آن‌ها را در نمودار درختی نمایش می‌دهیم.

برای رسم نمودار درختی، ابتدا در مرحلهٔ اول بستنی‌ها را نوشتیم (انتخاب بستنی) و در مرحلهٔ دوم قهوه‌ها را قرار دادیم (انتخاب قهوه). با توجه به نمودار در کل ۱۲ حالت داریم که با ضرب‌کردن تعداد بستنی‌ها در تعداد قهوه‌ها، تعداد حالت‌های انتخاب یک نوع بستنی و یک نوع قهوه به دست می‌آید. $۱۲=۴\times۳$ یعنی کسی که بستنی «۱» را انتخاب می‌کند، ۴ حالت برای انتخاب قهوه دارد. روشی که در به دست آوردن تعداد حالت‌ها استفاده کردیم اصل ضرب نام دارد.

برای درک بهتر اصل ضرب به کافی‌شاپ محلتون برید و انواع بستنی «و» قهوه‌ها رو میل کنید و تعداد حالت‌ها رو بشمرید و بعد با دندان‌های ترک‌خورده به دندان‌پزشکی مراجعه کنید.

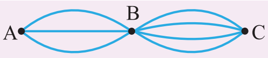
تعریف اصل ضرب اگر عملی طی دو مرحله انجام پذیرد، طوری که مرحلهٔ اول به m طریق «و» مرحلهٔ دوم به n طریق انجام‌پذیر باشد، در کل آن عمل به $m\times n$ طریق انجام‌پذیر است.

توجه: قبل از استفاده از اصل ضرب در صورت سؤال به دنبال لفظ «و» یا مفهومی باشید که انتخاب‌ها مرحله‌به‌مرحله انجام شود.

مثال: میترا به چند طریق می‌تواند یک تبلت «و» یک گوشی از بین ۱۲ تبلت و ۱۵ گوشی موجود در فروشگاه خریداری کند؟

پاسخ: در صورت مسئله لفظ «و» بین تبلت و گوشی مشاهده می‌شود. هم‌چنین با توجه به صورت مسئله، در مرحلهٔ اول بایستی تبلت و در مرحلهٔ دوم گوشی انتخاب شود؛ پس طبق اصل ضرب $۱۲ \times ۱۵ = ۱۸۰$ انتخاب برای خرید یک گوشی و یک تبلت برای میترا وجود دارد.

مثال: با توجه به شکل مقابل به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر C سفر کرد؟

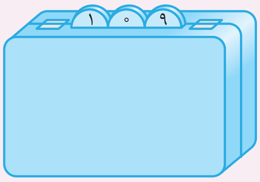


پاسخ: برای سفر از شهر A به C، در مرحلهٔ اول از A به B (۳ حالت) و در مرحلهٔ دوم از B به C (۴ حالت) را باید طی کرد. پس طبق اصل ضرب.
به ۱۲ حالت می‌توان از شهر A به شهر C سفر کرد.

$$\underbrace{۳}_{\text{مسیرها از A به B}} \times \underbrace{۴}_{\text{مسیرها از B به C}} = ۱۲$$

تعمیم اصل ضرب اصل ضرب را می‌توان برای بیشتر از دو عمل نیز به کار برد به شرطی که هر کدام از آن‌ها مرحله‌به‌مرحله انجام بگیرد.

مثال: تعداد حالت‌های ممکن برای رمزگذاری کیف مقابل را به دست آورید. رمز این کیف شامل سه رقم است که هر کدام می‌تواند یکی از رقم‌های صفر تا ۹ باشد.



پاسخ: تعداد ارقام از صفر تا ۹ برابر ۱۰ است. برای رمزگذاری این کیف هر کدام از قسمت‌ها مرحله‌به‌مرحله باید انجام گیرد. پس طبق اصل ضرب، تعداد حالت‌های هر کدام از مراحل را در هم ضرب می‌کنیم.
$۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰ = ۱۰۰۰$

مثال: شرکت ایران‌خودرو در یک طرح فروش خود، چهار مدل خودرو را در شش رنگ و پنج تیپ برای سه نوع متقاضی عادی، جوانی جمعیت و جایگزینی خودروهای فرسوده ارائه کرده است. به چند طریق می‌توان در این طرح فروش شرکت کرد؟

پاسخ: با توجه به تعمیم اصل ضرب برای مشخص‌کردن این‌که به چند طریق می‌توان در این طرح شرکت کرد، داریم:

$$\underbrace{۴}_{\text{مدل}} \times \underbrace{۶}_{\text{رنگ}} \times \underbrace{۵}_{\text{تیپ}} \times \underbrace{۳}_{\text{متقاضی}} = ۳۶۰$$

نکته: برای مشخص‌کردن تعداد حالت‌های پاسخگویی به سؤالات چندگزینه‌ای دو حالت وجود دارد:

۱ پاسخ‌گویی به سؤالات اجباری باشد: $(\text{تعداد گزینه‌ها})^{\text{تعداد سؤالات}}$

۲ پاسخ‌گویی به سؤالات اختیاری باشد: $(۱ + \text{تعداد گزینه‌ها})^{\text{تعداد سؤالات}}$

مثال: تعداد حالت‌های پاسخگویی به پنج سؤال یک آزمون چهارگزینه‌ای را در شرایط زیر به دست آورید.

الف) پاسخگویی به سؤالات اجباری باشد. ب) پاسخگویی به سؤالات اختیاری باشد.

پاسخ: **روش اول:** الف پاسخگویی به سؤالات اجباری است و آزمون چهارگزینه‌ای یعنی حتماً یکی از گزینه‌های (۱)، (۲)، (۳) و (۴) انتخاب خواهند شد؛ پس هر سؤال ۴ حالت دارد و هم‌چنین به سؤالات مرحله‌به‌مرحله پاسخ داده می‌شود. طبق اصل ضرب داریم: $۴ \times ۴ \times ۴ \times ۴ \times ۴ = ۴^۵$

ب پاسخگویی به سؤالات اختیاری است، یعنی علاوه بر گزینه‌های (۱)، (۲)، (۳) و (۴) یک حالت دیگر پاسخ‌ندادن به سؤال (اختیاری است و اجباری نیست) اضافه می‌شود. پس برای هر سؤال ۵ حالت وجود دارد. پس طبق اصل ضرب داریم: $۵ \times ۵ \times ۵ \times ۵ \times ۵ = ۵^۵$

روش دوم: قسمت «الف» را می‌توانستیم با استفاده از نکتهٔ بالا به صورت روبه‌رو نیز پاسخ دهیم: $(\text{تعداد گزینه‌ها})^{\text{تعداد سؤالات}} = ۴^۵$

و برای قسمت «ب» نیز داریم: $(۱ + \text{تعداد گزینه‌ها})^{\text{تعداد سؤالات}} = (۴ + ۱)^۵ = ۵^۵$

ترکیب اصل ضرب و اصل جمع

حال که اصل ضرب و اصل جمع را به خوبی فراگرفتیم، در حل برخی سؤالات نیاز داریم که از هر دو اصل استفاده کنیم. فقط حواستان به تفاوت‌هایی که این دو اصل دارند باشد.

مثال: در منوی یک رستوران ۵ نوع غذا، ۴ نوع سوپ و ۳ نوع دسر وجود دارد. به چند طریق می‌توان یک نوع غذا و یک نوع سوپ یا یک نوع غذا و یک نوع دسر سفارش داد؟

پاسخ: $\underbrace{\text{یک نوع غذا و یک نوع سوپ}}_{\text{قسمت اول}}$ **یا** $\underbrace{\text{یک نوع غذا و یک نوع دسر}}_{\text{قسمت دوم}}$

مسئله را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم:

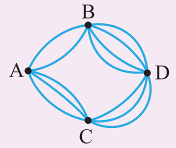
قسمت اول: انتخاب یک نوع غذا و یک نوع سوپ مرحله‌به‌مرحله انجام می‌شود *(البته «و» هم اون وسط اومده)*، پس طبق اصل ضرب داریم:

$$\overset{\text{غذا}}{۵} \times \overset{\text{سوپ}}{۴} = ۲۰$$

قسمت دوم: انتخاب یک نوع غذا و یک نوع دسر مرحله‌به‌مرحله انجام می‌شود (حرف «و» هم که هست)، پس طبق اصل ضرب داریم:
$\overset{\text{غذا}}{\overset{\uparrow}{۵}} \times \overset{\text{دسر}}{\overset{\uparrow}{۳}} = ۱۵$

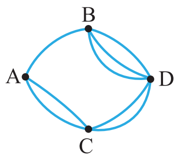
در آخر با توجه به این‌که قسمت اول و دوم هم‌زمان اتفاق نمی‌افتد (*حرف «یا» هم که بینشون می‌بینی*)، طبق اصل جمع تعداد حالت‌های قسمت اول و دوم را جمع می‌کنیم: $۲۰+۱۵=۳۵$

مثال: الف) با توجه به شکل روبه‌رو، به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر D سفر کرد؟
ب) به چند طریق می‌توان از شهر D به A برگشت به طوری که از مسیر رفت بازنگردیم؟



پاسخ: الف برای سفر از شهر A به D، از شهر B «یا» شهر C باید عبور کرد، این مسئله را به دو قسمت زیر تقسیم می‌کنیم:
قسمت اول: رفتن از A به D با گذشتن از B: رفتن از A به B به ۲ صورت و از B به D به ۴ صورت امکان‌پذیر است و چون مرحله‌به‌مرحله انجام می‌شود بنا بر اصل ضرب $۲\times۴=۸$ حالت می‌توان از A به D با گذشتن از B سفر کرد.
قسمت دوم: رفتن از A به D با گذشتن از C: از A به C، ۳ مسیر و از C به D، نیز ۳ مسیر وجود دارد. رفتن از A به D با گذشتن از C به ۹ حالت امکان‌پذیر است: $۳\times۳=۹$
قسمت اول و دوم هم‌زمان اتفاق نمی‌افتد (حرف «یا» هم هست)، پس طبق اصل جمع تعداد حالت‌هایی که می‌توان از شهر A به D سفر کرد برابر ۱۷ حالت است. $۸+۹=۱۷$

ب برای مشخص‌کردن تعداد حالت‌های برگشت از شهر D به A به طوری که از مسیر رفت بازنگردیم، کافی است از هر کدام از قسمت‌ها، یک مسیر کم کنیم. (مسیر رفت)



قسمت اول: از D به A با گذشتن از B: $۳\times۱=۳$
قسمت دوم: از D به A با گذشتن از C: $۲\times۲=۴$
در آخر بنا بر اصل جمع $۷=۴+۳$ حالت برای برگشتن از D به A وجود دارد به طوری که از مسیر رفت بازنگردیم.

نماد فاکتوریل (!)

نماد فاکتوریل (!) که شبیه علامت تعجب است، اگر جلوی هر عدد طبیعی قرار بگیرد، به معنی ضرب اعداد طبیعی از ۱ تا عدد مورد نظر است.
به مثال‌های زیر توجه کنید:

$۷!=۱\times۲\times۳\times۴\times۵\times۶\times۷=۵۰۴۰$ $\quad ۵!=۱\times۲\times۳\times۴\times۵=۱۲۰$ $\quad ۳!=۱\times۲\times۳=۶$

نکته: ۱ بنا بر قرارداد مقادیر ۰! و ۱! را برابر یک در نظر می‌گیریم. $۰!=۱\,,\,۱!=۱$
۲ هر عدد فاکتوریلی را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب اعداد فاکتوریلی کوچک‌تر نوشت. به مثال‌های زیر دقت کنید:

$۵!=\underbrace{۱\times۲\times۳\times۴}_{۴!}\times۵=۴!\times۵$ $\qquad ۴!=\underbrace{۱\times۲\times۳}_{۳!}\times۴=۳!\times۴$

$۵!=\underbrace{۱\times۲\times۳}_{۳!}\times۴\times۵=۳!\times۴\times۵$ $\qquad ۷!=\underbrace{۱\times۲\times۳\times۴\times۵}_{۵!}\times۶\times۷=۵!\times۶\times۷$

با توجه به تجربه‌ای که در مثال‌های بالا کسب کردیم روابط زیر را بدون نوشتن سری اعداد مشخص می‌کنیم:

$۱۲!=۱۱!\times۱۲=۱۰!\times۱۱\times۱۲=۹!\times۱۰\times۱۱\times۱۲$ $\qquad ۱۰!=۹!\times۱۰=۸!\times۹\times۱۰=۷!\times۸\times۹\times۱۰$

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $۴!$ $\qquad$ ب) $\frac{۳!}{۴!}$ $\qquad$ پ) $\frac{۷!}{۵!}$

ت) $\frac{۱۴!}{۱۰!}$ $\qquad$ ث) $\frac{۱۲!\times۰!}{۸!\times۲!}$ $\qquad$ ج) $\frac{۱۳!\times۱!}{۱۱!\times۲!}$

پاسخ:

الف $۴!=۱\times۲\times۳\times۴=۲۴$

ب $\frac{۳!}{۴!}=\frac{\cancel{۳!}}{\cancel{۳!}\times۴}=\frac{۱}{۴}$

پ $\frac{۷!}{۵!}=\frac{\cancel{۵!}\times۶\times۷}{\cancel{۵!}}=۴۲$

ت $\frac{۱۴!}{۱۰!}=\frac{\cancel{۱۰!}\times۱۱\times۱۲\times۱۳\times۱۴}{\cancel{۱۰!}}=۱۱\times۱۲\times۱۳\times۱۴=۲۴۰۲۴$

ث در صورت به جای ۰!، ۱ قرار می‌دهیم: $\frac{۱۲!\times۰!}{۸!\times۲!}=\frac{۱۲!\times۱}{۸!\times۲!}=\frac{\cancel{۸!}\times۹\times۱۰\times۱۱\times۱۲\times۱}{\cancel{۸!}\times۲!}=\frac{۹\times۱۰\times۱۱\times\cancelto{۶}{۱۲}}{۱\times\cancelto{۱}{۲}}=۵۹۴۰$

ج $\frac{۱۳!\times۱!}{۱۱!\times۲!}=\frac{\cancel{۱۱!}\times\cancelto{۶}{۱۲}\times۱۳\times۱}{\cancel{۱۱!}\times۱\times\cancelto{۱}{۲}}=۷۸$

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید:

الف) $۲!+۳!$ ب) $(۲+۳)!$ پ) $۲!\times ۳!$ ت) $(۲\times ۳)!$

ث) $۵\times ۴!$ ج) $۶!-۳!$ چ) $(۶-۳)!$ ح) $\dfrac{۱۲!}{(۱۲-۳)!\,۳!}$

پاسخ: الف) $۲!+۳!=۲+۶=۸$

ب) با توجه به اولویت پرانتز، ابتدا ۲ را با ۳ جمع می‌کنیم و سپس مقدار $۵!$ را به دست می‌آوریم: $(۲+۳)!=۵!=۱\times ۲\times ۳\times ۴\times ۵=۱۲۰$

توجه به قسمت‌های (الف) و (ب) یک بار دیگر با دقت توجه کنید و اشتباه روبه‌رو را مرتکب نشوید: $۲!+۳!\neq ۵!$

پ) $۲!\times ۳!=۲\times ۶=۱۲$

ت) ابتدا حاصل داخل پرانتز را به دست می‌آوریم: $(۲\times ۳)!=۶!=۱\times ۲\times ۳\times ۴\times ۵\times ۶=۷۲۰$

با توجه به قسمت (پ) و (ت) حاصل $۲!\times ۳!$ برابر $(۲\times ۳)!$ یعنی $۶!$ نیست: $۲!\times ۳!\neq ۶!$

ث) توجه کنید که تساوی $۵\times ۴!=۲۰!$ درست نیست. $۵\times ۴!=۵\times ۲۴=۱۲۰$

ج) $۶!-۳!=۷۲۰-۶=۷۱۴$

چ) ابتدا حاصل داخل پرانتز را به دست می‌آوریم: $(۶-۳)!=۳!=۶$

ح)

$$\frac{۱۲!}{(۱۲-۳)!\,۳!}=\frac{۱۲!}{۹!\,۳!}=\frac{\cancel{۹!}^{۱}\times ۱۰\times ۱۱\times \cancel{۱۲}^{\cancel{۶}^{۲}}}{\cancel{۹!}_{۱}\times ۱\times \cancel{۲}_{۱}\times \cancel{۳}_{۱}}=۲۲۰$$

مثال: عبارت‌های زیر را تا حد امکان ساده کنید.

الف) $\dfrac{n!}{(n+۳)!}$ ب) $\dfrac{(m+۱)!}{(m-۲)!}$

پاسخ: برای ساده‌کردن متغیرهای فاکتوریلی از عبارت بزرگ‌تر شروع کرده، یک واحد یک واحد کم می‌کنیم تا به عبارت کوچک‌تر برسیم، سپس قسمت مشترک را از صورت و مخرج ساده می‌کنیم.

الف) $(n+۳)!$ بزرگ‌تر از $n!$ است، در نتیجه داریم:

$$\frac{n!}{(n+۳)!}=\frac{\cancel{n!}}{(n+۳)(n+۲)(n+۱)\cancel{n!}}=\frac{۱}{(n+۳)(n+۲)(n+۱)}$$

ب) $(m+۱)!$ بزرگ‌تر از $(m-۲)!$ است.

$$\frac{(m+۱)!}{(m-۲)!}=\frac{(m+۱)m(m-۱)\cancel{(m-۲)!}}{\cancel{(m-۲)!}}=m(m+۱)(m-۱)$$

مثال: معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $(n+۱)!=۴۲(n-۱)!$ ب) $\dfrac{(n-۲)!}{n!}=\dfrac{۱}{۷۲}$

پاسخ: الف)

$$(n+۱)!=۴۲(n-۱)!$$

$$\Rightarrow \frac{(n+۱)!}{(n-۱)!}=۴۲ \Rightarrow \frac{(n+۱)n\cancel{(n-۱)!}}{\cancel{(n-۱)!}}=۴۲ \Rightarrow n(n+۱)=۴۲ \Rightarrow n^۲+n-۴۲=۰$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد جمله‌مشترک}} (n+۷)(n-۶)=۰ \Rightarrow \begin{cases} n+۷=۰ \Rightarrow n=-۷ & \text{غیر قابل قبول} \\ n-۶=۰ \Rightarrow n=۶ & \text{قابل قبول} \end{cases}$$

نماد فاکتوریل برای اعداد منفی تعریف نشده است.

ب)

$$\frac{(n-۲)!}{n!}=\frac{۱}{۷۲} \Rightarrow \frac{\cancel{(n-۲)!}}{n(n-۱)\cancel{(n-۲)!}}=\frac{۱}{n(n-۱)}=\frac{۱}{۷۲} \xrightarrow{\text{معکوس‌کردن}} n(n-۱)=۷۲$$

$$\Rightarrow n^۲-n-۷۲=۰ \xrightarrow{\text{اتحاد جمله‌مشترک}} (n-۹)(n+۸)=۰ \Rightarrow \begin{cases} n-۹=۰ \Rightarrow n=۹ \\ n+۸=۰ \Rightarrow n=-۸ & \text{غیر قابل قبول} \end{cases}$$

سؤال‌های امتحانی

سؤال‌های با علامت سفت‌ترین سؤال‌های هر بخشن. اگر به کم‌تر از ۲۰ راضی نمی‌شی، بعد از تسلط روی سؤال‌های دیگه، برو سراغ اون‌ها.

درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

۱- برای اعداد صفر و یک، فاکتوریل را به صورت $۱ = !۰$ و $۱ = !۱$ تعریف می‌کنیم. *(نهایی شهریور ۹۹)*

۲- حاصل $\frac{۸!}{۴!}$ برابر $۲!$ است. *(نهایی خرداد ۱۴۰۱)*

جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب کامل کنید.

۳- اگر عملی را بتوان به m طریق و عمل دیگری را بتوان به n طریق انجام داد طوری که نتوانیم دو عمل را با هم انجام دهیم، در این صورت به .... طریق می‌توان عمل اول یا عمل دوم را انجام داد.

۴- اگر عملی در مرحلهٔ اول به m طریق و در مرحلهٔ دوم به n طریق انجام‌پذیر باشند، در کل آن عمل به .... طریق انجام می‌پذیرد. *(نهایی خرداد ۱۴۰۰)*

۵- برای عدد صفر، فاکتوریل را به صورت .... = !۰ تعریف می‌کنیم. *(نهایی خرداد ۱۴۰۰)*

۶- مقدار $\frac{۰!}{۱!}$ برابر .... است. *(نهایی شهریور ۱۴۰۰)*

۷- حاصل $\frac{۶!}{۳!}$ برابر .... است. *(نهایی خرداد ۱۴۰۰ و مشابه شهریور ۱۴۰۱)*

۸- یک رستوران ۴ نوع غذا، ۳ نوع سالاد و ۲ نوع دسر در منوی خود دارد.

الف) به چند طریق می‌توان یک نوع غذا و یک نوع دسر سفارش داد؟

ب) به چند طریق می‌توان یک نوع سالاد یا یک نوع دسر سفارش داد؟

پ) به چند طریق می‌توان یک نوع غذا و یک نوع سالاد و یک نوع دسر سفارش داد؟

ت) به چند طریق می‌توان یک نوع غذا یا یک نوع سالاد یا یک نوع دسر سفارش داد؟

ث) به چند طریق می‌توان «یک نوع غذا و یک نوع سالاد» یا «یک نوع غذا و یک نوع دسر» سفارش داد؟

ج) به چند طریق می‌توان «یک نوع غذا یا یک نوع سالاد» و «یک نوع غذا یا یک نوع دسر» سفارش داد؟

۹- در یک آزمون که از دو قسمت، قسمت اول ۳ سؤال دوگزینه‌ای و قسمت دوم ۳ سؤال چهارگزینه‌ای تشکیل شده است، اگر پاسخ‌دادن به سؤالات اجباری باشد، در این صورت:

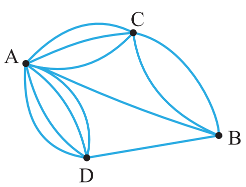
الف) به چند طریق می‌توان فقط به قسمت اول این آزمون پاسخ داد؟
ب) به چند طریق می‌توان فقط به قسمت دوم این آزمون پاسخ داد؟
پ) به چند طریق می‌توان به یکی از دو قسمت این آزمون پاسخ داد؟
ت) به چند طریق می‌توان به دو قسمت این آزمون پاسخ داد؟

۱۰- علی ۳ کتاب علمی و ۴ کتاب داستانی دارد. او می‌خواهد از بین کتاب‌هایش، یک کتاب علمی و یک کتاب داستانی به دوستش هدیه دهد. او به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟ *(نهایی شهریور ۱۴۰۱)*

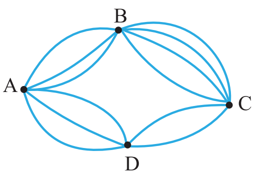
۱۱- مهدی از بین ۳ کتاب ریاضی، ۲ کتاب عربی و ۴ کتاب ادبیات به چند طریق می‌تواند:

الف) یک کتاب برای مطالعه انتخاب کند؟

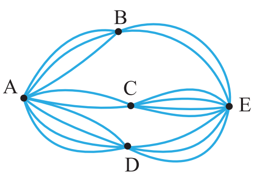
ب) یک کتاب ریاضی، یک کتاب عربی و یک کتاب ادبیات انتخاب کند؟ *(نهایی دی ۹۹)*



۱۲- بین چهار شهر A، B، C و D مطابق شکل روبه‌رو راه‌هایی وجود دارد. مشخص کنید به چند طریق می‌توان از شهر C و بدون عبور از شهر B به شهر D مسافرت کرد؟ *(نهایی خرداد ۱۴۰۰)*



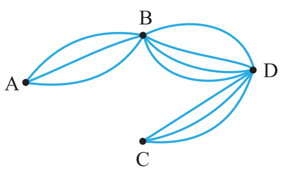
۱۳- مطابق شکل روبه‌رو بین شهرهای A، B، C و D راه‌هایی وجود دارد که همه دوطرفه‌اند. مشخص کنید به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر C مسافرت کرد؟ *(نهایی خرداد ۹۹)*



مطابق شکل روبه‌رو بین شهرهای A، B، C، D و E راه‌هایی است که همه دوطرفه‌اند:

۱۴- به چند طریق می‌توان از شهر A به E سفر کرد؟

۱۵- به چند طریق می‌توان از شهر A به E و بازگشت به A به طوری که از مسیر رفت بازنگردیم؟



۱۶- مانند شکل روبه‌رو مسیرهایی از شهر A به D وجود دارد. اگر بتوان از شهر A به D به ۲۷ طریق سفر کرد، در این صورت چند مسیر از شهر A به شهر C وجود دارد؟

■ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

۱۷- $۵!$

۱۸- $۳!-۲!$

۱۹- $\frac{۵!}{۳!}$

۲۰- $(۶-۳)!$

۲۱- $\frac{۷!}{(۷-۳)!\,۳!}$

۲۲- $\frac{۱۳!}{(۱۳-۴)!\,۴!}$

۲۳- $\frac{۱۵!+۱۴!}{۱۴!}$

۲۴- $۷!+۵!=$

■ حاصل عبارت‌های زیر را ساده کنید.

۲۵- $\frac{(m+۲)!}{(m+۱)!}=$

۲۶- $\frac{(n-۲)!}{(n+۱)!}$

۲۷- $\frac{(n+۱)!}{(n-۱)!}\times\frac{(n-۲)!}{n!}$

۲۸- معادلهٔ $(x^۲-۸)!=۱$ چند ریشه دارد؟

۲۹- اگر m و n دو عدد طبیعی و $m+n=۷$ باشد، در این صورت بیشترین مقدار $m!+n!$ را به دست آورید.

۳۰- اگر $\frac{(n-۲)!}{(n-۳)!}=۱۲$ باشد، در این صورت مقدار n را مشخص کنید.

۳۱- اگر $\frac{n!}{۴!}=\frac{(n+۱)!}{۶!}$ باشد، در این صورت مقدار n را مشخص کنید.

۳۲- جواب‌های معادلهٔ $\frac{(n+۱)!}{(n-۱)!}-۳n=۴۸$ را مشخص کنید.

بخش ۲: جایگشت

فرض کنید ۴ نفر از دوستانتان که برای راحتی کار آن‌ها را با حروف A، B، C و D نمایش می‌دهیم بخواهند در یک صف بایستند. به هر کدام از حالت‌هایی که از جابه‌جاشدن آن‌ها در صف ایجاد می‌شود یک **جایگشت** ۴تایی از ۴ نفر گفته می‌شود.

مانند: ABCD، ACDB، CDAB و ...

برای به دست آوردن تعداد کل جایگشت‌های این ۴ نفر می‌توانیم ۴ جایگاه را در نظر بگیریم:

جایگاه اول	جایگاه دوم	جایگاه سوم	جایگاه چهارم
۴	۳	۲	۱

در جایگاه اول می‌توانیم یکی از ۴ نفر را قرار دهیم، پس ۴ حالت برای جایگاه اول در نظر می‌گیریم، برای جایگاه دوم ۳ حالت، چون یکی از چهار نفر در جایگاه اول قرار گرفت. همین‌طور برای جایگاه سوم، ۲ حالت و برای جایگاه چهارم یک حالت وجود دارد. چون هر کدام از این ۴ جایگاه را مرحله‌به‌مرحله کامل کردیم؛ طبق اصل ضرب کافی است تعداد حالت‌های هر کدام از جایگاه‌ها را در هم ضرب کنیم: $۴\times۳\times۲\times۱=۴!$

همین‌طور که دیدیم تعداد کل جایگشت‌های ۴تایی ۴ نفر برابر $۴!$ شد. به نظر شما اگر همین کار را برای ۵ یا ۶ نفر و بیشتر انجام می‌دادیم، تعداد جایگشت‌ها برابر چه عددی می‌شد؟

هر حالت از کنار هم قرارگرفتن n شیء متمایز را یک جایگشت nتایی از آن n شیء می‌نامیم. تعداد کل جایگشت‌های nتایی، n شیء متمایز برابر $n!$ است.

مثال: ۵ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم و ۷ دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم به چند طریق می‌توانند در یک صف بایستند؟

پاسخ: تعداد کل دانش‌آموزان برابر ۱۲ نفر است و تعداد کل جایگشت‌های ۱۲تایی ۱۲ شیء متمایز برابر $۱۲!$ است.

مثال: ۳ کتاب ریاضی و ۴ کتاب فیزیک متمایز را به چند طریق می‌توان در کتابخانه کنار هم قرار داد؟

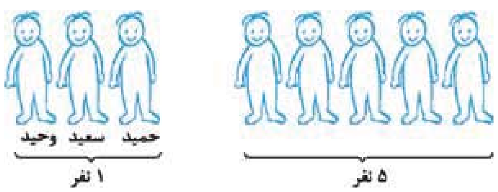
پاسخ: ۷ کتاب متمایز داریم و تعداد کل جایگشت‌های ۷تایی ۷ شیء متمایز برابر $۷!$ است.

مثال: با حروف کلمهٔ «کتاب» چند کلمهٔ ۴حرفی متمایز بدون تکرار حروف می‌توان نوشت؟ (بامعنی یا بی‌معنی)

پاسخ: کلمهٔ «کتاب» از ۴ حرف متمایز تشکیل شده و تعداد جایگشت‌های ۴تایی ۴ شیء متمایز برابر $۴!$ است.

جایگشت‌های کنار هم

وحید، سعید، حمید و ۵ نفر از دوستانشان که روی هم ۸ نفر می‌شوند می‌خواهند تعداد حالت‌هایی را که می‌توانند در یک صف بایستند به طوری که وحید، سعید و حمید در کنار هم باشند را به دست آورند. برای این کار آن‌ها وحید، سعید و حمید را به عنوان یک نفر در کنار ۵ نفر دیگر در نظر گرفتند و در نتیجه تعداد جایگشت‌های آن‌ها برابر $۶!$ شد و در آخر $۶!$ را در تعداد جایگشت‌های وحید، سعید و حمید که برابر $۳!$ است (می‌توانند در کنار هم جابه‌جا شوند) ضرب کردند.



این ۸ نفر به $۶!\times۳!$ طریق می‌توانند در یک صف بایستند به طوری که وحید، سعید و حمید در کنار هم باشند. در نتیجه:

برای به دست آوردن تعداد جایگشت‌هایی که چند عضو خاص در کنار یکدیگر باشند، چند عضو خاص را در یک بسته قرار می‌دهیم و به عنوان یک عضو جدید در نظر می‌گیریم و تعداد جایگشت‌های این عضو جدید با بقیهٔ اعضا را به دست می‌آوریم و اگر اعضای داخل بسته هم بتوانند جابه‌جا شوند، در تعداد جایگشت‌های اعضای داخل بسته ضرب می‌کنیم.

مثال: تعداد جایگشت‌های ۵تایی حروف انگلیسی A، B، C، D و E را به طوری که B و C در کنار هم باشند، به دست آورید.

پاسخ: با قراردادن B و C در داخل یک بسته و در نظر گرفتن $\boxed{BC}$ به عنوان یک عضو، تعداد جایگشت‌های این چهار عضو برابر !۴ و چون B و C در داخل بسته هم می‌توانند جابه‌جا شوند جایگشت‌های دو عضو B و C برابر !۲ در نتیجه تعداد جایگشت‌های چهارعضوی و دوعضوی را در هم ضرب می‌کنیم (اصل ضرب). تعداد جایگشت‌ها زمانی که B و C کنار هم باشند برابر !۲×!۴ می‌شود.

$\underset{۱}{A}\ \ \underset{۲}{\boxed{BC}}\ \ \underset{۳}{D}\ \ \underset{۴}{E}$

مثال: ۳ کتاب ادبیات $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ و ۵ کتاب منطق $M_۱$، $M_۲$، $M_۳$، $M_۴$ و $M_۵$ را به چند طریق می‌توانیم در کتابخانه قرار دهیم به طوری که سه کتاب ادبیات در کنار هم باشند؟

پاسخ: سه کتاب ادبیات $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ را در یک بسته قرار می‌دهیم.

$\boxed{A_۱, A_۲, A_۳}, M_۱, M_۲, M_۳, M_۴, M_۵$

تعداد جایگشت‌های این بسته با ۵ کتاب منطق برابر !۶ است و تعداد جایگشت‌های سه کتاب ادبیات داخل بسته برابر !۳ است. با ضرب‌کردن !۳ در !۶ تعداد جایگشت‌هایی را که سه کتاب ادبیات در کنار هم باشند، به دست می‌آوریم.

!۶×!۳

مثال: تعداد جایگشت‌های حروف کلمهٔ «مهران» به طوری که حرف «م» دقیقاً بعد از حرف «ن» بیاید را به دست آورید.

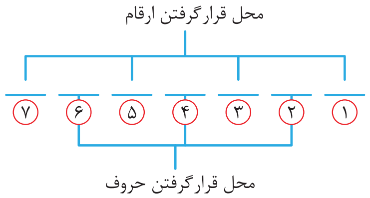
پاسخ: کلمهٔ «مهران» از پنج حرف تشکیل شده است. با توجه به صورت سؤال حرف (م) را بعد از حرف (ن) در داخل بسته قرار می‌دهیم.

$\boxed{\text{ن م}}$ ه ر ا

تعداد جایگشت‌های این بسته با ۳ حرف دیگر برابر !۴ است و (ن) و (م) هم در داخل بسته نمی‌توانند جابه‌جا شوند. (حرف (م) دقیقاً بعد از حرف (ن) باید بیاید.) در نتیجه تعداد جایگشت‌هایی که حرف «م» دقیقاً بعد از حرف «ن» بیاید برابر همان !۴ است.

جایگشت‌های یک‌درمیان

می‌خواهیم با استفاده از سه حرف A، B و C و رقم‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ یک رمز الکترونیکی (پسورد) بسازیم به طوری که به صورت یک‌درمیان از حرف‌ها و ارقام استفاده کنیم. تعداد کل رمزهایی که می‌توان به این روش ساخت را به صورت زیر به دست می‌آوریم.



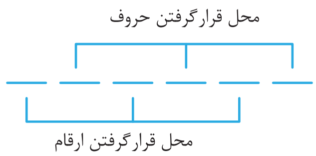
برای سه حرف A، B و C و چهار رقم ۱، ۲، ۳ و ۴، هفت جایگاه در نظر می‌گیریم. چون تعداد حرف‌ها یکی کم‌تر از تعداد رقم‌ها است، برای این‌که بتوانند یک‌درمیان پیش هم قرار بگیرند جایگاه‌های اول، سوم، پنجم و هفتم را برای رقم‌ها و بقیهٔ جایگاه‌ها را برای حرف‌ها در نظر می‌گیریم.

به شکل روبه‌رو و محل قرارگرفتن حروف و ارقام دقت کنید.

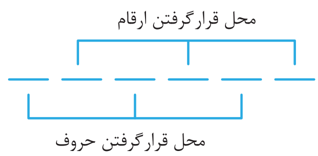
چون محل قرارگرفتن حروف و ارقام با هم متفاوت است می‌توان جایگشت‌های هر کدام را به طور جداگانه به دست آورد و در هم ضرب کرد. تعداد جایگشت‌های حروف برابر !۳ و تعداد جایگشت‌های ارقام برابر !۴ است در نتیجه تعداد جایگشت‌های یک‌درمیان آن‌ها برابر !۳×!۴ است.

توجه: اگر تعداد حروف و ارقام در مثال بالا با هم برابر بود، دو حالت برای جایگشت‌های آن‌ها اتفاق می‌افتاد. برای مثال برای ۳ حرف و ۳ رقم داریم:

حالت اول:



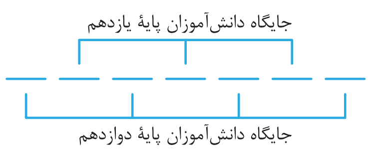
حالت دوم:



در نتیجه برای به دست آوردن جایگشت‌های یک‌درمیان آن‌ها بعد از این‌که جایگشت‌های آن‌ها را تک‌به‌تک به دست آوردیم، حاصل را در ۲ ضرب می‌کنیم (دو حالت داریم). برای مثال قبل تعداد جایگشت‌های یک‌درمیان ۳ حرف و ۳ رقم برابر $\underset{\text{جایگشت‌های حروف}}{!۳} \times \underset{\text{جایگشت‌های ارقام}}{!۳} \times \underset{\text{حالت اول و دوم}}{۲}$ است.

مثال: تعداد جایگشت‌های سه دانش‌آموز پایهٔ یازدهم و چهار دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم به طوری که دانش‌آموزان یازدهم و دوازدهم یک‌درمیان باشند را به دست آورید.

پاسخ: برای به دست آوردن جایگشت‌های این هفت دانش‌آموز جایگاه‌های زیر را مشخص می‌کنیم.



با توجه به این‌که این دانش‌آموزان باید یک‌درمیان در کنار هم قرار بگیرند، جایگاه‌های آن‌ها را یک‌درمیان در نظر می‌گیریم و تعداد جایگشت‌های آن‌ها را به طور جداگانه به دست می‌آوریم و در هم ضرب می‌کنیم. تعداد جایگشت‌های دانش‌آموزان پایهٔ دوازدهم برابر !۴ (جایگشت‌های ۴تایی) و تعداد جایگشت‌های دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم برابر !۳ است و در نتیجه تعداد جایگشت‌های یک‌درمیان این هفت دانش‌آموز برابر !۳×!۴ می‌باشد.

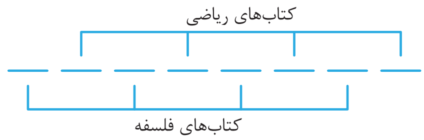
توجه: توجه کنید که تعداد دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم یک نفر کم‌تر است و حالت دیگری نمی‌تواند اتفاق بیفتد.

مثال: ۴ کتاب متمایز ریاضی و ۴ کتاب متمایز فلسفه را به چند طریق می‌توانیم به صورت یک‌درمیان در یک ردیف در کتابخانه قرار دهیم؟

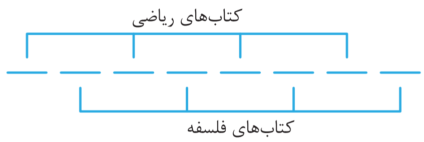
پاسخ: با توجه به این‌که تعداد کتاب‌های ریاضی و فلسفه با هم برابرند، برای به دست آوردن جایگشت‌های یک‌درمیان آن‌ها یکی از حالت‌ها را به دست می‌آوریم و حاصل را در ۲ ضرب می‌کنیم. تعداد جایگشت‌های یک‌درمیان حالت اول:

$$\underset{\text{کتاب‌های فلسفه}}{\underset{\downarrow}{۴!}} \times \underset{\text{کتاب‌های ریاضی}}{\underset{\downarrow}{۴!}}$$

حالت اول:



حالت دوم:



تعداد جایگشت‌های یک‌درمیان حالت اول و حالت دوم برابر است با:

$$\underset{\text{حالت اول و حالت دوم}}{۲} \times ۴! \times ۴!$$

جایگشت با اعضای تکراری

برای مثال می‌خواهیم ۸ مهرهٔ شطرنج که شامل ۳ سرباز و ۲ اسب و یک فیل و شاه و وزیر است را بر روی یک ردیف صفحهٔ شطرنج بچینیم. برای این‌که تعداد کل چیده‌شدن آن‌ها را به دست آوریم ابتدا تعداد جایگشت‌های ۸ مهره را که برابر ۸! است را می‌نویسیم اما بعضی از مهره‌ها دقیقاً مانند هم هستند (۳ سرباز و ۲ اسب) در نتیجه باید ۸! را بر تعداد جایگشت‌های مهره‌های تکراری تقسیم کنیم. پس جایگشت‌های این ۸ مهره به صورت زیر است:

$$\frac{۸!}{\underset{\text{۲ اسب}}{۲!}\,\underset{\text{۳ سرباز}}{۳!}}$$

پس در جایگشت با اعضای تکراری، تعداد جایگشت‌ها را بر تعداد جایگشت‌های اعضای تکراری تقسیم می‌کنیم.

مثال: تعداد کلمات هفت‌حرفی متمایزی که با حروف کلمهٔ «خیلی‌سبز» می‌توان نوشت را به دست آورید.

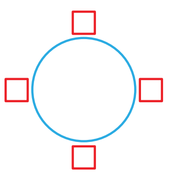
پاسخ: کلمهٔ «خیلی‌سبز» از هفت حرف تشکیل شده و تعداد جایگشت‌های هفت‌تایی برابر ۷! است ولی چون حرف «ی» در این کلمه دو بار تکرار شده، ۷! را بر تعداد جایگشت‌های دو حرف «ی» که برابر ۲! است (دو بار تکرار شده) تقسیم می‌کنیم که برابر $\frac{۷!}{۲!}$ می‌شود.

مثال: تعداد جایگشت‌های حروف عبارت «ریاضی و آمار» را به دست آورید.

پاسخ: عبارت «ریاضی و آمار» از ۱۰ حرف تشکیل شده است. اما حرف (ر) دو بار و حرف (ی) نیز دو بار و حرف (الف) سه بار تکرار شده است پس ۱۰! را بر ۲!، ۲! و ۳! تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{۱۰!}{۲! \times ۲! \times ۳!}$$

جایگشت‌های دوری



فرض کنید می‌خواهیم چهار حرف A، B، C و D را دور یک دایره بچینیم. جایگاه‌های این چهار حرف را مانند شکل مقابل در نظر می‌گیریم. در جایگشت‌های دوری اول و آخر بودن معنی ندارد؛ پس یکی از حالت‌ها را نخواهیم داشت و برای این چهار حرف تعداد جایگشت‌های دوری برابر $۳! = ۶$ خواهد بود.

- تعداد جایگشت‌های دوری n شیء متمایز برابر $(n-۱)!$ است.

مثال: هشت نفر به چند طریق می‌توانند دور یک میز بنشینند؟

پاسخ: تعداد جایگشت‌های دوری ۸ نفر برابر $(۸-۱)! = ۷!$ است.

مثال: علی و حسن و هشت نفر از دوستانشان در یک میهمانی به چند طریق می‌توانند دور میز بنشینند به طوری که علی و حسن در کنار هم باشند؟

پاسخ: علی و حسن را یک نفر در نظر می‌گیریم و به همراه ۸ نفر دیگر که روی هم ۹ نفر می‌شوند. تعداد جایگشت‌های دوری ۹ نفر برابر $(۹-۱)! = ۸!$ است. این ۸! را در ۲! جابه‌جایی علی و حسن نیز ضرب می‌کنیم.

$$۸! \times ۲!$$

جایگشت‌های rتایی از nشیء (تبدیل rشیء از nشیء)

تمامی مطالبی که تا الان در مورد جایگشت‌ها بررسی کردیم تعداد جایگشت‌ها و اعضای آن با هم برابر بود، برای مثال جایگشت‌های ۴تایی A، B، C و D ولی ممکن است تعداد جایگشت‌های ما از تعداد اعضا کم‌تر باشد و در هر مرحله بعضی از اعضا انتخاب و برخی دیگر کنار گذاشته شوند. به مثال زیر توجه کنید:

جایگشت‌های دوتایی سه عضو A، B و C:

B و C انتخاب شده و A کنار گذاشته شده: $\underline{B}\ \underline{C}$ ، $\underline{C}\ \underline{B}$	A و C انتخاب شده و B کنار گذاشته شده: $\underline{A}\ \underline{C}$ ، $\underline{C}\ \underline{A}$	A و B انتخاب شده و C کنار گذاشته شده: $\underline{A}\ \underline{B}$ ، $\underline{B}\ \underline{A}$

در واقع جایگشت‌های دوتایی از سه عضو همان انتخاب‌کردن دو عضو از سه عضو است وقتی ترتیب قرارگرفتن آن‌ها مهم است ($\underline{A}\ \underline{B}$ و $\underline{B}\ \underline{A}$ دو حالت محاسبه می‌شود و محل قرارگرفتن A و B مهم است.)

انتخاب r شیء از n شیء متمایز در صورتی که ترتیب یا جابه‌جایی آن‌ها مهم باشد، تبدیل r شیء از n شیء نامیده می‌شود $(r \le n)$ و تعداد این انتخاب‌ها برابر $\frac{n!}{(n-r)!}$ است و آن را با نماد $P(n,r)$ نمایش می‌دهند.

توجه: در استفاده از فرمول $\frac{n!}{(n-r)!}$ با یک مثال می‌توانید از مهم بودن یا نبودن ترتیب آن‌ها مطمئن شوید:

الف می‌خواهیم از یک کلاس ۱۰نفره دو نفر انتخاب کنیم. اول علی انتخاب شود و سپس حسن یا این‌که اول حسن انتخاب شود و سپس علی تفاوتی ندارد پس ترتیب قرارگرفتن آن‌ها مهم نیست.

ب می‌خواهیم از یک کلاس ۱۰نفره یک نفر نمایندهٔ ورزشی و یک نمایندهٔ تربیتی انتخاب کنیم.

علی نمایندهٔ ورزشی انتخاب شود و حسن نمایندهٔ تربیتی یا این‌که علی نمایندهٔ تربیتی انتخاب شود و حسن نمایندهٔ ورزشی تفاوت دارد، پس ترتیب قرارگرفتن آن‌ها مهم است.

مثال: تعداد حالت‌های انتخاب ۳ نفر از ۱۰ نفر برای سرگروهی رشته‌های ورزشی فوتبال، والیبال و بسکتبال را به دست آورید.

پاسخ: تعداد انتخاب‌های ۳ نفر از ۱۰ نفر را می‌خواهیم به دست آوریم. اگر ترتیب و جابه‌جایی در انتخاب‌ها مهم باشد می‌توانیم از فرمول $\frac{n!}{(n-r)!}$ استفاده کنیم. برای این‌که مهم بودن یا نبودن ترتیب و جابه‌جایی را مشخص کنیم، یک انتخاب فرضی از مسئله انجام می‌دهیم (اسامی فرضی هستند).

سرگروه فوتبال: علی سرگروه والیبال: قلی سرگروه بسکتبال: ولی	اعضای انتخابی را جابه‌جا می‌کنیم ←	سرگروه فوتبال: ولی سرگروه والیبال: علی سرگروه بسکتبال: قلی

با جابه‌جاکردن افراد انتخاب‌شده، انتخاب اولمان تغییر کرد، پس ترتیب و جابه‌جایی مهم است. برای به دست آوردن تعداد انتخاب‌ها با قراردادن $r=۳$ و $n=۱۰$ در رابطه داریم:

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}\xrightarrow[r=۳]{n=۱۰}P(۱۰,۳)=\frac{۱۰!}{(۱۰-۳)!}=\frac{۱۰!}{۷!}=\frac{\cancel{۷!}\times ۸\times ۹\times ۱۰}{\cancel{۷!}}=۷۲۰$$

مثال: در یک دورهٔ مسابقات شنا، بین ۱۲ نفر به چند طریق امکان انتخاب نفرات اول و دوم و سوم وجود دارد؟ (دو نفر نمی‌توانند هم‌زمان اول بشوند.)

پاسخ: در واقع هدف انتخاب ۳ نفر به عنوان اول، دوم و سوم از بین این ۱۲ نفر است.

نفر اول: علی نفر دوم: قلی نفر سوم: ولی	اعضای انتخابی را جابه‌جا می‌کنیم ←	نفر اول: ولی نفر دوم: علی نفر سوم: قلی

با جابه‌جاکردن افراد انتخاب‌شده، انتخاب اولمان تغییر کرد، پس ترتیب و جابه‌جایی مهم است؛ در نتیجه:

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}\xrightarrow[r=۳]{n=۱۲}P(۱۲,۳)=\frac{۱۲!}{(۱۲-۳)!}=\frac{۱۲!}{۹!}=\frac{\cancel{۹!}\times ۱۰\times ۱۱\times ۱۲}{\cancel{۹!}}=۱۳۲۰$$

مثال: برای این‌که ۱۶ تیم حاضر در لیگ برتر فوتبال به صورت رفت و برگشت با هم بازی کنند چند بازی باید انجام شود؟

پاسخ: برای به دست آوردن تعداد بازی‌ها، تعداد انتخاب‌های ۲تایی از این ۱۶ تیم را به دست می‌آوریم (بازی فوتبال بین دو تیم انجام می‌شود) بازی‌ها به صورت رفت و برگشت انجام می‌شود یعنی در انتخاب دو تیم میزبان یا مهمان بودن اهمیت دارد.

میزبان: پرسپولیس مهمان: استقلال	اعضای انتخابی را جابه‌جا می‌کنیم ←	میزبان: استقلال مهمان: پرسپولیس

با جابه‌جایی اعضای انتخابی، انتخاب اولمان تغییر کرد، پس ترتیب و جابه‌جایی مهم است؛ در نتیجه:

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}\xrightarrow[r=۲]{n=۱۶}P(۱۶,۲)=\frac{۱۶!}{(۱۶-۲)!}=\frac{۱۶!}{۱۴!}=\frac{\cancel{۱۴!}\times ۱۵\times ۱۶}{\cancel{۱۴!}}=۲۴۰$$

تعداد اعداد

در این قسمت روش‌های به دست آوردن تعداد اعداد با شرایط خاص را می‌آموزیم. این روش‌ها را به خوبی یاد بگیرید و به تفاوت‌هایی که در هر قسمت وجود دارد، خوب دقت کنید.

مثال: چند عدد سه‌رقمی با ارقام ۴، ۵ و ۶ می‌توان نوشت، در صورتی که:

الف) تکرار ارقام مجاز باشد. **ب) تکرار ارقام مجاز نباشد.**

پاسخ: برای به دست آوردن تعداد اعداد سه‌رقمی، سه جایگاه در نظر می‌گیریم و با ضرب‌کردن تعداد حالت‌های آن‌ها (اصل ضرب) تعداد اعداد را به دست می‌آوریم.

الف تکرار ارقام مجاز است؛ یعنی در هر کدام از جایگاه‌ها می‌توانیم هر سه رقم را قرار دهیم.

$\underset{۴,۵,۶}{\underline{۳}}\quad \underset{۴,۵,۶}{\underline{۳}}\quad \underset{۴,۵,۶}{\underline{۳}}$

با ضرب تعداد حالت‌ها در هم تعداد اعداد را به دست می‌آوریم:

$۳\times۳\times۳=۲۷$

ب **روش اول:** تکرار ارقام مجاز نیست، یعنی اگر رقمی در یکی از جایگاه‌ها قرار گرفت در جایگاه دیگر نمی‌تواند قرار بگیرد. از سمت چپ شروع می‌کنیم در جایگاه اول هر سه رقم می‌توانند قرار بگیرند، در جایگاه دوم دوتا از ارقام (یکی از ارقام در جایگاه قبلی قرار گرفت) و در جایگاه سوم یک رقم می‌توان قرار داد.

$\underline{۳}\quad \underline{۲}\quad \underline{۱}$

با ضرب‌کردن تعداد حالت‌ها داریم:

$۳\times۲\times۱=۶$

روش دوم: تعداد اعداد سه‌رقمی که با ارقام ۴، ۵ و ۶ بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت، برابر تعداد جایگشت‌های ۳تایی ۳ شیء متمایز است، در نتیجه:

$۳!=۶$

مثال: چند عدد سه‌رقمی با ارقام ۴، ۰ و ۵ می‌توان نوشت، در صورتی که:

الف) تکرار ارقام مجاز باشد. **ب) تکرار ارقام مجاز نباشد.**

پاسخ: **الف** تکرار ارقام مجاز است ولی رقم صفر را نمی‌توانیم در جایگاه صدگان قرار دهیم (عدد دورقمی می‌شود).

$\underline{۲}\quad \underline{۳}\quad \underline{۳}$ $\qquad ۲\times۳\times۳=۱۸$

ب تکرار ارقام مجاز نیست، در جایگاه صدگان رقم صفر را نمی‌توانیم قرار دهیم (۲ حالت)، در جایگاه دهگان نیز ۲ حالت (۴ یا ۵ در جایگاه صدگان قرار می‌گیرد، یکی را کنار بگذاریم با صفر می‌شود ۲ حالت) و در جایگاه آخر یک حالت خواهیم داشت:

$\underline{۲}\quad \underline{۲}\quad \underline{۱}$ $\qquad ۲\times۲\times۱=۴$

مثال: با استفاده از ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ چند عدد سه‌رقمی می‌توان نوشت؟

الف) تکرار ارقام مجاز است. **ب) تکرار ارقام مجاز نیست.**

پاسخ: **الف** در جایگاه صدگان نمی‌توان رقم صفر را قرار داد.

$\underline{۵}\quad \underline{۶}\quad \underline{۶}$ $\qquad ۵\times۶\times۶=۱۸۰$

ب تکرار ارقام مجاز نیست، برای جایگاه اول نمی‌توان صفر را قرار داد، پس ۵ حالت برای صدگان داریم. برای جایگاه دوم یعنی دهگان دوباره می‌توان صفر را نیز در نظر گرفت.

$\underline{۵}\quad \underline{۵}\quad \underline{۴}$ $\qquad ۵\times۵\times۴=۱۰۰$

مثال: با توجه به ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) چند عدد چهاررقمی می‌توان نوشت که رقم یکان آن ۳ باشد؟ (بدون تکرار ارقام)

ب) چند عدد چهاررقمی می‌توان نوشت که بزرگ‌تر از ۴۰۰۰ باشد؟ (بدون تکرار ارقام)

پ) چند عدد زوج چهاررقمی می‌توان نوشت؟ (تکرار ارقام مجاز است.)

ت) چند عدد زوج چهاررقمی می‌توان نوشت؟ (بدون تکرار ارقام)

پاسخ: **الف** رقم ۳ را در یکان قرار می‌دهیم. با گذاشتن رقم ۳ در یکان، ۵ رقم باقی می‌ماند، چون تکرار ارقام مجاز نیست در هر مرحله یک واحد از تعداد حالت‌ها کم می‌کنیم.

$\underline{۵}\quad \underline{۴}\quad \underline{۳}\quad \underset{۳}{\underline{۱}}$ $\qquad ۵\times۴\times۳\times۱=۶۰$

ب برای این‌که عدد چهاررقمی بزرگ‌تر از ۴۰۰۰ باشد، رقم یکان هزار عدد باید از رقم‌های ۴، ۵ و ۶ انتخاب شود.

$\underset{۴,۵,۶}{\underline{۳}}\quad \underline{۵}\quad \underline{۴}\quad \underline{۳}$

یکی از رقم‌های ۴، ۵ و ۶ در سمت چپ قرار می‌گیرد. چون عدد بدون رقم‌های تکراری است، رقم بعدی ۵ حالت و بعد از آن ۴ و آخری ۳ حالت خواهد داشت.

$۳\times۵\times۴\times۳=۱۸۰$

اگر توضیحات بالا کافی نبود ادامهٔ مطلب رو بخون!

برای این‌که عدد چهاررقمی بزرگ‌تر از ۴۰۰۰ باشد، رقم یکان هزار آن ۴ یا ۵ یا ۶ باید باشد.

$\underset{۴}{\underline{۱}}\quad \underline{۵}\quad \underline{۴}\quad \underline{۳}$ یا $\underset{۵}{\underline{۱}}\quad \underline{۵}\quad \underline{۴}\quad \underline{۳}$ یا $\underset{۶}{\underline{۱}}\quad \underline{۵}\quad \underline{۴}\quad \underline{۳}$

رقم سمت چپ ۴ — رقم سمت چپ ۵ — رقم سمت چپ ۶

هر کدام از حالت‌ها را به دست می‌آوریم و سپس با توجه به اصل جمع آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

$۱\times۵\times۴\times۳=۶۰$ $\qquad ۶۰+۶۰+۶۰=۱۸۰$

پ برای این‌که عدد چهاررقمی مورد نظر زوج باشد، رقم یکان آن باید ۲، ۴ و ۶ باشد.

$\underline{۶}\quad \underline{۶}\quad \underline{۶}\quad \underset{۲,۴,۶}{\underline{۳}}$

رقم‌ها تکراری هم می‌توانند باشند پس در سایر جایگاه‌ها ۶ حالت داریم.

$۶\times۶\times۶\times۳=۶۴۸$

ت رقم یکان مانند سؤال قبل ۳ حالت دارد و چون عدد بدون تکرار ارقام باید ساخته شود، سایر حالت‌ها را کامل می‌کنیم.

$\underline{۵}\quad \underline{۴}\quad \underline{۳}\quad \underset{۲,۴,۶}{\underline{۳}}$ $\qquad ۵\times۴\times۳\times۳=۱۸۰$

مثال: با داشتن ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) تعداد اعداد زوج سه‌رقمی با رقم‌های غیرتکراری را به دست آورید.

ب) تعداد مضارب سه‌رقمی ۵ با رقم‌های غیرتکراری را به دست آورید.

پاسخ: الف رقم یکان عدد مورد نظر ۰ یا ۲ یا ۴ باید باشد، چون رقم سمت چپ عدد نمی‌تواند برابر صفر باشد. دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

رقم یکان صفر باشد: $\underline{5}\ \underline{4}\ \underset{0}{\underline{1}}$

یا

رقم یکان ۲ یا ۴ باشد: $\underline{4}\ \underline{4}\ \underset{2,4}{\underline{2}}$

$4\times4\times2=32$ $\qquad$ $5\times4\times1=20$

و در آخر بنا بر اصل جمع تعداد حالت‌های هر کدام را با هم جمع می‌کنیم. $32+20=52$

ب مضارب ۵ دارای یکان صفر یا ۵ هستند و چون رقم صفر در سمت چپ عدد قرار نمی‌گیرد دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

رقم یکان ۵ باشد: $4\times4\times1=16$ $\qquad$ $\underline{4}\ \underline{4}\ \underset{5}{\underline{1}}$

یا

رقم یکان صفر باشد: $\underline{5}\ \underline{4}\ \underset{0}{\underline{1}}$

$5\times4\times1=20$

و در نهایت بنا بر اصل جمع تعداد حالت‌ها را با هم جمع می‌کنیم: $20+16=36$

سؤال‌های امتحانی

درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

۳۳- در جایگشت rتایی از n شیء متمایز جابه‌جایی اشیا اهمیت ندارد.

۳۴- تعداد جایگشت‌های rتایی n شیء متمایز برابر $\frac{n!}{(n-r)!}$ است.

جاهای خالی را کامل کنید.

۳۵- هر حالت از کنار هم قرارگرفتن ۵ شیء متمایز را یک .... از آن ۵ شیء می‌نامیم. *(نهایی شهریور ۱۴۰۰)*

۳۶- تعداد جایگشت‌های nتایی از n شیء متمایز برابر .... است. *(نهایی دی ۹۹ و خرداد ۱۴۰۰)*

۳۷- تعداد جایگشت‌های مختلف ۴ کتاب متمایز .... می‌باشند. *(نهایی دی ۱۴۰۱)*

۳۸- انتخاب r شیء از n شیء وقتی ترتیب و جابه‌جایی در انتخاب‌ها مهم باشد، .... r شیء از n شیء نامیده می‌شود.

۳۹- حاصل عبارت $P(2,2)$ برابر .... است. *(نهایی خرداد ۱۴۰۰)*

گزینهٔ صحیح را انتخاب کنید.

۴۰- چند عدد چهاررقمی با ارقام فرد و غیرتکراری می‌توان نوشت؟

۱) ۸۴ $\qquad$ ۲) ۹۶ $\qquad$ ۳) ۱۲۰ $\qquad$ ۴) ۱۵۰

۴۱- با حروف عبارت «ایران‌زمین» چند کلمهٔ ۹حرفی متمایز می‌توان نوشت؟

۱) $\frac{9!}{2!2!}$ $\qquad$ ۲) $\frac{9!}{2!2!2!}$ $\qquad$ ۳) $\frac{9!}{3!3!}$ $\qquad$ ۴) $\frac{9!}{3!3!3!}$

۴۲- ۵ شناگر A، B، C، D و E در یک مسابقه شرکت می‌کنند به شرطی که هیچ دو شناگری هم‌زمان به خط پایان نرسند، در چند حالت شناگر B دقیقاً بعد از شناگر C به خط پایان می‌رسد؟

۱) $4!$ $\qquad$ ۲) $5!$ $\qquad$ ۳) $2!4!$ $\qquad$ ۴) $2!5!$

۴۳- اگر $P(n,3)=7P(n-1,2)$ باشد، در این صورت مقدار n برابر کدام گزینه است؟

۱) ۵ $\qquad$ ۲) ۶ $\qquad$ ۳) ۷ $\qquad$ ۴) ۸

۴۴- با توجه به حروف انگلیسی A، B، C، D، E و F به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) تعداد کل جایگشت‌های این ۶ حرف را به دست آورید.

ب) تعداد جایگشت‌های ۶تایی که A و B کنار هم باشند را به دست آورید.

پ) تعداد جایگشت‌های ۶تایی که D دقیقاً بعد از C بیاید را به دست آورید.

۴۵- ۳ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم و ۴ دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم به چند طریق می‌توانند در یک صف بایستند به طوری که:

الف) دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم در کنار هم باشند.

ب) دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم در کنار هم و دانش‌آموزان پایهٔ دوازدهم در کنار هم باشند.

پ) دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم و پایهٔ دوازدهم یک‌درمیان در صف بایستند.

۴۶- با حروف کلمهٔ «برجام» و بدون تکرار حروف: (بامعنی یا بی‌معنی)

الف) چند کلمهٔ ۵حرفی می‌توان نوشت؟ ب) چند کلمهٔ ۴حرفی می‌توان نوشت؟

پ) چند کلمهٔ ۳حرفی می‌توان نوشت که به «م» ختم شود؟ ت) چند کلمهٔ ۴حرفی می‌توان نوشت که با «ب» شروع و به «ج» ختم شوند؟

۴۷- با حروف کلمهٔ «انسانی» چند کلمهٔ ۶حرفی متمایز می‌توان نوشت؟

۴۸- با حروف کلمهٔ «کوهستان» و بدون تکرار حروف: (بامعنی یا بی‌معنی) *(نهایی شهریور ۹۹ و شهریور ۱۴۰۲)*

الف) چند کلمهٔ ۷حرفی می‌توان نوشت؟

ب) چند کلمهٔ ۶حرفی می‌توان نوشت که با «ک» شروع و به «س» ختم شوند؟

۴۹- پلاک اتومبیل سری «ب» در تهران به صورت

تهران
* * ب * * *

می‌باشد که هر ستاره، نمایشگر یک عدد غیر صفر است. در سری «ب» و در تهران چند پلاک می‌توان ساخت که با رقم فرد شروع و به رقم زوج ختم شوند؟

۵۰- در یک لیگ فوتبال با ۱۴ تیم که بازی‌ها به صورت رفت و برگشت انجام می‌شود، چند بازی باید انجام شود؟

■ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

۵۱- $P(۶,۲)$ **۵۲-** $P(۴,۴)$ **۵۳-** $P(۵,۳)$

۵۴- با ارقام ۲، ۳، ۷، ۹، ۴ و ۸ چند عدد سه‌رقمی زوج، بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟ *(نهایی خرداد ۱۴۰۲)*

۵۵- با ارقام ۱,۲,۴,۷,۹ چند عدد سه‌رقمی فرد بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟ *(نهایی دی ۹۹)*

۵۶- به چند طریق می‌توان با ارقام ۱ تا ۷ عددی چهاررقمی ساخت؟ (تکرار ارقام مجاز نیست.) *(نهایی شهریور ۹۸)*

۵۷- ارقام ۱ تا ۹ مفروض است. (بدون تکرار ارقام)

الف) چند عدد ۵رقمی می‌توان نوشت؟ ب) چند عدد ۴رقمی زوج می‌توان نوشت؟ *(نهایی دی ۹۷)*

۵۸- با ارقام ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ و ۸ چند عدد سه‌رقمی و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت که:

الف) عدد زوج باشد. ب) عدد فرد باشد.

پ) عدد مضرب ۵ باشد. ت) عدد بزرگ‌تر از ۶۰۰ باشد.

۵۹- با ارقام صفر، ۱، ۲، ۳، ۵، ۷ و ۸ چند عدد چهاررقمی و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت که:

الف) عدد زوج باشد. ب) عدد فرد باشد.

پ) عدد مضرب ۵ باشد. ت) عدد بزرگ‌تر از ۶۰۰۰ باشد.

۶۰- یک پارکینگ دارای ۴ درب است. وقتی از یک درب وارد می‌شوید، باید از درب دیگری خارج شوید. به چند طریق حسن و علی می‌توانند از یک پارکینگ استفاده کنند، به طوری که آن‌ها درب ورودی و درب خروجی یکسانی نداشته باشند؟ *(برگرفته از کنکور سراسری)*

۶۱- یک فروشگاه دارای ۵ درب است. وقتی مشتری از یک درب وارد می‌شود، باید از درب دیگری خارج شود. زهرا و نازنین به چند طریق می‌توانند از این فروشگاه خرید کنند، به طوری که از درب ورودی و خروجی یکسانی استفاده نکرده باشند؟ *(برگرفته از کنکور سراسری)*

۶۲- شش وکیل و پنج موکل می‌خواهند دور یک میز بنشینند. این کار به چند طریق امکان‌پذیر است، اگر:

الف) هیچ شرطی وجود نداشته باشد؟ ب) هیچ دو موکلی کنار هم نباشند؟

پ) تمام موکل‌ها پیش هم باشند؟

۶۳- اگر A یک مجموعهٔ ۱۰عضوی باشد، در این صورت به چند طریق می‌توان زیرمجموعه‌های $A_۱$ و $A_۲$ را انتخاب کرد، به طوری که هیچ اشتراکی نداشته باشند؟

۶۴- اگر A یک مجموعهٔ هشت‌عضوی باشد، در این صورت به چند طریق می‌توان سه زیرمجموعهٔ $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ را انتخاب کرد، به طوری که $A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳ = \varnothing$ باشد؟

۶۵- چند تابع متمایز از مجموعهٔ $A = \{۱,۲,۳,۴,۵\}$ به مجموعهٔ $B = \{a,b,c\}$ می‌توان تعریف کرد؟

بخش ۳: ترکیب rتایی از nشیء

می‌خواهیم از یک کلاس ۱۵نفره دو نفر انتخاب کنیم که ترتیب یا جابه‌جایی در انتخاب‌ها مهم نباشد. برای مثال در انتخاب‌هایمان اگر علی و سپس محمد انتخاب شود با این‌که اول محمد و سپس علی انتخاب شود فرقی ندارد. در این مثال، تعداد انتخاب‌های ۲ نفر از ۱۵ نفر که ترتیب یا جابه‌جایی در انتخاب‌ها مهم نباشد، ترکیب ۲تا از ۱۵تا نامیده می‌شود.

تعداد انتخاب‌های r شیء از n شیء در صورتی که ترتیب یا جابه‌جایی اشیا در انتخاب‌ها مهم نباشد، ترکیب r شیء از n شیء نامیده می‌شود. $(r \le n)$

و برابر $\frac{n!}{(n-r)!\,r!}$ است و آن را با نماد C_r^n یا $\binom{n}{r}$ نمایش می‌دهیم.

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

ردیف	آزمون جمع‌بندی فصل اول	مدت امتحان: ۹۰ دقیقه	Kheilisabz.com	نمره

۱ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. (نمره: ۱)

الف) طبق قرارداد $0! = 0$ است.

ب) معیارهایی مانند میانگین و میانه به ما کمک می‌کند بدانیم داده‌ها در کجا متمرکزند.

پ) برای توصیف داده‌های کیفی گزارش درصد باید همیشه با گزارش تعداد همراه باشد.

ت) مرتب‌کردن داده‌ها در گام سوم چرخهٔ آمار اتفاق می‌افتد.

۲ جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب کامل کنید. (نمره: ۱)

الف) هر چه پراکندگی داده‌ها بیشتر باشد، برای اطمینان از تنوع در نمونه به اندازهٔ نمونه .... نیاز داریم.

ب) نمودار .... بهتر نشان می‌دهد داده‌ها در کجا متراکم‌تر و در کجا پراکنده‌ترند.

پ) اگر در بین داده‌ها، دادهٔ دورافتاده داشته باشیم بهتر است از معیار گرایش به مرکز .... استفاده کنیم.

ت) اگر اشتراک دو پیشامد A و B تهی باشد، دو پیشامد A و B را .... می‌گوییم.

۳ گزینهٔ صحیح را انتخاب کنید. (نمره: ۱)

الف) از بین ۷ مرد و ۴ کارمند زن که در یک شرکت کار می‌کنند، به چند طریق می‌توان سه نفر انتخاب کرد که حداقل یکی از آن‌ها زن باشد؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۳۰ ۳) ۱۳۵ ۴) ۱۴۰

ب) با حروف کلمهٔ «شاهرود» چند کلمهٔ شش‌حرفی می‌توان نوشت که دقیقاً حرف «ر» بعد از «و» بیاید؟

۱) $4!2!$ ۲) $5!2!$ ۳) $4!$ ۴) $5!$

پ) اگر $\frac{1}{24} = \frac{C(n,n-2)}{P(n,n-2)}$ باشد، در این صورت مقدار n برابر کدام گزینه است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

ت) اصطلاحات «نقد و بررسی» و «ایده‌های جدید» مربوط به کدام گام از چرخهٔ مسائل آمار است؟

۱) تحلیل داده‌ها ۲) بحث و نتیجه‌گیری ۳) طرح و برنامه‌ریزی ۴) بیان مسئله

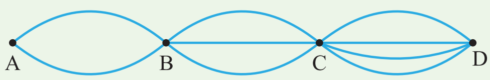
۴ در هر قسمت نام گام و ترتیب آن را مشخص کنید. (نمره: ۱/۵)

الف) اندازه‌گیری یا سنجش، برای یافتن داده‌ها و بررسی متغیر مورد نظر:

ب) طرح یک پرسش دقیق و شفاف:

پ) گزارش معیارها و استفاده از نمودارها و نتایج آماری:

۵ شکل زیر مسیرهای دوطرفه بین شهرهای A، B، C و D را نمایش می‌دهد، فردی می‌خواهد از شهر A به شهر D برود و برگردد به طوری که در مسیر برگشت، از راه‌هایی که رفته استفاده نکند. او به چند حالت می‌تواند این کار را انجام دهد؟ (نمره: ۱/۵)



۶ علی و رضا و ۵ نفر از دوستانشان می‌خواهند در یک صف بایستند. آن‌ها به چند طریق می‌توانند در این صف بایستند به طوری که رضا و علی کنار هم نباشند؟ (نمره: ۱)

۷ با توجه به مجموعهٔ $A = \{a,b,c,d,e,f,g\}$ به سؤالات پاسخ دهید. (نمره: ۱/۲۵)

الف) مجموعهٔ A چند زیرمجموعهٔ ۳عضوی دارد؟

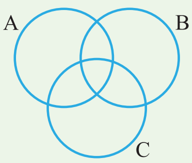
ب) مجموعهٔ A چند زیرمجموعهٔ ۵عضوی شامل عضو a دارد؟

۸ با ارقام ۰،۲،۳،۵،۸ چند عدد چهاررقمی مضرب ۵ بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟ (نمره: ۰/۷۵)

۹ چند عدد چهاررقمی با ارقام متمایز غیر صفر می‌توان نوشت که دو رقم آن زوج و دو رقم آن فرد باشد؟ (نمره: ۰/۷۵)

۱۰ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید. (نمره: ۱/۵)

الف) $\binom{10}{7}$ ب) $\frac{5!}{3!}$ پ) $P(5,4)$

۱۱	اگر $C(n,۸) = ۲C(n,۷)$ باشد، مقدار n را به دست آورید.	۱
۱۲	چند تابع متمایز می‌توان از $A = \{۱,۲,۳,۴\}$ به تابع $B = \{a,b,c\}$ نوشت؟	۰/۷۵
۱۳	از یک کلاس ۱۰نفره به چند طریق می‌توان: الف) سه دانش‌آموز انتخاب کرد. ب) یک نمایندهٔ انضباطی و یک نمایندهٔ ورزشی انتخاب کرد.	۱
۱۴	در پرتاب دو تاس چه‌قدر احتمال دارد حاصل‌ضرب دو تاس حداکثر برابر ۲۵ باشد؟	۱
۱۵	در پرتاب یک سکه و یک تاس با هم: الف) فضای نمونهٔ این پدیدهٔ تصادفی را بنویسید. ب) احتمال این‌که سکه «رو» و تاس مضرب ۳ بیاید را محاسبه کنید.	۱/۵
۱۶	از کیسه‌ای شامل ۵ مهرهٔ قرمز، ۴ مهرهٔ آبی و ۳ مهرهٔ سبز می‌خواهیم سه مهره خارج کنیم، چه‌قدر احتمال دارد: الف) حداقل یک مهرهٔ قرمز داشته باشیم؟ ب) رنگ سه مهره متفاوت باشد؟	۱/۵
۱۷	در نمودار روبه‌رو، پیشامدی که A و C رخ دهند، ولی پیشامد B رخ ندهد را هاشور بزنید.  	۰/۵
۱۸	در یک خانواده با سه فرزند، چه‌قدر احتمال دارد حداقل یک پسر داشته باشند؟	۰/۷۵
۱۹	در بررسی کدام‌یک از موارد زیر نیاز به اندازهٔ نمونهٔ بزرگ‌تری داریم؟ چرا؟ الف) سن دانش‌آموزان یک کلاس ب) معدل دانش‌آموزان یک کلاس	۰/۷۵
	جمع نمرات	۲۰

پاسخ سؤال‌های امتحانی

۱. درست

۲. نادرست

$$\frac{۸!}{۴!}=\frac{\cancel{۱}\times\cancel{۲}\times\cancel{۳}\times\cancel{۴}\times ۵\times ۶\times ۷\times ۸}{\cancel{۱}\times\cancel{۲}\times\cancel{۳}\times\cancel{۴}}=۵\times ۶\times ۷\times ۸$$

۳. $m+n$ (اصل جمع) **۴.** $m\times n$ (اصل ضرب)

۵. ۱

۶. ۱ $\frac{۰!}{۱!}=\frac{۱}{۱}=۱$

۷. ۱۲۰ $\frac{۶!}{۳!}=۴\times ۵\times ۶=۱۲۰$

۸. **الف** یک نوع غذا و یک نوع دسر: بنا بر اصل ضرب تعداد غذاها را در تعداد دسرها ضرب می‌کنیم («و» اصل ضرب): $۴\times ۲=۸$

ب یک نوع سالاد یا یک نوع دسر: بنا بر اصل جمع تعداد سالادها را با تعداد دسرها جمع می‌کنیم («یا» اصل جمع): $۳+۲=۵$

پ یک نوع غذا و یک نوع سالاد و یک نوع دسر: بنا بر اصل ضرب تعداد هر کدام را در هم ضرب می‌کنیم: $۴\times ۳\times ۲=۲۴$

ت یک نوع غذا یا یک نوع سالاد یا یک نوع دسر: بنا بر اصل جمع تعداد هر کدام را با هم جمع می‌کنیم: $۴+۳+۲=۹$

ث

$$\underbrace{\underbrace{\text{یک نوع غذا و یک نوع سالاد}}_{\text{اصل ضرب } ۴\times ۳=۱۲}\ \text{یا}\ \underbrace{\text{یک نوع غذا و یک نوع دسر}}_{\text{اصل ضرب } ۴\times ۲=۸}}_{\text{اصل جمع } ۸+۱۲=۲۰}$$

ج

$$\underbrace{\underbrace{\text{یک نوع غذا یا یک نوع سالاد}}_{\text{اصل جمع } ۴+۳=۷}\ \text{و}\ \underbrace{\text{یک نوع غذا یا یک نوع دسر}}_{\text{اصل جمع } ۴+۲=۶}}_{\text{اصل ضرب } ۶\times ۷=۴۲}$$

۹. **الف** برای پاسخ‌دادن به ۳ سؤال دوگزینه‌ای برای هر سؤال ۲ حالت وجود دارد (پاسخ به سؤالات اجباری است) و چون سؤالات مرحله‌به‌مرحله پاسخ داده می‌شود، بنا بر اصل ضرب به $۸=۲\times ۲\times ۲$ حالت می‌توان به این سؤالات پاسخ داد.

ب برای پاسخ‌دادن به ۳ سؤال چهارگزینه‌ای برای هر سؤال چهار حالت وجود دارد و چون پاسخ به سؤالات مرحله‌به‌مرحله انجام می‌شود بنا بر اصل ضرب $۶۴=۴\times ۴\times ۴$ حالت برای پاسخگویی به این سؤالات وجود دارد.

پ برای پاسخ‌دادن به قسمت اول «یا» قسمت دوم (پاسخ‌دادن به یکی از دو قسمت) بنا بر اصل جمع تعداد حالت‌های قسمت اول و قسمت دوم را با هم جمع می‌کنیم: $۸+۶۴=۷۲$

ت برای پاسخ‌دادن به قسمت اول و قسمت دوم (به هر دو قسمت) بنا بر اصل ضرب تعداد حالت‌های قسمت اول را در تعداد حالت‌های قسمت دوم ضرب می‌کنیم: $۸\times ۶۴=۵۱۲$

۱۰. علی ۳ انتخاب برای کتاب علمی و ۴ انتخاب برای کتاب داستانی دارد و با توجه به این‌که می‌خواهد یک کتاب علمی «و» یک کتاب داستانی به دوستش هدیه دهد، بنا بر اصل ضرب، به $۱۲=۴\times ۳$ طریق می‌تواند این کار را انجام دهد.

۱۱. **الف** با توجه به این‌که انتخاب یک کتاب از میان این کتاب‌ها به طور هم‌زمان اتفاق نمی‌افتد (هم‌زمان کتاب ریاضی و کتاب عربی انتخاب نمی‌شود) با توجه به اصل جمع $۹=۴+۲+۳$ حالت برای انتخاب یک کتاب وجود دارد.

ب انتخاب کتاب‌ها مرحله‌به‌مرحله اتفاق می‌افتد. اول کتاب ریاضی و بعد کتاب عربی و سپس کتاب ادبیات، پس با توجه به اصل ضرب $۲۴=۴\times ۲\times ۳$ طریق می‌تواند این کتاب‌ها را انتخاب کند.

۱۲. با توجه به این‌که از شهر B نباید عبور کنیم برای راحتی کار می‌توانیم شهر B و مسیرهای مربوط به آن را حذف کنیم. بعد از حذف‌کردن شهر B، از A به C سه مسیر و از A به D چهار مسیر وجود دارد. پس طبق اصل ضرب این سفر به $۱۲=۴\times ۳$ طریق امکان‌پذیر است.

۱۳. از A به C با عبور از B: $۳\times ۴=۱۲$

از A به C با عبور از D: $۳\times ۲=۶$

برای رفتن از شهر A به شهر C باید از شهر B «یا» (اصل جمع) شهر D گذشت.

$۱۲+۶=۱۸$

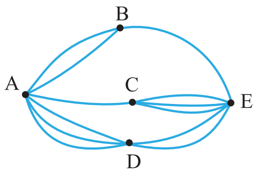
۱۴. A به E با گذشتن از B: $۳\times ۲=۶$

A به E با گذشتن از C: $۲\times ۴=۸$

A به E با گذشتن از D: $۴\times ۳=۱۲$

برای رفتن از شهر A به شهر E باید از شهر B «یا» C «یا» D عبور کرد، در نتیجه با توجه به اصل جمع داریم: $۶+۸+۱۲=۲۶$

۱۵. برای بازگشت از شهر E به A به طوری که از مسیر رفت برنگردیم، باید یک مسیر از مسیرهای بین دو شهر را کم کنیم. (مسیر رفت)



از E به A با گذشتن از B: $۱\times ۲=۲$

از E به A با گذشتن از C: $۳\times ۱=۳$

از E به A با گذشتن از D: $۲\times ۳=۶$

در آخر بنا بر اصل جمع $۱۱=۶+۳+۲$ مسیر برای بازگشتن از شهر E به A بدون استفاده از مسیرهای رفت وجود دارد.

۱۶. برای سفر از شهر A به D باید از شهر B «یا» C عبور کنیم. تعداد مسیرها از شهر A به D با گذشتن از B برابر $۱۲=۴\times ۳$ است. در نتیجه:

$۲۷-۱۲=۱۵$

یعنی ۱۵ مسیر از A به D با گذشتن از C وجود دارد؛ پس: $۵\times ۳=۱۵$

یعنی ۵ مسیر از A به C وجود دارد.

۱۷. $۵!=۱\times ۲\times ۳\times ۴\times ۵=۱۲۰$

۱۸. $۳!-۲!=۶-۲=۴$

۱۹. $\frac{۵!}{۳!}=\frac{\cancel{۳!}\times ۴\times ۵}{\cancel{۳!}}=۲۰$

۲۰. $(۶-۳)!=۳!=۶$

۲۱. $\frac{۷!}{(۷-۳)!\,۳!}=\frac{۷!}{۴!\,۳!}=\frac{\cancel{۴!}\times ۵\times \cancel{۶}\times ۷}{\cancel{۴!}\times ۱\times \cancel{۲}\times \cancel{۳}}=۳۵$

۲۲. $\frac{۱۳!}{(۱۳-۴)!\,۴!}=\frac{۱۳!}{۹!\,۴!}=\frac{\cancel{۹!}\times \cancel{۱۰}\times ۱۱\times \cancel{۱۲}\times ۱۳}{\cancel{۹!}\times ۱\times \cancel{۲}\times \cancel{۳}\times \cancel{۴}}=۷۱۵$

۲۳. $\frac{۱۵!+۱۴!}{۱۴!}=\frac{۱۵\times ۱۴!+۱۴!}{۱۴!}=\frac{\cancel{۱۴!}(۱۵+۱)}{\cancel{۱۴!}}=۱۶$

۲۴. $۷!+۵!=۷\times ۶\times ۵!+۵!=۵!(۴۲+۱)$

$=۵!\times ۴۳=۱۲۰\times ۴۳=۵۱۶۰$

۲۵. $\frac{(m+۲)!}{(m+۱)!}=\frac{\cancel{(m+۱)!}\,(m+۲)}{\cancel{(m+۱)!}}=m+۲$

۲۶. $\frac{(n-۲)!}{(n+۱)!}=\frac{\cancel{(n-۲)!}}{(n+۱)n(n-۱)\cancel{(n-۲)!}}$

$=\frac{۱}{n(n-۱)(n+۱)}$

۲۷. $\frac{(n+۱)!}{(n-۱)!}\times\frac{(n-۲)!}{n!}=\frac{\cancel{n!}(n+۱)}{\cancel{(n-۲)!}(n-۱)}\times\frac{\cancel{(n-۲)!}}{\cancel{n!}}=\frac{n+۱}{n-۱}$

۲۸. با توجه به این‌که $0!$ و $1!$ برابر ۱ هستند، در نتیجه $(x^2-8)!$ را یک بار برابر صفر و یک بار برابر یک قرار می‌دهیم:

$x^2-8=0 \Rightarrow x^2=8 \Rightarrow x=+\sqrt{8}$ یا $x=-\sqrt{8}$

$x^2-8=1 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=+3$ یا $x=-3$

در نتیجه این معادله دارای ۴ ریشه است.

۲۹. m و n دو عدد طبیعی هستند و بیشترین مقدار برای $m!+n!$ زمانی اتفاق می‌افتد که یکی برابر یک و دیگری برابر ۶ باشد $(m+n=7)$.

$m!+n!=6!+1!=720+1=721$

۳۰.

$$\frac{(n-2)!}{(n-3)!}=\frac{\cancel{(n-3)!}(n-2)}{\cancel{(n-3)!}}=12$$

$$\Rightarrow n-2=12 \Rightarrow n=14$$

۳۱.

$$\frac{(n+1)!}{6!}=\frac{n!}{4!} \xrightarrow{\text{طرفین‌وسطین}} 4!(n+1)!=6!n!$$

$$\Rightarrow \cancel{4!}\,\cancel{n!}(n+1)=\cancel{4!}\times 5\times 6\times \cancel{n!}$$

$$\Rightarrow n+1=30 \Rightarrow n=29$$

۳۲.

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!}-3n=48$$

$$\frac{\cancel{(n-1)!}\,n(n+1)}{\cancel{(n-1)!}}-3n=48$$

$$\Rightarrow n^2+n-3n-48=0 \Rightarrow n^2-2n-48=0$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد جمله‌مشترک}} (n-8)(n+6)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n-8=0 \Rightarrow n=8 \\ n+6=0 \Rightarrow n=-6 \end{cases}$$

$n=-6$ غیر قابل قبول است، چون نماد فاکتوریل برای اعداد منفی تعریف‌نشده است.

۳۳. نادرست؛ در جایگشت، ترتیب و جابه‌جایی اشیا مهم است.

۳۴. درست **۳۵.** جایگشت

۳۶. $n!$ **۳۷.** $4!$

۳۸. تبدیل

۳۹. ۲

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!} \Rightarrow P(2,2)=\frac{2!}{(2-2)!}=\frac{2!}{0!}=\frac{1\times 2}{1}=2$$

۴۰. **۳** برای نوشتن عدد چهاررقمی، چهار جایگاه برای ۵ رقم فرد قرار می‌دهیم:

$\underline{5}\ \underline{4}\ \underline{3}\ \underline{2}$

و با ضرب‌کردن تعداد حالت‌ها در هم داریم: $5\times4\times3\times2=120$

۴۱. **۲** کلمهٔ «ایران‌زمین» از نه حرف تشکیل شده ولی حرف‌های «الف» دو بار، «ی» دو بار و «ن» دو بار در این کلمه تکرار شده‌اند. در نتیجه تعداد کلمات نه‌حرفی برابر خواهد بود با:

$$\frac{9!}{2!2!2!}$$

۴۲. **۱** B را دقیقاً بعد از C در یک بسته قرار می‌دهیم و همراه سه شناگر دیگر تعداد جایگشت‌ها برابر $4!$ خواهد بود.

۴۳. **۳**

$$p(n,3)=7p(n-1,2)$$

$$\frac{n!}{(n-3)!}=7\times\frac{(n-1)!}{(n-1-2)!}$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{(n-3)!}\,(n-2)(n-1)n}{\cancel{(n-3)!}}=\frac{7\times\cancel{(n-3)!}(n-2)(n-1)}{\cancel{(n-3)!}}$$

$$\cancel{(n-2)}\,\cancel{(n-1)}n=7\cancel{(n-2)}\,\cancel{(n-1)} \Rightarrow n=7$$

۴۴. **الف** تعداد کل جایگشت‌های این ۶ حرف برابر $6!$ است.

$6!=1\times2\times3\times4\times5\times6=720$

ب $\boxed{AB}\ C\ D\ E\ F$

A و B را در یک بسته قرار می‌دهیم. تعداد جایگشت‌های این بسته با چهار حرف دیگر برابر $5!$ و چون A و B در داخل بسته می‌توانند جابه‌جا شوند، $5!$ را در $2!$ ضرب می‌کنیم.

$5!\times2!=120\times2=240$

پ $A\ B\ \boxed{CD}\ E\ F$

C و D را در داخل یک بسته قرار می‌دهیم، تعداد جایگشت‌های این بسته با چهار حرف دیگر برابر $5!$ است چون در صورت سؤال گفته شده D دقیقاً بعد از C بیاید اعضای داخل بسته امکان جابه‌جایی ندارند؛ پس تعداد این جایگشت‌ها برابر $5!$ است.

$5!=120$

۴۵. دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم را با E_1,E_2,E_3 و دانش‌آموزان پایهٔ دوازدهم را با T_1,T_2,T_3,T_4 نمایش می‌دهیم.

الف $\boxed{E_1E_2E_3}\quad T_4,T_3,T_2,T_1$

دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم را در یک بسته قرار می‌دهیم. تعداد جایگشت‌های این بسته و چهار عضو دیگر برابر $5!$ است و جایگشت‌های اعضای داخل بسته هم برابر $3!$ است. در نتیجه تعداد حالت‌های صف‌ایستادن این دانش‌آموزان به طوری که دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم کنار هم باشند برابر است با:

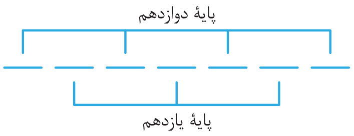
$5!\times3!=120\times6=720$

ب $\boxed{E_1E_2E_3}\ \boxed{T_4,T_3,T_2,T_1}$

دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم و دوازدهم را به طور جداگانه در داخل بسته قرار می‌دهیم، تعداد جایگشت‌های این دو بسته برابر $2!$ است و جایگشت‌های بسته مربوط به دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم برابر $3!$ و پایهٔ دوازدهم برابر $4!$ است؛ در نتیجه:

$2!\times3!\times4!=2\times6\times24=288$

پ جایگشت‌های مربوط به دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم برابر $3!$ و جایگشت‌های مربوط به دانش‌آموزان پایهٔ دوازدهم برابر $4!$ است؛ در نتیجه:



$3!\times4!=6\times24=144$

۴۶. کلمهٔ برجام از پنج حرف متمایز «ب»، «ر»، «ج»، «ا» و «م» تشکیل شده است.

الف تعداد کلمه‌های پنج‌حرفی که با این ۵ حرف متمایز می‌توان نوشت برابر $5!$ است.

$5!=120$

ب **روش اول:** انتخاب ۴ شیء از بین ۵ شیء که ترتیب قرارگرفتن آن‌ها مهم است.

$$P(5,4)=\frac{5!}{(5-4)!}=\frac{5!}{1!}=5!=120$$

روش دوم: برای کلمهٔ چهارحرفی چهار جایگاه قرار می‌دهیم.

$\underline{5}\ \underline{4}\ \underline{3}\ \underline{2}\qquad 5\times4\times3\times2=120$

پ **روش اول:** برای به دست آوردن تعداد کلمات سه‌حرفی که به «م» ختم می‌شوند، تعداد انتخاب‌های ۲تا از ۴ حرف که ترتیب قرارگرفتن آن‌ها اهمیت دارد را به دست می‌آوریم.

$$P(4,2)=\frac{4!}{(4-2)!}=\frac{4!}{2!}=\frac{\cancel{2!}\times3\times4}{\cancel{2!}}=12$$

روش دوم: سه جایگاه برای کلمات ۳حرفی قرار می‌دهیم و حرف «م» را در آخر کلمه قرار می‌دهیم.

$\underset{م}{\underline{1}}\ \underline{3}\ \underline{4}\qquad 1\times3\times4=12$

ت **روش اول:** برای به دست آوردن تعداد کلمات ۴حرفی که با «ب» شروع و به «ج» ختم شوند، تعداد انتخاب‌های ۲ حرف از ۳ حرف که ترتیب قرارگرفتن آن‌ها اهمیت دارد را محاسبه می‌کنیم.

$$P(3,2)=\frac{3!}{(3-2)!}=\frac{3!}{1!}=6$$

روش دوم: بـرای هر حرف یک جایگاه و در کل چهـار جایگاه قرار می‌دهیم. حرف «ب» را در اول و حرف «ج» را در آخر آن می‌گذاریم:

$\underset{ج}{\underline{۱}}\ \underline{۲}\ \underline{۳}\ \underset{ب}{\underline{۱}} \qquad ۲\times۳=۶$

۴۷. کلمهٔ «انسانی» از ۶ حرف تشکیل شده است که حرف «الف» دو بار و حرف «ن» نیز دو بار در آن تکرار شده است، پس !۶ را دو بار بر !۲ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{۶!}{۲!۲!}=\frac{\cancel{۲!}\times۳\times۴\times۵\times\overset{۳}{\cancel{۶}}}{\cancel{۲!}\times۱\times\underset{۱}{\cancel{۲}}}=۱۸۰$$

۴۸. **الف** کلمهٔ کوهستان از ۷ حرف تشکیل شده؛ پس تعداد کلمات ۷حرفی که می‌توان با آن ساخت برابر !۷ است.

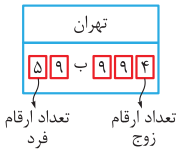
$۷!=۱\times۲\times۳\times۴\times۵\times۶\times۷=۵۰۴۰$

ب ۶ جایگاه در نظر می‌گیریم و حرف «ک» را اول و حرف «س» را انتهای آن قرار می‌دهیم و تعداد حالت‌های هر کدام از جایگاه‌ها را مشخص می‌کنیم و تعداد حالت‌ها را در هم ضرب می‌کنیم:

$\underline{س}\ \underline{۲}\ \underline{۳}\ \underline{۴}\ \underline{۵}\ \underline{ک} \qquad ۵\times۴\times۳\times۲=۱۲۰$

۴۹. در اولین جایگاه سمت چپ رقم فرد قرار می‌گیرد؛ پس تعداد حالت‌ها برابر ۵ $(۱,۳,۵,۷,۹)$ است و در جایگاه سمت راست رقم زوج قرار می‌گیرد، پس تعداد حالت‌ها برابر ۴ $(۲,۴,۶,۸)$ است.

در سه جایگاه دیگر هر کدام از ۹ رقم ۱ تا ۹ را می‌توان قرار داد. در نتیجه داریم:



تعداد پلاک‌ها با این ویژگی $=۵\times۹\times۹\times۹\times۴=۱۴۵۸۰$

۵۰. برای به دست آوردن تعداد بازی‌ها ۲ تیم از ۱۴ تیم انتخاب می‌کنیم و چون بازی‌ها به صورت رفت و برگشت است ترتیب قرار گرفتن آن‌ها اهمیت دارد (جایگشت).

$$P(۱۴,۲)=\frac{۱۴!}{(۱۴-۲)!}=\frac{۱۴!}{۱۲!}=\frac{\overset{۱}{\cancel{۱۲!}}\times۱۳\times۱۴}{\underset{۱}{\cancel{۱۲!}}}=۱۸۲$$

در بازی‌هایی که به صورت رفت و برگشتی انجام می‌شود میزبان یا مهمان بودن تیم فرق می‌کند. (جایگشت ۲تایی از ۱۴تا)

۵۱.

$$P(۶,۲)=\frac{۶!}{(۶-۲)!}=\frac{۶!}{۴!}=\frac{\cancel{۴!}\times۵\times۶}{\cancel{۴!}}=۳۰$$

۵۲.

$$P(۴,۴)=\frac{۴!}{(۴-۴)!}=\frac{۴!}{۰!}=\frac{۴!}{۱}=۴!=۱\times۲\times۳\times۴=۲۴$$

۵۳.

$$P(۵,۳)=\frac{۵!}{(۵-۳)!}=\frac{۵!}{۲!}=\frac{\overset{۱}{\cancel{۲!}}\times۳\times۴\times۵}{\underset{۱}{\cancel{۲!}}}=۶۰$$

۵۴. برای ساختن اعداد سه‌رقمی زوج سه جایگاه قرار می‌دهیم. در یکان این عدد یکی از سه رقم زوج (۲، ۴ و ۸) قرار می‌گیرد و در جایگاه صدگان آن ۵ رقم (یکی از شش رقم در یکان قرار گرفته.) و در جایگاه صدگان ۴ رقم می‌تواند قرار بگیرد.

$\underset{۵}{\underline{\quad}}\ \underset{۴}{\underline{\quad}}\ \underset{۳}{\underline{(۲,۴,۸)}} \qquad ۵\times۴\times۳=۶۰$

۵۵. ۵ رقم داریم و سه جایگاه، چون باید عدد مورد نظر فرد باشد در جایگاه یکان سه رقم ۱، ۷ و ۹ را می‌توان قرار داد. چون یکی از رقم‌های ۱، ۷ و ۹ برای یکان انتخاب شدند برای جایگاه صدگان ۴ حالت و برای جایگاه دهگان سه حالت خواهیم داشت.

$\underline{۴}\ \underline{۳}\ \underset{(۱,۷,۹)}{\underline{۳}} \qquad ۴\times۳\times۳=۳۶$

۵۶. ۷ رقم داریم و ۴ جایگاه، چون عدد با ارقام غیرتکراری است هر جایگاه یک حالت کم می‌شود.

$\underline{۷}\ \underline{۶}\ \underline{۵}\ \underline{۴} \qquad ۷\times۶\times۵\times۴=۸۴۰$

۵۷. **الف** ۹ رقم داریم و ۵ جایگاه، در هر حالت به دلیل تکراری‌نبودن ارقام یک حالت کم می‌کنیم.

$\underline{۹}\ \underline{۸}\ \underline{۷}\ \underline{۶}\ \underline{۵} \qquad ۹\times۸\times۷\times۶\times۵=۱۵۱۲۰$

ب چهار جایگاه در نظر می‌گیریم. چون عدد مورد نظر زوج است پس در جایگاه یکان ۴ حالت خواهیم داشت (۲، ۴، ۶ و ۸)، همچنین با توجه به انتخاب‌شدن جایگاه یکان تعداد حالت‌های یکان هزار ۸، صدگان ۷ و دهگان ۶ خواهد بود.

$\underline{۸}\ \underline{۷}\ \underline{۶}\ \underset{(۲,۴,۶,۸)}{\underline{۴}} \qquad ۸\times۷\times۶\times۴=۱۳۴۴$

۵۸. **الف** ۶ رقم داریم و سه جایگاه، چون باید عدد زوج باشد در جایگاه یکان سه حالت در نظر می‌گیریم.

$\underline{۵}\ \underline{۴}\ \underset{۴,۶,۸}{\underline{۳}} \qquad ۵\times۴\times۳=۶۰$

ب چون عدد فرد است، سه حالت برای جایگاه یکان خواهیم داشت (سه رقم ۳ و ۵ و ۷ در یکان).

$\underline{۵}\ \underline{۴}\ \underset{(۳,۵,۷)}{\underline{۳}} \qquad ۵\times۴\times۳=۶۰$

پ رقم یکان مضارب ۵ برابر صفر یا ۵ است. چون در بین ارقام فقط ۵ را داریم، در جایگاه یکان قرار می‌دهیم. ۶ رقم داریم و سه جایگاه، رقم ۵ برای یکان انتخاب شد پس ۵ حالت برای صدگان و ۴ حالت برای دهگان داریم:

$\underline{۵}\ \underline{۴}\ \underset{۵}{\underline{۱}} \qquad ۵\times۴\times۱=۲۰$

ت برای این‌که عدد مورد نظر از ۶۰۰ بزرگ‌تر باشد، برای جایگاه صدگان رقم‌های ۶ و ۷ و ۸ را می‌توان قرار داد. (سه حالت)

$\underset{(۶,۷,۸)}{\underline{۳}}\ \underline{۵}\ \underline{۴} \qquad ۳\times۵\times۴=۶۰$

۵۹. با توجه به این‌که صفر را در سمت چپ عدد نمی‌توان قرار داد، اگر در بین رقم‌ها، رقم صفر را داشته باشیم، بهتر است آن را جداگانه بررسی کنیم.

الف ۷ رقم داریم و ۴ جایگاه، چون عدد باید زوج باشد رقم یکان آن باید صفر یا ۲ یا ۸ باشد. ۲ و ۸ را با هم و صفر را جداگانه محاسبه می‌کنیم:

$\underline{۵}\ \underline{۵}\ \underline{۴}\ \underset{۲,۸}{\underline{۲}}$ یا $\underline{۶}\ \underline{۵}\ \underline{۴}\ \underset{۰}{\underline{۱}}$

$۵\times۵\times۴\times۲+۶\times۵\times۴\times۱=۲۰۰+۱۲۰=۳۲۰$

توجه کنید در حالتی که ۲ یا ۸ در رقم یکان قرار می‌گیرد، یکی از رقم‌ها انتخاب شده و چون در جایگاه یکان هزار (سمت چپ عدد) نمی‌توان صفر را قرار داد ۵ حالت خواهیم داشت و در جایگاه بعدی با توجه به اضافه‌شدن صفر دوباره ۵ حالت خواهیم داشت.

ب چون عدد فرد است رقم یکان عدد مورد نظر باید ۱، ۳، ۵ و ۷ باشد.

$\underline{۵}\ \underline{۵}\ \underline{۴}\ \underset{(۱,۳,۵,۷)}{\underline{۴}} \qquad ۵\times۵\times۴\times۴=۴۰۰$

۷ رقم داریم که یکی از آن‌ها در رقم یکان قرار گرفته، صفر را نیز نمی‌توان در سمت چپ عدد قرار داد پس در جایگاه یکان هزار ۵ حالت و در جایگاه بعدی نیز ۵ حالت خواهیم داشت.

پ رقم یکان مضارب ۵، صفر یا ۵ است. با توجه به ویژگی خاص صفر که نمی‌تواند سمت چپ عدد قرار بگیرد آن را جداگانه حساب می‌کنیم.

$\underline{۵}\ \underline{۵}\ \underline{۴}\ \underset{۵}{\underline{۱}}$ یا $\underline{۶}\ \underline{۵}\ \underline{۴}\ \underset{۰}{\underline{۱}}$

$۵\times۵\times۴\times۱+۶\times۵\times۴\times۱=۱۰۰+۱۲۰=۲۲۰$

ت برای این‌که عدد مورد نظر از ۶۰۰۰ بزرگ‌تر باشد، در جایگاه یکان هزار آن ارقام ۷ یا ۸ را باید قرار داد.

$\underset{(۷,۸)}{\underline{۲}}\ \underline{۶}\ \underline{۵}\ \underline{۴} \qquad ۲\times۶\times۵\times۴=۲۴۰$

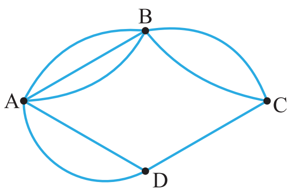
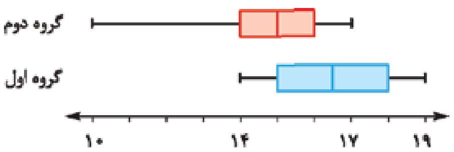
۶۰. برای این سؤال دو حالت در نظر می‌گیریم:

۱ حسن از در ورودی و خروجی علی استفاده نکند.

$\underset{\text{در ورودی علی}}{\underline{۴}}\ \underset{\text{در خروجی علی}}{\underline{۳}}\ \underset{\text{در ورودی حسن}}{\underline{۲}}\ \underset{\text{در خروجی حسن}}{\underline{۲}}$

$=۴\times۳\times۲\times۲=۴۸$

ردیف	نمونه امتحان نیم‌سال دوم	رشتهٔ انسانی	ریاضی و آمار ۳	نمره
	امتحان شمارهٔ ۶	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۳ — Kheilisabz.com	

ردیف	سؤال	نمره
۱	درستی یا نادرستی جمله‌های زیر را مشخص کنید. الف) دنبالهٔ $1,4,9,16,\dots$ یک دنبالهٔ حسابی است. ب) هرگاه A و B دو پیشامد ناتهی در فضای نمونهٔ S باشند، به طوری که $A-B=A$ و $B-A=B$، در این صورت، دو پیشامد A و B ناسازگار هستند.	۰/۵
۲	جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. الف) به هر یک از نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی، .... می‌گویند. ب) احتمال این‌که از بین سه نفر دوست، تولد هیچ دوتای آن‌ها در یک فصل نباشد، برابر است با .... پ) ریشه‌های چهارم عدد ۷ برابر است با .... و	۱
۳	گزینهٔ صحیح را انتخاب کنید. الف) تعداد زیرمجموعه‌های ۳عضوی از مجموعهٔ $A=\{5,6,7,8,9\}$ که شامل عدد ۷ باشد، کدام است؟ ۱) ۱۰ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۴ ب) اگر اندازه‌گیری وزن افراد با دو واحد متفاوت (کیلوگرم و پوند) انجام شده باشد، اجرای نادرست کدام گام از چرخهٔ آمار است؟ ۱) بیان مسئله ۲) طرح و برنامه‌ریزی ۳) گردآوری و پاک‌سازی داده‌ها ۴)تحلیل داده‌ها پ) ضابطهٔ تابعی دنبالهٔ $\frac{1}{2},-\frac{2}{3},\frac{3}{4},-\frac{4}{5},\dots$ کدام گزینه است؟ ۱) $a_n=(-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}$ ۲) $a_n=\frac{-n}{n+1}$ ۳) $a_n=(-1)^n\frac{n}{n+1}$ ۴) $a_n=\frac{n}{n+1}$	۰/۷۵
۴	مطابق شکل مقابل، میان چهار شهر راه‌هایی وجود دارد. مشخص کنید به چند طریق می‌توان از شهر B به شهر D سفر کرد. 	۰/۷۵
۵	با ارقام ۱، ۰، ۳، ۵، ۷ و ۹ و بدون تکرار ارقام، چند عدد چهاررقمی و مضرب ۵ می‌توان نوشت؟	۱/۲۵
۶	هر یک از اعداد طبیعی ۱ تا ۹ را روی کارت‌هایی می‌نویسیم و پس از مخلوط‌کردن کارت‌ها، به طور تصادفی یک کارت برمی‌داریم. پیشامدهای زیر را مشخص کنید. الف) عدد روی کارت، اول باشد ولی بزرگ‌تر از ۴ نباشد. ب) عدد روی کارت، مجذور کامل و فرد باشد.	۱
۷	گروه المپیاد ادبی شهری شامل ۵ دانش‌آموز دختر و ۴ دانش‌آموز پسر است. می‌خواهیم به طور تصادفی ۳ نفر را از بین آن‌ها انتخاب کنیم. مطلوب است محاسبهٔ احتمال این‌که: الف) دو دختر و یک پسر انتخاب شود. ب) حداقل ۲ پسر انتخاب شده باشد.	۲
۸	با توجه به نمودارهای جعبه‌ای رسم‌شده به سؤالات زیر پاسخ دهید.  الف) در کدام گروه گزارش میانگین و انحراف معیار می‌تواند گمراه‌کننده باشد؟ ب) دامنهٔ میان‌چارکی کدام گروه بزرگ‌تر است؟ پ) در کدام گروه مقدار میانه و میانگین به هم نزدیک‌ترند؟	۰/۷۵
۹	با توجه به دنباله‌های $a_n=\frac{(-1)^n}{n+1}$ و $b_n=n^2+2$ حاصل عبارت $8a_3+b_2$ را بنویسید.	۰/۷۵
۱۰	در دنبالهٔ بازگشتی $a_{n+1}=2a_n+n$ با جملهٔ اول $a_1=3$، چهار جملهٔ اول را به دست آورید.	۰/۷۵
۱۱	در یک دنبالهٔ حسابی، جملهٔ هفتم برابر ۵۳ و جملهٔ بیست و پنجم برابر ۱۰۷ است. الف) جملهٔ اول و اختلاف مشترک دنباله را حساب کنید. ب) جملهٔ پنجاه و یکم دنباله را مشخص کنید.	۱/۵
۱۲	بین اعداد ۷ و ۲۷ سه عدد را طوری قرار دهید که این پنج عدد با هم، تشکیل دنبالهٔ حسابی افزایشی دهند.	۱

ردیف	نمونه امتحان نیم‌سال دوم / امتحان شمارهٔ ۶	رشتهٔ انسانی / مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	ریاضی و آمار ۳ / امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۳	Kheilisabz.com	نمره
۱۳	مدت‌زمان مطالعهٔ روزانهٔ دانش‌آموزی در درس ریاضی و آمار برحسب دقیقه به صورت دنبالهٔ مقابل است: $۱۰,۱۵,۲۰,۲۵,...$ مجموع مدت‌زمان مطالعهٔ دانش‌آموز در شانزده روز اول را بیابید. (با استفاده از فرمول مجموع)				۱
۱۴	برای دنبالهٔ هندسی مقابل: $\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۱۰},\frac{۱}{۵۰},\frac{۱}{۲۵۰},...$ الف) نسبت مشترک و جملهٔ عمومی دنباله را بنویسید. ب) رابطهٔ بازگشتی آن را مشخص کنید.				۱/۲۵
۱۵	جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی ۵ و نسبت مشترک آن ۲ است. الف) جملهٔ چندم این دنباله برابر ۶۴۰ است؟ ب) با استفاده از فرمول، مجموع نه جملهٔ اول دنباله را به دست آورید.				۱/۵
۱۶	عبارت توان‌دار را به صورت رادیکالی و عبارت رادیکالی را به صورت توان‌دار بنویسید. الف) $(۰/۳۵)^{\frac{۱}{۴}}$ ب) $\sqrt[۱۱]{۴/۲}$ پ) $\sqrt[۴]{(\frac{۱}{۶})^۳}$ ت) $(۲\frac{۱}{۳})^{\frac{-۸}{۳}}$				۱
۱۷	حاصل عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید. $(a>۰)$ الف) $(\frac{a^{\frac{-۱}{۳}}}{a^{\frac{-۱}{۶}}})^{-۶}$ ب) $(۳)^{\frac{۱}{۲}}\times(۱۲)^{\frac{۱}{۲}}\times(۰/۷)^{۰}$				۱/۵
۱۸	نمودار تابع نمایی $y=(\frac{۱}{۳})^x$ را در دستگاه مختصات رسم کنید.				۰/۷۵
۱۹	شخصی چهل میلیون تومان در یک شرکت تولیدی در راستای حمایت از تولید ملی سرمایه‌گذاری می‌کند. اگر در پایان هر سال ۳۰ درصد سود علی‌الحساب به او پرداخت شود، پس از دو سال سرمایهٔ او چه‌قدر خواهد شد؟				۱
	جمع نمرات				۲۰

پاسخ‌نامهٔ تشریحی

۱. الف نادرست (۰/۲۵) ب درست (۰/۲۵)

۲. الف برآمد (۰/۲۵) ب $\frac{۴}{۴}\times\frac{۳}{۴}\times\frac{۲}{۴}=\frac{۲۴}{۶۴}=\frac{۳}{۸}$ (۰/۲۵)

پ $\sqrt[۴]{۷}\,,\,-\sqrt[۴]{۷}$ (۰/۲۵)

۳. الف گزینهٔ «۳» (عدد ۶) (۰/۲۵)

ب گزینهٔ «۲» (طرح و برنامه‌ریزی) (۰/۲۵)

پ گزینهٔ «۱»، یعنی $a_n=(-۱)^{n+۱}\cdot\frac{n}{n+۱}$ (۰/۲۵)

۴. $\underbrace{۳\times ۲}_{(۰/۲۵)}+\underbrace{۲\times ۱}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{۸}_{(۰/۲۵)}$

۵. حالت اول: رقم یکان صفر باشد. $۵\times۴\times۳\times۱=۶۰$ (۰/۵)

حالت دوم: رقم یکان ۵ باشد. $۴\times۴\times۳\times۱=۴۸$ (۰/۵)

$۶۰+۴۸=۱۰۸$ (۰/۲۵)

۶. الف $\{۲,۳\}$ (۰/۵) ب $\{۱,۹\}$ (۰/۵)

۷. الف

$$p(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\overbrace{\binom{۵}{۲}\times\binom{۴}{۱}}^{(۰/۵)}}{\underbrace{\binom{۹}{۳}}_{(۰/۲۵)}}=\frac{\overbrace{۱۰\times۴}^{(۰/۲۵)}}{۸۴}=\frac{۱۰}{۲۱}$$

ب

$$p(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{\overbrace{\binom{۴}{۲}\times\binom{۵}{۱}}^{(۰/۵)}+\overbrace{\binom{۴}{۳}}^{(۰/۲۵)}}{\binom{۹}{۳}}=\overbrace{\frac{۶\times۵+۴}{۸۴}=\frac{۳۴}{۸۴}=\frac{۱۷}{۴۲}}^{(۰/۲۵)}$$

۸. الف گروه دوم (۰/۲۵) ب گروه اول (۰/۲۵)

پ گروه اول (۰/۲۵)

۹. $a_۳=\frac{(-۱)^۳}{۳+۱}=-\frac{۱}{۴}$ (۰/۲۵) ، $b_۲=۲^۲+۲=۶$ (۰/۲۵)

$۸a_۳+b_۲=۸(-\frac{۱}{۴})+۶=-۲+۶=۴$ (۰/۲۵)

۱۰.
$n=۱\Rightarrow a_۲=۲a_۱+۱=۶+۱=۷$

$n=۲\Rightarrow a_۳=۲a_۲+۲=۱۴+۲=۱۶$

$n=۳\Rightarrow a_۴=۲a_۳+۳=۳۲+۳=۳۵$

$۳,\underbrace{۷,۱۶,۳۵}_{(۰/۷۵)}$ (هر مورد ۰/۲۵)

۱۱. الف روش اول:

$$\overbrace{\begin{cases}a_۷=a_۱+۶d=۵۳\\ a_{۲۵}=a_۱+۲۴d=۱۰۷\end{cases}}^{(۰/۵)}\Rightarrow \overbrace{۱۸d=۵۴\Rightarrow d=۳}^{(۰/۲۵)}$$

$$\Rightarrow \overbrace{a_۱+۶\times۳=۵۳\Rightarrow a_۱=۳۵}^{(۰/۲۵)}$$

روش دوم:

$$d=\frac{\overbrace{a_{۲۵}-a_۷}^{(۰/۲۵)}}{۲۵-۷}=\overbrace{\frac{۱۰۷-۵۳}{۱۸}=\frac{۵۴}{۱۸}}^{(۰/۲۵)}=۳$$

$$\overbrace{a_۷=a_۱+۶d=۵۳\Rightarrow a_۱+۱۸=۵۳}^{(۰/۲۵)}\Rightarrow \overbrace{a_۱=۳۵}^{(۰/۲۵)}$$

ب $a_{۵۱}=a_۱+۵۰d=۳۵+۵۰(۳)=۱۸۵$ (۰/۵)

۱۲. به دست آوردن d از هر سه روش درست است. (۰/۲۵)

روش اول: $d=\frac{۲۷-۷}{۳+۱}=\frac{۲۰}{۱}=۵\Rightarrow d=۵$

روش دوم: $۲۷=۷+۴d\Rightarrow d=۵$

روش سوم: $d=\frac{a_۵-a_۱}{۵-۱}=\frac{۲۷-۷}{۴}=\frac{۲۰}{۴}=۵$

$۷,\underbrace{۱۲,۱۷,۲۲}_{(۰/۷۵)},۲۷$

۱۳.

$$S_{۱۶}=\underbrace{\frac{۱۶}{۲}(۲\times۱۰+(۱۶-۱)\times۵)=\frac{۱۶}{۲}(۲۰+۱۵\times۵)}_{(۰/۷۵)}$$

$$\underbrace{=۸(۲۰+۷۵)=۸\times۹۵=}\ \underbrace{۷۶۰}_{(۰/۲۵)}$$

۱۴. الف $r=\frac{۱}{۵}$ (۰/۲۵) ، $\underbrace{a_n=a_۱r^{n-۱}=\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۵})^{n-۱}}_{(۰/۵)}$

ب $a_{n+۱}=\frac{۱}{۵}a_n$ (۰/۲۵) ، $a_۱=\frac{۱}{۲}$ (۰/۲۵)

۱۵. الف

$$\underbrace{a_n=۵\times۲^{n-۱}=۶۴۰}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow \underbrace{۲^{n-۱}=۱۲۸=۲^۷\Rightarrow n-۱=۷}_{(۰/۲۵)}$$

$\Rightarrow n=۸$ (۰/۲۵)

ب

$$S_۹=\underbrace{\frac{۵(۱-۲^۹)}{۱-۲}}_{(۰/۵)}=\underbrace{\frac{۵(۱-۵۱۲)}{-۱}=\frac{۵(-۵۱۱)}{-۱}}_{(۰/۵)}=۵\times۵۱۱=۲۵۵۵$$

۱۶. الف $(۰/۳۵)^{\frac{۱}{۴}}=\sqrt[۴]{۰/۳۵}$ (۰/۲۵)

ب $\sqrt[۱۱]{۴/۲}=(۴/۲)^{\frac{۱}{۱۱}}$ (۰/۲۵)

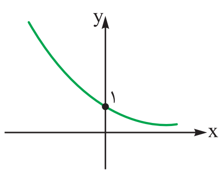
پ $\sqrt[۴]{(\frac{۱}{۶})^۳}=(\frac{۱}{۶})^{\frac{۳}{۴}}$ (۰/۲۵)

ت $(۲\frac{۱}{۳})^{-\frac{۸}{۳}}=\frac{۱}{\sqrt[۳]{(۲\frac{۱}{۳})^۸}}$ یا $(۲\frac{۱}{۳})^{-\frac{۸}{۳}}=\sqrt[۳]{(\frac{۳}{۷})^۸}$ (۰/۲۵)

۱۷. الف $(\frac{a^{-\frac{۱}{۳}}}{a^{-\frac{۱}{۶}}})^{-۶}=\underbrace{\frac{a^۲}{a^۱}}_{(۰/۵)}=\underbrace{a}_{(۰/۲۵)}$

ب $(۳)^{\frac{۱}{۲}}\times(۱۲)^{\frac{۱}{۲}}\times(۰/۷)^۰=\underbrace{(۳\times۱۲)^{\frac{۱}{۲}}\times۱}_{(۰/۵)}=\underbrace{(۳۶)^{\frac{۱}{۲}}=۶}_{(۰/۲۵)}$

۱۸. رسم نمودار (۰/۵) محور طول‌ها را قطع نکند و تعیین درست نقطهٔ محل برخورد منحنی با محور عرض‌ها در نقطهٔ $(۰,۱)$ (۰/۲۵)



۱۹. روش اول:

$$f(۲)=\underbrace{۴۰۰۰۰۰۰۰۰\times(۱+\frac{۳۰}{۱۰۰})^۲=۴۰۰۰۰۰۰۰۰\times(۱/۳)^۲}_{(۰/۷۵)}$$

$$\underbrace{=۴۰۰۰۰۰۰۰۰\times(۱/۶۹)}=\underbrace{۶۷۶۰۰۰۰۰۰}_{(۰/۲۵)}$$

روش دوم:

$$f(۲)=\underbrace{۴۰\times(۱+\frac{۳۰}{۱۰۰})^۲=۴۰\times(۱/۳)^۲=۴۰\times(۱/۶۹)}_{(۰/۷۵)}$$

$=۶۷/۶$ (میلیون تومان) (۰/۲۵)