

پاسخ‌نامه‌ی تشریحی سوالات و مسائل مسابقات ریاضی هشتم

از مجموعه مرشد

- حدود ۲۸۰۰ سؤال چهارگزینه‌ای (شامل: سؤالات تیزهوشان، آزمون‌های ورودی مدارس برتر تهران و مرکز استان‌های کشور، آزمون‌های پیشرفت تحصیلی، مسابقات جهانی ریاضی، المپیادها و مسابقات علمی داخلی و خارجی و...)
- حدود ۴۵۰ نکته‌ی کلیدی درس ریاضی دوم دبیرستان که دانش‌آموزان علاقه‌مند باید فراگیرند.
- پاسخ‌نامه‌ی تشریحی و نکات مهم کتاب

و حید اسی کیا

مرشد: مرجع رشد و شکوفایی دانش‌آموزان

ویژه دانش‌آموزان ممتاز و داوطلبان شرکت در مسابقات
و آزمون‌های ورودی مدارس تیزهوشان و برتر

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

به نام خداوند جان و خرد کزین برتر اندیشه برنگذرد

بسیار خرسندیم که کتاب «مسابقات ریاضی هشتم» از مجموعه‌ی «مرشد» را منتشر می‌کنیم. این کتاب که توسط آقای وحید اسدی کیا زیر نظر آقای هادی عزیززاده تألیف شده است، دانش‌آموزان کلاس دوم دبیرستان (دوره‌ی اول متوسطه) را برای شرکت در مسابقات ریاضی و امتحانات و آزمون‌های ورودی مدارس خاص آماده می‌کند. در تألیف این کتاب از منابع متعددی استفاده شده است که از جمله‌ی آن‌ها می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- ۱- آزمون‌های ورودی مدارس تیزهوشان و ممتاز استان تهران و مرکز استان‌های کشور
 - ۲- آزمون‌های پیشرفت تحصیلی
 - ۳- مسابقات علمی کشوری و بین‌مدرسه‌ای
 - ۴- المپیادهای ریاضی داخلی و خارجی
 - ۵- مسایل مسابقات جهانی ریاضی IMC، کانگورو و آزمون‌های جهانی ریاضی تیمز
 - ۶- مسایل مسابقات خارجی (کشورهای آمریکا، انگلیس، مجارستان، بلژیک، آفریقای جنوبی و...)
 - ۷- مسایل المپیادهای کشوری مبتکران و آزمون‌های نشانه‌ی مبتکران
 - ۸- آزمون‌های چهارگزینه‌ای داخلی مدارس تیزهوشان استان تهران و مراکز استان‌های کشور
 - ۹- آزمون‌های ورودی روبروکاپ
- *توجه:** بعضی از سؤال‌ها علامت (*) دارند. این سؤالات منتخبی از المپیادهای ریاضی کشور بلژیک است و دارای بیش از یک گزینه‌ی درست می‌باشند.

مسائل این آزمون‌ها، براساس فصل‌ها و بخش‌های کتاب درسی ریاضی هشتم (دوم دبیرستان دوره‌ی اول متوسطه) طبقه‌بندی شده و از آسان به سخت مرتب گردیده‌اند. برخی از آن‌ها بدون راهنمایی و اشاره به نکته کلیدی قابل حل نیستند که با علامت \boxtimes مشخص شده‌اند تا دانش‌آموزان قبل از اقدام به حل آن‌ها، ابتدا نکته‌ی مورد نظر را مطالعه کنند. (تعداد پاکت‌ها نشان‌دهنده‌ی تعداد نکته‌های آن سؤال می‌باشد).

لازم به ذکر است کتاب ریاضی مرشد هشتم در دو جلد تألیف شده است:

- جلد اول: شامل سؤالات همراه با پاسخ‌نامه‌ی کلیدی آن‌ها
 - جلد دوم: شامل پاسخ‌نامه‌ی تشریحی سؤالات و نکات مهم مربوط به آن‌ها
- امیدواریم این کتاب، مورد توجه خانواده‌ها، دانش‌آموزان عزیز و دبیران گرامی قرار گیرد و در ارتقای سطح علمی دانش‌آموزان مؤثر افتد.

در پایان، وظیفه‌ی خود می‌دانیم از مؤلف کتاب آقای وحید اسدی‌کیا و دبیر مجموعه‌ی مرشد آقای هادی عزیززاده و از آقایان ناصر کاهه، اباصلت نوراللهی و فتح‌اله پرباز و خانم‌ها مهندس ندا قدسی و مریم مقصودی و فاطمه ستاری مرجانی و لیلا عباس‌زاد و فاطمه زرین‌گل که بنا به گزارش مؤلف با وی همکاری علمی داشته‌اند و بخش‌هایی از کتاب را ویرایش کرده‌اند، تشکر کنیم. هم‌چنین از خانم لیلا مهرعلی‌پور (حروف‌چین و صفحه‌آرا و ترسیم‌کننده‌ی شکل‌ها) بسیار ممنونیم و برای همه‌ی این عزیزان آرزوی موفقیت داریم.

وحید اسدی‌کیا



۱۸۷

فصل ۶

مثلث

۷

فصل ۱

عددهای صحیح و گویا

۲۳۹

فصل ۷

توان و جذر

قسمت اول: توان

۳۵

فصل ۲

حساب اعداد طبیعی

۲۷۳

قسمت دوم: جذر

۲۹۳

فصل ۸

آمار و احتمال

۷۹

فصل ۳

چندضلعی‌ها

۳۱۹

فصل ۹

دایره

۱۱۱

قسمت اول: عبارت‌های جبری

۱۳۹

قسمت دوم: معادله

فهرست

۱۶۳

فصل ۵

بردار و مختصات

فصل ۱

عددهای صحیح و گویا

شناخت اعداد صحیح

۱. گزینه د

نکته ۱: مجموعه‌ی اعداد صحیح را با حرف \mathbb{Z} ، مخفف کلمه‌ی آلمانی زاهلِن (Zahlen) به معنای «صحیح» نمایش می‌دهند. کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو این مجموعه مشخص نیست.
مجموعه‌ی اعداد صحیح:
 $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
توجه: عدد صفر نه مثبت است و نه منفی.

۲. گزینه ج
۶۲۹ بر ۵ بخش پذیر نیست، پس خارج قسمت اعشاری می‌شود.

$$\frac{15}{-14-1} = \frac{15}{-15} = -1$$

۳. گزینه ب

۴. گزینه الف

$$\frac{m^2 + 1390}{m} = \frac{m^2}{m} + \frac{1390}{m} = m + \frac{1390}{m}$$

از طرفی $1390 = 139 \times 2 \times 5$ که چون باید بر m بخش پذیر شود، داریم:

$$m = \pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 139, \pm 2 \times 5, \pm 2 \times 139, \pm 5 \times 139, \pm 2 \times 5 \times 139$$

یعنی ۱۶ عدد (۸ تا عدد مثبت و ۸ تا عدد منفی) می‌توان به جای m قرار داد.

۵. گزینه ب
نصف اعداد منفی از خودشان بزرگ‌تر می‌شوند.

مثال: نصف ۶-، عدد ۳- می‌شود که ۳- از ۶- بزرگ‌تر است.

۶. گزینه د
اعداد بزرگ‌تر از ۹۱-، عبارتند از $\dots, -87, -89, -90$ که بزرگ‌ترین آن‌ها و بخش پذیر بر ۳، عدد ۸۷- است.

۷. گزینه د

نکته ۲: اعداد صحیح نامنفی عبارتند از:
 $0, +1, +2, +3, \dots$
توجه: نام دیگر اعداد صحیح نامنفی، اعداد حسابی است که با حرف بزرگ I آن را نمایش می‌دهند.

۸. گزینه الف

نکته ۳: اعداد صحیح نامثبت عبارتند از:
 $0, -1, -2, -3, \dots$

۹. گزینه ج

نکته ۴: تعداد اعداد صحیح از عدد صحیح a تا عدد صحیح b ، به شرط $a > b$ عبارت است از:
 $a - b + 1$
تعداد اعداد صحیح بین اعداد صحیح a و b ، به شرط $a > b$ عبارت است از:
 $a - b - 1$

تعداد $207 - (-163) - 1 = 207 + 163 - 1 = 369$ داریم: (۴)

نکته ۵: تعداد اعداد صحیح زوج از عدد صحیح a تا عدد صحیح b برابر است با:

$$+1 \frac{(\text{کوچک‌ترین عدد صحیح زوج} - \text{بزرگ‌ترین عدد صحیح زوج})}{2}$$

هم‌چنین تعداد اعداد صحیح فرد از عدد صحیح a تا عدد صحیح b برابر است با:

$$+1 \frac{(\text{کوچک‌ترین عدد صحیح فرد} - \text{بزرگ‌ترین عدد صحیح فرد})}{2}$$

$$\frac{+38 - (-102)}{2} + 1 = \frac{140}{2} + 1 = 71$$

طبق نکته‌ی (۵) داریم:

۱۱. گزینه د فاصله‌ی $+2$ تا -7 ، 9 واحد است. داریم:

$$\begin{array}{r|l} 1 & 3 \\ \hline 2 & 6 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline \times 3 & \end{array} \Rightarrow +2 - 3 = -1$$

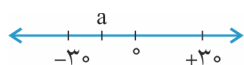
فاصله‌ی عدد -1 تا $+2$ ، 3 واحد و فاصله‌ی عدد -1 تا -7 ، 6 واحد است.

عدد دیگر، $+11$ است، زیرا فاصله‌ی $+11$ تا $+2$ ، 9 واحد و فاصله‌ی $+11$ تا -7 ، 18 واحد است که دو برابر 9 می‌باشد. هم‌چنین عدد

$$+11 \text{ را می‌توان از حل معادله‌ی مقابل به دست آورد: } a - (-7) = 2 \times (a - (+2)) \Rightarrow a + 7 = 2a - 4 \Rightarrow \boxed{a = +11}$$

۱۲. گزینه د آن عدد را a در نظر می‌گیریم که در این صورت داریم:

حالت اول: a بین -30 و $+30$ است:



$$(a - (-30)) = \frac{1}{3}(30 - a) \Rightarrow 3(a + 30) = 30 - a \Rightarrow 3a + 90 = 30 - a \Rightarrow 4a = -60 \Rightarrow \boxed{a = -15}$$

فاصله‌ی -15 تا -30 ، 15 واحد و فاصله‌ی -15 تا $+30$ ، 45 واحد است.



حالت دوم: a کم‌تر از -30 است:

$$(30 - a) = 3(-30 - a) \Rightarrow 30 - a = -90 - 3a \Rightarrow 2a = -120 \Rightarrow \boxed{a = -60}$$

فاصله‌ی -60 تا -30 ، 30 واحد است و فاصله‌ی -60 تا $+30$ ، 90 واحد است. مشخص است که 30 ، $\frac{1}{3}$ عدد 90 است.

قرینه‌ی اعداد صحیح

۱۳. گزینه د اگر عدد مثبت باشد، قرینه‌اش از خودش کوچک‌تر است ولی اگر عدد صفر باشد، قرینه‌اش با خودش برابر است.

نکته ۶: عدد صفر، تنها عدد صحیحی است که قرینه‌اش با خودش برابر است.

۱۴. گزینه ه اگر عدد صحیح غیرصفر باشد، حاصل ضرب آن در قرینه‌اش همیشه عددی منفی است و اگر آن عدد صحیح صفر باشد، حاصل ضرب صفر می‌شود.

۱۵. گزینه الف

نکته ۷: قرینه‌ی قرینه‌ی هر عدد صحیح، خودش می‌شود. اگر عدد صحیحی را زوج بار قرینه کنیم، خودش

می‌شود و اگر عددی صحیح را فرد بار قرینه کنیم، آن عدد قرینه می‌شود.

۱۶. گزینه ج حاصل $(-2-3)$ ، -5 می شود، از طرفی چون تعداد علامت‌های قرینه، $695 = 2 \div 1390$ است، پس جواب $+5 = -(-5)$ می شود.

۱۷. گزینه الف

نکته ۸: با توجه به این که عددی وسط دو عدد a و b از رابطه‌ی میانگین یعنی $M = \frac{a+b}{2}$ به دست می آید،

پس روابط مقابل را می توان نتیجه گرفت: $b = 2 \times M - a$ ، $a = 2 \times M - b$

توجه: وقتی M وسط دو عدد a و b باشد، می توان گفت: « a قرینه‌ی b نسبت به نقطه‌ی M است.» یا « b قرینه‌ی a نسبت به نقطه‌ی M است.»

طبق نکته‌ی (۸) داریم:

قرینه‌ی 4 نسبت به 9 برابر است با: $2 \times (+9) - 4 = 14$

که اگر با -5 جمع شود، می شود:

$$14 + (-5) = +9$$

۱۸. گزینه ج قرینه‌ی عدد 5 نسبت به -1 می شود: $p = 2 \times (-1) - 5 = -7$ و قرینه‌ی -7 نسبت به $+7$ می شود:

$$21 = 2 \times (+7) - (-7) \text{ که فاصله‌ی } p \text{ و } q \text{ برابر است با: } 21 - (-7) = 28 \text{ واحد.}$$

۱۹. گزینه د از صورت سؤال مشخص است که a همان c است. از طرفی b نیز همان a است. پس $a = b = c$ است. در ضمن

قرینه‌ی قرینه‌ی b ، خودش می شود.

علامت اعداد صحیح

۲۰. گزینه ب اگر هر سه عدد منفی باشند، مجموع حاصل ضرب دوی آن‌ها مثبت می شود. اگر دو عدد منفی و یک عدد مثبت باشد، حاصل ضرب سه عدد، مثبت می شود که با فرض مسئله سازگار نیست. پس دو عدد مثبت و یک عدد منفی است.

۲۱. گزینه ب $a < 0$ و $b < a$ است، یعنی b نیز منفی است که در این صورت $ab > 0$ است.

۲۲. گزینه ج چون $m+n > 0$ شده است. پس مقدار مثبت از منفی بیش تر بوده است. پس $n > 0$ و در نتیجه $2n > 0$ است.

بردارهای (فلش‌های) اعداد صحیح

۲۳. گزینه ب نمایش بردار صفر در شکل مقابل نشان داده شده است:



۲۴. گزینه ب

نکته ۹: برای تک‌فلش‌ها داریم:

انتهای فلش = عدد متناظر با فلش + ابتدای فلش

عدد متناظر با فلش = ابتدای فلش - انتهای فلش

$$-3 - (+4) = -7$$

۲۵. گزینه الف

ابتدای فلش = عدد متناظر با فلش - انتهای فلش

نکته ۱۰:

بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر از -۱۲ ، عدد -۱۳ و کوچک‌ترین عدد صحیح بزرگ‌تر از $+۷$ ، $+۸$ است. طبق

$$(+۸) - (-۱۳) = +۲۱$$

$$(+۲) - (-۳) = +۵$$

$$(-۵) - (-۳) = (-۲)$$

$$(-۵) - (-۲) = (-۳)$$

$+۳$ و -۵ ، ۸ واحد فاصله دارند که اگر ۸ واحد دیگر از -۵ به جهت منفی حرکت کنیم، به عدد -۱۳ می‌رسیم.

۲۶. گزینه د

نکته‌ی (۹) داریم:

۲۷. گزینه الف

طبق نکته‌ی (۱۰) داریم:

۲۸. گزینه د

طبق نکته‌ی (۹) و نکته‌ی (۱۰)، دو تفریق می‌توان نوشت:

۲۹. گزینه د

بنابراین طول این بردار -۱۶ است.

۳۰. گزینه الف

طبق نکته‌ی (۹).

۳۱. گزینه د

۳۲. گزینه د

مجموع اعداد صحیح

۳۳. گزینه الف

$$\text{تعداد} \times \left(\frac{a+b}{۲}\right)$$

نکته ۱: مجموع اعداد صحیح از a تا b برابر است با:

$$۱۳۹۳ - (-۲۰۱۴) + ۱ = ۳۴۰۸$$

طبق نکته‌ی (۴)، تعداد اعداد صحیح از $+۱۳۹۳$ تا -۲۰۱۴ می‌شود:

$$\text{مجموع} = \frac{۱۳۹۳ + (-۲۰۱۴)}{۲} \times ۳۴۰۸ = -۶۲۱ \times ۱۷۰۴$$

و طبق نکته‌ی (۱۱) داریم:

که از منفی بودن حاصل و رقم یکان حاصل که ۴ می‌شود، گزینه‌ی (الف) جواب است.

۳۴. گزینه ج روش اول:

$$۲ + ۴ + ۶ + \dots + ۲۰۰ - (۱ + ۳ + ۵ + \dots + ۱۹۹) = \frac{(۲-۱)}{+۱} + \frac{(۴-۳)}{+۱} + \frac{(۶-۵)}{+۱} + \dots + \frac{(۲۰۰-۱۹۹)}{+۱} = ۱۰۰ \times (+۱) = +۱۰۰$$

روش دوم: استفاده از نکته‌ی (۱۲)

$$۱ + ۲ + ۳ + \dots + n = \frac{n \times (n+1)}{۲}$$

نکته ۱۲: مجموع n عدد طبیعی متوالی اولیه:

$$\frac{\text{تعداد } n \text{ تا}}{۲ + ۴ + ۶ + \dots + (۲n)} = n \times (n+1)$$

مجموع n عدد طبیعی زوج اولیه:

$$\frac{۱ + ۳ + ۵ + \dots + (۲n-1)}{\text{تعداد } n \text{ تا}} = n^۲$$

مجموع n عدد طبیعی فرد اولیه:

$$۱۰۰ \times (۱۰۱) = ۱۰۱۰۰$$

طبق نکته‌ی (۱۲)، مجموع اولین صد عدد مثبت زوج می‌شود:

$$۱۰۰ \times ۱۰۰ = ۱۰۰۰۰ \Rightarrow ۱۰۱۰۰ - ۱۰۰۰۰ = ۱۰۰ \text{ اختلاف}$$

مجموع اولین صد عدد مثبت فرد می‌شود:

این هفت عدد صحیح متوالی، فقط می‌توانند اعداد -۳ تا $+۳$ باشند.

۳۵. گزینه الف

می‌دانیم ۱ ساعت و نیم یعنی ۹۰ دقیقه، پس این ذره پس از شروع به اندازه‌ی

۳۶. گزینه د

$$\frac{+۱-۲}{-۱} + \frac{۳-۴}{-۱} + \dots + \frac{۸۹-۹۰}{-۱} = ۴۵ \times (-۱) = -۴۵$$

واحد حرکت کرده است تا به عدد -۱۰۰ رسیده است. در نتیجه نقطه‌ی شروع حرکت این ذره، عدد $-۵۵ = -۱۰۰ - (-۴۵)$ بوده است.

۳۷. گزینه د
فرض می‌کنیم هر بار به اندازه‌ی x واحد سرد شده، در این صورت پس از ۳ بار سرد شدن به اندازه‌ی $x + 3x + 9x = 13x$ درجه سرد شده است. اگر دمای اولیه را با \square نمایش دهیم، داریم:

$$\square - 13x = -6 \Rightarrow -13x = -6 - \square$$

یعنی $-6 - \square$ باید بر ۱۳ بخش پذیر باشد. در ضمن \square حتماً باید از -6 گرم‌تر (بزرگ‌تر) باشد.

در میان گزینه‌ها، عدد 47 نمی‌تواند در مربع قرار گیرد، زیرا $-53 = -47 - 6$ می‌شود که بر ۱۳ بخش پذیر نیست.

۳۸. گزینه ب
طبق نکته‌ی (۹) داریم: $70 \div (-210) = -\frac{1}{3} \Rightarrow (-110) - (+100) = -210$

بیش‌ترین و کم‌ترین، حداقل و حداکثر

۳۹. گزینه د
 $12 - (((8 + 5) \times 6) - 2) \times 3 = 12 - (((13 \times 6) - 2) \times 3) = 12 - ((78 - 2) \times 3)$

$$= 12 - (76 \times 3) = 12 - 228 = -216$$

۴۰. گزینه ب

$$2 \times 5 + 7 \times 8 + 9 \times 1 = 75$$

۴۱. گزینه ج

آن دو عدد 999 و -999 هستند که فاصله‌ی آن‌ها از یک‌دیگر 1998 واحد است.

۴۲. گزینه د

دو عدد $+$ یا دو عدد منفی پیدا می‌کنیم که اختلاف آن‌ها،

۴۳. گزینه د

$3+$ باشد، با استفاده از جدول نظام‌دار، داریم:

$70+$ کم‌ترین مقدار ممکن است.

عدد اولی	عدد دومی	حاصل ضرب
+12	+9	+108
+11	+8	+88
+10	+7	+70
-12	-9	+108
-11	-8	+88
-10	-7	+70

۴۴. گزینه د
می‌دانیم جمع هر عدد با قرینه‌اش صفر می‌شود. پس آن اعداد عبارتند از:

بزرگ‌ترین $\rightarrow (+6)$ ، $+5$ ، $+4$ ، $+3$ ، $+2$ ، $+1$ ، 0 ، -1 ، -2 ، -3 ، -4 ، (-5) کوچک‌ترین

۴۵. گزینه ج

نکته ۱۳: هرگاه مجموع دو عدد مقدار ثابتی باشد، حاصل ضرب آن‌ها وقتی بیش‌ترین مقدار را خواهد داشت

که دو عدد با هم مساوی باشند یا کم‌ترین اختلاف را از لحاظ مقدار با یک‌دیگر داشته باشند.

توجه: در میان مستطیل‌هایی که دارای محیط مساوی هستند، مربع بیش‌ترین مساحت را دارد.

چون در سؤال ذکر نشده «متمايز»، آن دو عدد را مساوی در نظر می‌گیریم. داریم:

$$\text{بیش‌ترین حاصل ضرب } +9 = -3 \times -3 \rightarrow -3 \div 2 = -3$$

۴۶. گزینه ج

اگر به‌طور مثال اعداد $1000-$ و $997+$ را که مجموعشان $3-$ می‌شود، در نظر بگیریم، حاصل ضربشان $997000-$

می‌شود که عددی بسیار کوچک است. بنابراین دو عدد را هم علامت در نظر می‌گیریم.

$$+2 = -1 \times -2$$

آن دو عدد -1 و -2 هستند، زیرا:

مجهول یابی

ابتدا کسر سمت چپ را ساده می‌کنیم. داریم:

۴۷. گزینه ب

$$\frac{25}{-3} = \frac{x}{12} \Rightarrow x = -100$$

$\times (-4)$

۴۸. گزینه ب

نکته ۱۴: در کسرهایی که در صورت یا مخرج آن‌ها، عبارت جمع یا تفریق باشد، نمی‌توانیم اعداد را با هم ساده کنیم.

$$\frac{-6}{x} = \frac{-12}{4} \Rightarrow x = 2$$

با به دست آوردن حاصل عبارت‌ها داریم:

۴۹. گزینه الف

ابتدا از هر طرف نامساوی، ۲ واحد کم می‌کنیم. داریم:

$$-3 < x + 2 < 4 \rightarrow -3 - 2 < x + 2 - 2 < 4 - 2 \Rightarrow -5 < x < 2$$

$$\Rightarrow x = -4, -3, -2, -1, 0, 1$$

اعداد صحیح بین ۲ و -۵ عبارتند از:

به دست آوردن حاصل عبارات اعداد صحیح

۵۰. گزینه الف

نکته ۱۵: اولویت اعمال و علایم ریاضی:

۱- آکولاد { } - ۲- کروشه [] - ۳- پرانتز () - ۴- توان و جذر - ۵- ضرب و تقسیم - ۶- جمع و تفریق
توجه: اگر در عبارتی فقط ضرب و تقسیم وجود داشته باشد، عملی که از سمت چپ زودتر آمده باشد، اولویت دارد.

$$\frac{24 \div (-6) \times 2}{-4} = -4 \times 2 = -8$$

مثال:

یادآوری: اگر بین عدد و پرانتز، علامتی نباشد، ضرب محسوب می‌کنیم.

$$20 - 4(-7 + \frac{24 \div 8 \times 3}{9} - \frac{2^2}{-4}) = 20 - 4(-2) = 20 + 8 = 28$$

طبق نکته‌ی (۱۵) می‌توان نوشت:

۵۱. گزینه ب

(+) \times (+) $=$ (+)	(+) \div (+) $=$ (+)
(-) \times (-) $=$ (+)	(-) \div (-) $=$ (+)
(+) \times (-) $=$ (-)	(+) \div (-) $=$ (-)
(-) \times (+) $=$ (-)	(-) \div (+) $=$ (-)

نکته ۱۶: در ضرب و تقسیم اعداد صحیح داریم:

توجه: هرگاه دو علامت مثل هم باشند، جواب مثبت (+) و هرگاه مختلف‌العلامت باشند، جواب منفی (-) است.

$$5 - 2[3 - \frac{2(1-2)^4}{+1} + 3]4 - 5 = 5 - 4 \times 4 \times 4 - 5 = -4 \times 4 \times 4 = -64$$

۵۲. گزینه ج

$$5 - 5(-1 + \frac{3(4-5)^2 \cdot 13}{-6} \times 2 - 2) + \frac{8 \div 4 \times 3}{2} = 5 - \frac{5 \times (-9)}{+45} + 6 = +56$$

۵۳. گزینه د

$$6 - 6[-\frac{2^2}{-4} \times 2 \frac{1}{3} - 4(\frac{1}{2})^3 - \frac{(-3)^2}{+9}] = 6 - 6[-\frac{28}{3} - \frac{1}{2} - 9] = 6 - 6[\frac{-59}{6} - 9] = 6 - 6 \times (\frac{-113}{6}) = 6 + 113 = 119$$

۵۴. گزینه الف

$$A = \{ -[\frac{-6 + 2 \times 3 - 2}{-4}] \times 2 - 3 \times [\frac{-6 \div 2 \times 3 + 2}{-9}] - 2 \}$$

$$A = \{ (-4) - 3 \times (\frac{+7}{21}) - 2 \} = -4 - 21 - 2 = -27$$

۵۵. گزینه د

نکته ۱۷: در عبارت‌هایی که پرانتزهای تودرتو داشته باشد، از کوچک‌ترین پرانتز که داخلی‌ترین پرانتز است شروع به محاسبه می‌کنیم.

$$-1 + 2(-1 + 2(-1 + 2(\frac{+1}{-1+2}))) = +1$$

۵۶. گزینه د

$$-(-1) + \frac{+3}{+1} + \frac{2 - (-1) \times 3}{+9} - \frac{(-4) \times 1}{+4} - 5 = +1 + 9 + 4 - 5 = +9$$

$$5 - 3(-7 + 2 + 7) - 5 + 3(9 + 4 - 9) = 5 - 6 - 5 + 12 = +6$$

۵۷. گزینه ج

۵۸. گزینه الف

$$\frac{3 - 3[4 - (7 - (-5)) \div (-2)]}{5 - (3 \times 5 - 4(-2))} = \frac{3 - 3[4 - 12 \div (-2)]}{5 - (15 + 8)} = \frac{3 - 3[4 + 6]}{5 - 23} = \frac{3 - 30}{-18} = \frac{-27}{-18} = +\frac{3}{2}$$

۵۹. گزینه د

$$\frac{(1)}{[(3 \# 2)(-1)]} \# \frac{(2)}{[(-1) \# (3 \# 2)]}$$

$$(1) \quad (3^2 - 2 \times 2) \# (-1) = 5 \# -1 = 25 + 2 = 27$$

$$(2) \quad (-1) \# 5 = (-1)^2 - 2 \times 5 = 1 - 10 = -9$$

$$(1) \# (2) = 27^2 - 2 \times (-9) = 747$$

۶۰. گزینه ب

نکته ۱۸: اگر عددی منفی را به تعداد فرد مرتبه در خودش ضرب کنیم، حاصل عددی منفی می‌شود و اگر به تعداد زوج مرتبه در خودش ضرب کنیم، حاصل عددی مثبت می‌شود.

$$\underbrace{-1 + 1 - 1 + 1 - \dots + 1}_{\text{ب}} - 1 = -1$$

طبق نکته‌ی (۱۸) داریم:

۶۱. گزینه الف

$$A = \underbrace{1-2}_{-1} + \underbrace{3-4}_{-1} + \underbrace{5-6}_{-1} + \dots + \underbrace{999-1000}_{-1} = 500 \times (-1) = -500$$

۶۲. گزینه ب

$$\underbrace{1-8}_{-7} + \underbrace{3-10}_{-7} + \underbrace{5-12}_{-7} + \dots + \underbrace{401-408}_{-7} = (-7) + (-7) + \dots + (-7) = 201 \times (-7) = -1407$$

توجه: تعداد (-7) ها را از رابطه‌ی «گاوس» به دست آورده‌ایم.

نکته ۱۹: قانون سری حسابی (گاوس):

در دنباله‌ای از اعداد که با اضافه شدن مقدار ثابتی (قدر نسبت) به هر عدد، عدد بعدی آن ساخته می‌شود (یا اصطلاحاً فاصله‌ی هر عدد متوالی، یکسان است) می‌توان از رابطه‌های زیر، تعداد و مجموع آن‌ها را به دست آورد:

$$\text{مجموع} = \frac{(\text{عدد آخر} + \text{عدد اول}) \times \text{تعداد}}{2}$$

$$\text{تعداد} = \frac{(\text{عدد اول} - \text{عدد آخر})}{\text{فاصله‌ی دو عدد متوالی}} + 1$$

با توجه به رابطه‌ی نکته‌ی (۱۹)، داریم:

$$\text{تعداد } (-7) \text{ ها } 201 = \frac{401-1}{7} + 1$$

۶۳. گزینه ج

$$\underbrace{1-2}_{-1} + \underbrace{3-4}_{+1} + \underbrace{5-6}_{-1} + \underbrace{7-8}_{+1} + \underbrace{9-10}_{-1} + \dots + \underbrace{139-140}_{+1} = 0$$

۶۴. گزینه ب

$$\underbrace{1+2-3}_{-1} + \underbrace{4-5+6}_{+1} + \underbrace{7-8+9}_{-1} + \dots + \underbrace{201-202}_{-1} - 201 = -1$$

۶۵. گزینه الف

ابتدا مختصر می‌کنیم. داریم:

$$-1+2+3+4+5+\dots+20 = -1 + \frac{19 \times (2+20)}{2} = -1+209 = 208$$

طبق نکته‌ی (۱۹)

۶۶. گزینه الف

با جابه‌جا کردن درست اعداد داریم:

$$\underbrace{11-12}_{-1} + \underbrace{13-14}_{-1} + \underbrace{15-16}_{-1} + \dots + \underbrace{101-102}_{-1} = \underbrace{(-1) + (-1) + \dots + (-1)}_{\text{تا } 46} = -46$$

۶۷. گزینه ب

A با B قرینه است، یعنی $A+B=0$ می‌شود. داریم:

$$\underbrace{A+B+B}_{\text{طبق نکته‌ی (۱۲)}} = B = -1-2-3-4-\dots-100 = -\frac{50 \times 50}{2} = -50 \times 50$$

۶۸. گزینه هـ

$$-1 - (-1) - (-1) - \dots - (-1) = \underbrace{-1+1+1+\dots+1}_{\text{تا } 50} = \cancel{-1} + \underbrace{1+1+\dots+1}_{\text{تا } 48} = +48$$

۶۹. گزینه د

$$A = 17 - \underbrace{(16 - (15 - \underbrace{(14 - (13 - 20)}_{\text{صفر}}) - 21) - 22) - 23}_{\text{صفر}} - 24 = 17 - 24 = -7$$

۷۰. گزینه ب

از راهبرد حل مسئله‌ی ساده‌تر و الگویابی حل می‌کنیم. داریم:

$$\left. \begin{aligned} 1 - (2 - 3) &= 2 \\ 1 - (2 - (3 - 4)) &= -2 \\ 1 - (2 - (3 - (4 - 5))) &= 3 \\ 1 - (2 - (3 - (4 - (5 - 6)))) &= -3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -100 \div 2 = -50$$

حاصل می‌شود:

۷۱. گزینه الف

با توزیع علامت منفی پشت پرانتزها به ترتیب از چپ به راست، عبارت به صورت زیر می‌شود:

$$\frac{1-2}{-1} + \frac{3-4}{-1} + \frac{5-6}{-1} + \dots + \frac{99-100}{-1} = 50 \times (-1) = -50$$

۷۲. گزینه ج

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 2005^2 - 1 \times 3 - 2 \times 4 - 3 \times 5 - \dots - 2004 \times 2006$$

$$= 1^2 + \frac{(2^2 - 1 \times 3)}{+1} + \frac{(3^2 - 2 \times 4)}{+1} + \frac{(4^2 - 3 \times 5)}{+1} + \frac{(5^2 - 4 \times 6)}{+1} + \dots + \frac{(2005^2 - 2004 \times 2006)}{+1} = 2005 \times 1 = 2005$$

میانگین اعداد صحیح

۷۳. گزینه ج

نکته ۲۰: $\text{تعداد} \times \text{میانگین} = \text{مجموع}$ $\text{مجموع} = \text{میانگین} \times \text{تعداد}$

$$\left. \begin{array}{l} -31 = \text{دومی} + \text{اولی} \\ -56 = \text{سومی} + \text{دومی} \\ -51 = \text{سومی} + \text{اولی} \end{array} \right\} + \Rightarrow 2 \times (\text{اولی} + \text{دومی} + \text{سومی}) = -138 \Rightarrow -138 \div 6 = -23$$

میانگین -23

۷۴. گزینه ب

یادآوری: $\text{تعداد} \times \text{میانگین} = \text{مجموع}$

اگر میانگین دو عد صحیح، $+3$ باشد، پس مجموع آنها $2 \times (+3) = +6$ است. داریم:

$$\frac{(+6 - (-22))}{-16} \div 2 = -8 \text{ عدد کوچک تر}$$

$$\Rightarrow (-8) - (-10) = -8 + 10 = +2$$

۷۵. گزینه الف

چون دماها با یکدیگر قرینه‌اند، پس مجموع آنها صفر و در نتیجه میانگین آنها نیز صفر می‌شود.

۷۶. گزینه د

مجموع دمای دو شهر A و B، صفر می‌شود زیرا با هم قرینه‌اند، پس داریم:

$$\frac{\overbrace{A+B+C}^{\text{قرینه}}}{3} = \frac{-6}{3} = -2 \rightarrow +2$$

۷۷. گزینه ب

یکی از اعداد $-5 = (-7) + 2$ است. از طرفی مجموع ۳ عدد $3 \times (-1) = -3$ می‌باشد. با طرح معادله‌ی ساده اگر عدد سوم را x در نظر بگیریم، داریم:

$$\Rightarrow x + \frac{(-7) + (-5)}{-12} = -3 \Rightarrow x = -3 - (-12) = +9$$

بزرگ‌ترین عدد $+9$

$$\Rightarrow (+9) - (-7) = 9 + 7 = 16$$

اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عدد 16

۷۸. گزینه ب

نکته ۲۱: هرگاه میانگین چند عدد را با آن چند عدد در نظر گرفته و مجدداً میانگین بگیریم، میانگین تغییر نمی‌کند.

طبق نکته‌ی (۲۱)، میانگین چند عدد داده شده را به دست می‌آوریم:

$$[(+17) + (-1) + (+3) + (-7)] \div 4 = (+12) \div 4 = +3$$

۷۹. گزینه ب

$$5 \times (-4) = -20$$

مجموع ۵ عدد -20

$$-4 + 5 = +1$$

میانگین جدید $+1$

چون یک عدد اضافه می‌شود، تعدادشان ۶ عدد می‌شود. پس می‌توان نوشت: $6 \times (+1) = +6 \rightarrow (+6) - (-20) = +26$ مجموع جدید $+26$

۹۰. گزینه ج

از هر قسمت جدا شده از شکل اصلی، $\frac{1}{4}$ رنگ شده است، پس در کل $\frac{1}{4}$ از شکل اصلی رنگ شده است.

۹۱. گزینه ب

از هر قسمت جدا شده از شکل اصلی، $\frac{1}{3}$ رنگ شده است. پس در مجموع، $\frac{1}{3}$ از شکل اصلی رنگ شده است.

۹۲. گزینه د

اگر کسرها را به ترتیب به دست آوریم، نتیجه می‌شود:

$$\frac{5}{1}, \frac{11}{3}, \frac{17}{5}, \dots$$

$$= \frac{(1 \times 6) - 1}{1}, \frac{(2 \times 6) - 1}{3}, \frac{(3 \times 6) - 1}{5}, \dots, \frac{(20 \times 6) - 1}{(20 \times 2) - 1} = \frac{119}{39}$$

(۱) (۲) (۳) (۲۰)

اعداد گویا و محور

۹۳. گزینه د

کسرها به ترتیب عبارتند از:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9}$$

۹۴. گزینه د

در شکل (الف)، ۴ بردار، هر یک به اندازه $\frac{-3}{4}$ وجود دارد و در شکل (ج) اگر بردار ۳- را به ۴ قسمت

مساوی تقسیم کنیم، هر قسمت $-\frac{3}{4}$ می‌شود. پس $-\frac{3}{4} = -\frac{3}{4}$

$$\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b}$$

نکته ۲۳: در اعداد گویا داریم:

۹۵. گزینه ج

اعداد گویای A، B، C و D به ترتیب عبارتند از: $\frac{+2}{3}$ ، $\frac{-3}{4}$ ، $2\frac{1}{2}$ و $-1\frac{4}{5}$ که با جای‌گذاری در عبارت

۹۶. گزینه الف

داده شده داریم:

$$3 \times \frac{2}{3} - 2 \times \frac{-3}{4} + 4 \times \frac{25}{4} - 25 \times \frac{81}{25} = 2 + \frac{3}{2} + 25 - 81 = -54 + 1\frac{1}{2} = -52\frac{1}{2}$$

۹۷. گزینه الف

اعداد گویای A، B و C به ترتیب عبارتند از: $-2\frac{1}{3}$ ، $-\frac{1}{2}$ و $3\frac{1}{4}$ که با قرار دادن آن‌ها در گزینه‌های (الف)،

(ب)، (ج)، (د)، حاصل همه‌ی گزینه‌ها غیر از (الف)، منفی می‌شود. پس حاصل گزینه‌ی (الف) از بقیه بیشتر است.

۹۸. گزینه الف

ابتدا فاصله‌ی (اختلاف) دو کسر $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{5}$ را به دست آورده و آن را به ۱۶ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم تا

مشخص شود هر قسمت کوچک مشخص شده روی محور، چه کسری از یک واحد کامل است و سپس حساب می‌کنیم که چند واحد کوچک از $\frac{1}{5}$ دور شویم تا به $\frac{1}{4}$ برسیم. داریم:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15} \Rightarrow \frac{2}{15} \div 16 = \frac{2}{15} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{120}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20} = \frac{6}{120} = 6 \times \frac{1}{120}$$

یعنی اگر از $\frac{1}{5}$ ، ۶ واحد کوچک دور شویم به $\frac{1}{4}$ می‌رسیم.

۹۹. گزینه ج

فاصله‌ی هر دو نقطه‌ی متوالی $\overline{AF} = \frac{1}{2} - (-\frac{1}{3}) = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{5}{6} \div 5 = \frac{1}{6}$

$$\Rightarrow xB = -\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{-2+1}{6} = -\frac{1}{6}$$

طول نقطه‌ی B

۱۰۰. گزینه ج $\frac{۸۴}{۴۰۰} = \frac{۲۱}{۱۰۰}$ و $\frac{-۲۰۵}{۴۰۰} = \frac{-۴۱}{۸۰}$ است. کافی است تعداد اعدادی که بین $+۸۴$ و -۲۰۵ بوده و بر ۲۰

$$\frac{۸۰ - (-۲۰۰)}{۲۰} + ۱ = ۱۵$$

$$\frac{-۲۰۰}{۴۰۰}, \frac{-۱۸۰}{۴۰۰}, \frac{-۱۶۰}{۴۰۰}, \dots, \frac{+۴۰}{۴۰۰}, \frac{+۶۰}{۴۰۰}, \frac{+۸۰}{۴۰۰}$$

بخش پذیرند را به دست آوریم. داریم:

آن‌ها عبارت‌اند از:

۱۰۱. گزینه ب

$$۴\frac{۱}{۳} - (-۳\frac{۱}{۴}) = ۷\frac{۷}{۱۲} = \frac{۹۱}{۱۲} \Rightarrow \frac{۹۱}{۱۲} \times \frac{۱}{۷} = \frac{۱۳}{۱۲} = ۱\frac{۱}{۱۲}$$

شناخت اعداد گویا

۱۰۲. گزینه د

نکته ۲۴: اگر مجموعه‌ی بزرگ‌ترین اعدادی که شما دانش‌آموزان عزیز تا قبل از ورود به دانشگاه خواهید خواند را مجموعه‌ی اعداد حقیقی (\mathbb{R}) بنامیم، اعداد این مجموعه به دو دسته‌ی گویا (\mathbb{Q}) و غیرگویا (گنگ یا اصم) تقسیم می‌شوند. اعداد طبیعی، اعداد صحیح، اعداد اعشاری مختوم یا متناوب و کسره‌های علامت‌دار، همگی اعداد گویا محسوب می‌شوند. اعداد گویا (\mathbb{Q}) اعدادی هستند که بتوان آن‌ها را به صورت کسر نوشت به شرط آن‌که صورت و مخرج از اعداد صحیح بوده و مخرج آن‌ها صفر نباشد. مانند $\frac{۳}{۴}$ ، $-\frac{۱}{۵}$ ، $-\frac{۰}{۴}$ یا صفر که اعداد گویا هستند.

توجه داشته باشید که عدد π ، عددی غیرگویا است، زیرا عدد π تقریباً $\frac{۳}{۱۴}$ است نه دقیقاً!

۱۰۳. گزینه د

غیرگویا است. $\sqrt{\pi^2} = \pi$

۱۰۴. گزینه د

۱۰۵. گزینه الف

۱۰۶. گزینه ج. اعداد -۱ و $+۱$.

مقایسه‌ی اعداد گویا

۱۰۷. گزینه الف ابتدا هر کسر را ساده کنید، سپس کسره‌های حاصل را با هم مقایسه کنید.

۱۰۸. گزینه د

نکته ۲۵: در کسرهایی که صورت و مخرج اعداد متوالی هستند، هرچه عدد بزرگ‌تر شود، کسر بزرگ‌تر

$$\frac{۷}{۸} > \frac{۲}{۳}, \frac{۱۳۹۳}{۱۳۹۴} > \frac{۱۳۹۲}{۱۳۹۳}$$

می‌شود. به‌طور مثال:

۱۰۹. گزینه ج

۱۱۰. گزینه ب

$$\left(\frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۳}\right) \div ۲ = \frac{۸}{۱۵} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۴}{۱۵}$$

میانگین دو عدد دقیقاً وسط آن‌ها است.

۱۱۱. گزینه ج

$$۳\frac{۱}{۴} + (-۱\frac{۱}{۲}) = ۲\frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲\frac{۱}{۲} \div ۲ = ۱\frac{۱}{۴}$$

۱۱۲. گزینه الف

$$\frac{-5}{-6} = +\frac{5}{6} < 1$$

مثال:

۱۱۳. گزینه ج

۱۱۴. گزینه الف

حاصل هر یک را به دست آورده، با هم مقایسه می‌کنیم.

$$\frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \quad \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{8}{3}} = \frac{3}{8}, \quad \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{1}{24}}, \quad \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4} = \frac{3}{\frac{4}{1}} = \frac{3}{\frac{1}{8}}$$

۱۱۵. گزینه هـ

۲۰ حالت مختلف وجود دارد که عبارتند از:

$$\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{4}{6}, \frac{4}{7}, \frac{5}{6}, \frac{5}{7}, \frac{5}{8}, \frac{5}{9}, \frac{6}{7}, \frac{6}{8}, \frac{6}{9}, \frac{6}{10}, \frac{7}{8}, \frac{7}{9}, \frac{7}{10}, \frac{8}{9}, \frac{8}{10}, \frac{9}{10}$$

۱۱۶. گزینه د

نقطه‌ی D کم‌ترین عرض و بیش‌ترین طول را از لحاظ مقدار دارد.

توجه: طول و عرض نقطه‌ی D منفی است که در نتیجه کل کسر مثبت می‌شود.

۱۱۷. گزینه ب

ابتدا صورت و مخرج کسر داده شده را بر م.م.ا آنها تقسیم می‌کنیم تا کسر حاصل ساده‌تر نشود:

$$(764, 955) = 191 \rightarrow \frac{764 \div 191}{955 \div 191} = \frac{4}{5}$$

اگر صورت و مخرج کسر $\frac{4}{5}$ را در ۳۸ ضرب کنیم، کسر $\frac{152}{190}$ به دست می‌آید و اولین کسری است که صورتش از ۱۵۰ بیش‌تر

است، اگر صورت و مخرج کسر $\frac{4}{5}$ را در ۶۹ ضرب کنیم، آخرین کسری به دست می‌آید که مخرجش از ۳۵۰ کم‌تر است. داریم:

$$\frac{4 \times 38}{5 \times 38} = \frac{152}{190}, \quad \frac{4 \times 39}{5 \times 39} = \frac{156}{195}, \quad \frac{160}{200}, \dots, \frac{4 \times 69}{5 \times 69} = \frac{276}{345}$$

$$69 - 38 + 1 = 31 + 1 = 32$$

تعداد کسرها با تعداد اعداد از ۳۸ تا ۶۹ برابر است:

۱۱۸. گزینه ب

ابتدا نامساوی را نوشته و سپس هر سه طرف را بر ۶۰ تقسیم می‌کنیم (یا در $\frac{1}{60}$ ضرب می‌کنیم). داریم:

$$\frac{4}{5} < \frac{60}{x} < 1 \Rightarrow \frac{4}{5} \times \frac{1}{60} < \frac{1}{x} < \frac{1}{60} \Rightarrow \frac{1}{75} < \frac{1}{x} < \frac{1}{36}$$

$$\text{تعداد} = 75 - 36 - 1 = 38$$

بنابراین کافی است تعداد اعداد طبیعی بین ۳۶ تا ۷۵ را به دست آوریم:

$$\frac{4}{11} < \frac{x}{2014} < \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{2014 \times 4}{11} < x < \frac{2014 \times 5}{12} \Rightarrow \frac{10070}{11} < x < \frac{10070}{12}$$

۱۱۹. گزینه ج

$$\Rightarrow 732, 36 < x < 839, 16$$

از طرفی، x عددی طبیعی است. پس

$$x = 733, 734, 735, \dots, 839$$

می‌توان نوشت:

که تعداد آنها $839 - 733 + 1 = 107$ تا است.

۱۲۰. گزینه ب

اگر صورت کسر A را با m و مخرج کسر A را با n نشان دهیم، داریم:

$$A = \frac{m}{n}, \quad B = \frac{10000m + 1387}{10000n + 1387}, \quad C = \frac{10000m + 2008}{10000n + 2008}, \quad D = \frac{10000m + 2008}{10000n + 1387}$$

صورت دو کسر C و D با هم مساوی‌اند، پس کسر D که مخرج کوچک‌تری دارد، بزرگ‌تر است. مخرج دو کسر B و D با هم

مساوی‌اند، پس کسر D که صورت بزرگ‌تری دارد از کسر B بزرگ‌تر است و با جایگذاری $m = 1$ و $n = 2$. مشخص می‌شود که

$$A < B < C < D$$

است. پس داریم:

۱۲۱. گزینه د

اگر کسر کوچک‌تر از واحد باشد، با اضافه کردن عددی طبیعی به صورت و مخرج، مقدار کسر بیش‌تر و اگر

کسر بزرگ‌تر از واحد باشد، مقدار آن کم‌تر و اگر کسر برابر ۱ واحد باشد، مقدار آن تغییر نمی‌کند.