به نام پروردگار مهربان

هندسه دوازدهم

ریاضی

آموزش به سبک لقمه

آرین تفضلی‌زاده

مهروماه

فهرست

فصل اول

ماتریس

و کاربردها

درس ۱ ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

وعدهٔ ۱

ماتریس و مفاهیم اولیه

هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و ستون، یک **ماتریس** نامیده می‌شود. هر عدد حقیقی واقع در هر ماتریس را درایهٔ آن **ماتریس** می‌نامیم. به درایهٔ ماتریس اصطلاحاً عضو یا عنصرهم گفته می‌شود. معمولاً ماتریس‌ها را با حروف بزرگ الفبای لاتین مانند A ، B و ... نام‌گذاری می‌کنیم. در حالت کلی اگر ماتریسی دارای m سطر و n ستون باشد، می‌نویسیم $A_{m\times n}$ و می‌خوانیم A ماتریسی از مرتبهٔ m در n است. برای هر درایهٔ ماتریس و به‌منظور مشخص کردن جایگاه آن، دو اندیس درنظر می‌گیریم که اندیس سمت چپ شمارهٔ سطر و اندیس سمت راست شمارهٔ ستون را مشخص می‌کند.

یعنی درایهٔ a_{ij} درایه‌ای است که در سطر i ام و ستون j ام ماتریس قرار دارد. درایهٔ a_{ij} را درایهٔ عمومی ماتریس A می نامیم.

برای نمونه: ماتریس A دارای m سطر و n ستون است. هر درایه را باتوجه به جایگاه آن توسط اندیس‌های i و j نمایش داده‌ایم:

$$A_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

مثال: اگر $A=[a_{ij}]$ ماتریسی ۳×۴ باشد به طوری که برای هر $i=j$ داشته باشیم $a_{ij}=۷$ و برای هر $i>j$ داشته باشیم $a_{ij}=i+j$ و برای هر $i<j$ داشته باشیم $a_{ij}=i^۲$ در این صورت ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص کنید. (تمرین کتاب درسی)

پاسخ

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} & a_{۱۴} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} & a_{۲۴} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} & a_{۳۴} \end{bmatrix}_{۳\times۴}$$

$$a_{ij}=\begin{cases} ۷ & ; i=j \\ i+j & ; i>j \\ i^۲ & ; i<j \end{cases} \Rightarrow A=\begin{bmatrix} ۷ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۳ & ۷ & ۴ & ۴ \\ ۴ & ۵ & ۷ & ۹ \end{bmatrix}_{۳\times۴}$$

مثال: ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ را با فرض $a_{ij}=ij$ نمایش دهید.

پاسخ

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix}_{۳\times۳} \Rightarrow A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۴ & ۶ \\ ۳ & ۶ & ۹ \end{bmatrix}_{۳\times۳}$$

معرفی چند ماتریس خاص

الف **ماتریس مربعی:** اگر در ماتریس A تعداد سطرها با تعداد ستون‌ها برابر و مساوی n باشد، A را یک **ماتریس مربعی** از مرتبهٔ n $(n\times n)$ می‌نامیم. ماتریس‌های زیر همگی مربعی هستند:

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}_{۲\times۲} \quad , B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۱ & ۳ & ۷ \\ ۴ & ۹ & ۱۱ \end{bmatrix}_{۳\times۳} \quad , C=[۵]_{۱\times۱}=۵$$

درس ۲ وارون ماتریس و دترمینان

وعدهٔ ۵
وارون و دترمینان ماتریس

برای هر ماتریس مربعی مانند A، وارون ماتریس (در صورت وجود) ماتریسی است مانند B به‌طوری که: $A \times B = B \times A = I$
در این صورت B را وارون ماتریس A می‌نامیم و با نماد A^{-1} نمایش می‌دهیم. یکی از کاربردهای ماتریس وارون، حل دستگاه معادلات است.

مثال: نشان دهید $B=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$، وارون $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ است.

پاسخ کافی است باتوجه به تعریف ماتریس وارون نشان دهیم:

$$A \times B = B \times A = I$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

بنابراین ماتریس B، وارون ماتریس A است.

روش محاسبهٔ وارون یک ماتریس:

برای محاسبهٔ وارون یک ماتریس ۲ × ۲ مانند $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ (در صورت وجود) باید ماتریسی مانند $B=\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ بیابیم که:

$$AB = BA = I$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

که این تساوی e، f، g و h را برحسب a، b، c و d نتیجه می‌دهد و ماتریس B یا $A^{-۱}$ به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$A^{-۱}=\begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

هم‌چنین با توجه به تعریف ضرب عدد در ماتریس می‌توان نوشت:

$$A^{-۱}=\frac{۱}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

در این رابطه، عدد $ad-bc$ را (حاصل ضرب عناصر قطر اصلی، تفاضلشان از حاصل ضرب عناصر قطر فرعی) دترمینان ماتریس می‌نامیم و آن را با نمادهای $|A|$ یا $\det(A)$ نشان می‌دهیم.

بنابراین اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ را داشته باشیم، وارون آن طبق رابطهٔ مقابل به دست می‌آید:

$$A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

توجه: دترمینان ماتریس‌هایی که بالا و پایین قطر اصلی همهٔ عناصر آن صفر هستند (ماتریس‌های قطری) برابر با حاصل‌ضرب درایه‌های واقع بر قطر اصلی است.

$$B=\begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & ۰ & c \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = abc$$

چاشنی: ویژگی‌های دترمینان:

۱ دترمینان هر ماتریس عددی حقیقی است.

۲ $|A \pm B| \neq |A| \pm |B|$

۳ $|A^n| = |A|^n$

۴ به شرطی که A و B مربعی باشند. $|AB| = |A||B|$

۵ n مرتبهٔ ماتریس است. $|\lambda A| = \lambda^n\, |A|$

(اگر از λ برابر یک ماتریس بخواهیم دترمینان بگیریم کافی است λ را به‌توان مرتبه رسانده و در همان مقدار دترمینان A، ضرب کنیم)

مثال: اگر $A = ۲\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & |A| \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس $A^۲$ را بیابید. (مشابه تمرین کتاب درسی)

پاسخ می‌دانیم: $|A^n| = |A|^n$

$$|A| = \left| ۲\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & |A| \end{vmatrix} \right| = ۲^۲ \begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & |A| \end{vmatrix}$$

$$|A| = ۴ \times (|A| - ۶) \Rightarrow -۳|A| = -۲۴ \Rightarrow |A| = ۸$$

$$|A|^۲ = (۸)^۲ = ۶۴$$

مثال: اگر A ماتریسی ۳×۳ و اسکالر باشد و $a_{۱۱} = ۴$ در این صورت $|A|$ را بیابید.

پاسخ

$$a_{۱۱} = ۴ \Rightarrow A = \begin{bmatrix} ۴ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ۴ \times ۴ \times ۴ = ۴^۳ = ۶۴$$

مثال: اگر A ماتریسی ۳×۳ باشد و $|A| = ۵$ در این صورت حاصل $||A|A|$ را بیابید.

پاسخ

$$|A_{۳\times۳}| = ۵ \Rightarrow \left||A|A\right| = |۵A| = ۵^۳ |A|$$

$$\Rightarrow ۵^۳ \times ۵ = ۵^۴ = ۶۲۵$$

آزمون فصل اول

۱. فرض کنید $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \\ ۵ & ۶ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -۳ & -۲ \\ ۱ & -۵ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}$، یک ماتریس ۲×۳ مانند C را طوری پیدا کنید که $A + B - C = O_{۳\times۲}$.

پاسخ

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \\ ۵ & ۶ \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -۳ & -۲ \\ ۱ & -۵ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$$

$$A+B-C=O_{۳\times۲}\Rightarrow A+B=\begin{bmatrix}-۲ & ۰\\ ۴ & -۱\\ ۹ & ۹\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A+B=C\Rightarrow C=\begin{bmatrix}-۲ & ۰\\ ۴ & -۱\\ ۹ & ۹\end{bmatrix}$$

۲. در دستگاه $\begin{cases}\mathbf{ax+by=۲}\\ \mathbf{cx+dy=-۱}\end{cases}$ معکوس ماتریس ضرایب مجهولات به صورت $\begin{bmatrix}۰ & -۱\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}$ است. $\mathbf{x+y}$ را به‌دست آورید.

پاسخ

$$\begin{cases}ax+by=۲\\ cx+dy=-۱\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & -۱\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲\\ -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱\\ ۳\end{bmatrix}\Rightarrow x+y=۴$$

۳. اگر $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}$ مقادیر α و β را طوری بیابید که داشته باشیم: $\mathbf{A}^۲=\alpha\mathbf{A}+\beta\mathbf{I}$

پاسخ

$$\mathbf{A}^۲=\alpha\mathbf{A}+\beta\mathbf{I}$$

$$A^۲=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۷ & ۱۰\\ ۱۵ & ۲۲\end{bmatrix}$$

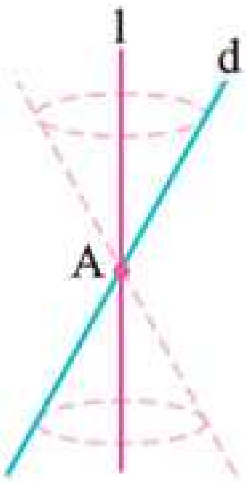
فصل دوم

آشنایی با مقاطع مخروطی

درس ۱ آشنایی با مقاطع مخروطی و مکان هندسی

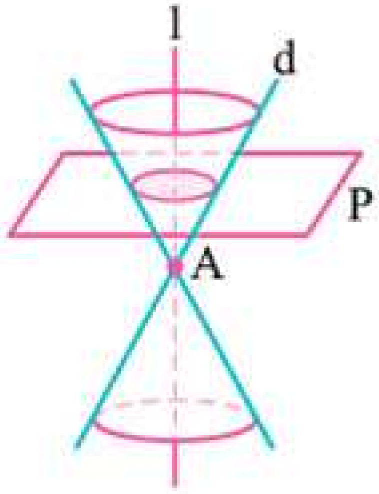
وعدهٔ ۱

رویهٔ مخروطی

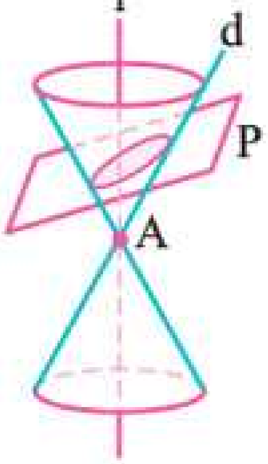


فرض کنید دو خط d و l در نقطهٔ A، متقاطع (غیرعمود) باشند. سطح حاصل از دوران خط d حول خط l را یک رویهٔ مخروطی (سطح مخروطی) می‌نامیم، در این حالت خط l را محور، نقطهٔ A را رأس و خط d را مولد این سطح مخروطی می‌نامیم.

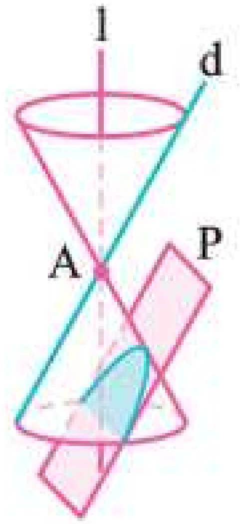
حال به‌طور شهودی با فصل مشترک یک صفحه و یک سطح مخروطی، با توجه به حالت‌های مختلف صفحه و سطح مخروطی نسبت به هم، آشنا می‌شویم.



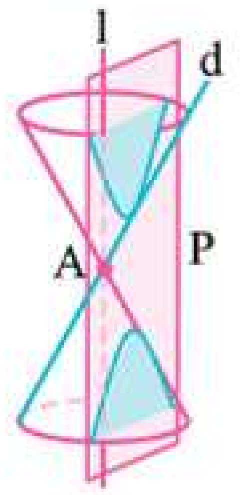
الف در حالتی که صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل **دایره** است.



ب در حالتی که صفحهٔ P بر محور l عمود نباشد و با مولد d نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمهٔ مخروط را قطع کند، سطح حاصل یک **بیضی** خواهد بود.



پ اگر صفحهٔ P با مولد d موازی باشد و از رأس مخروط عبور نکند در این‌صورت فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی یک **سهمی** است. (در این‌صورت اگر صفحهٔ P از رأس سطح مخروطی عبور کند، فصل مشترک آن‌ها یک خط است.)



ت اگر صفحهٔ P به‌گونه‌ای باشد که هر دو تکهٔ بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور l نباشد، در این‌صورت فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی یک **هذلولی** است.

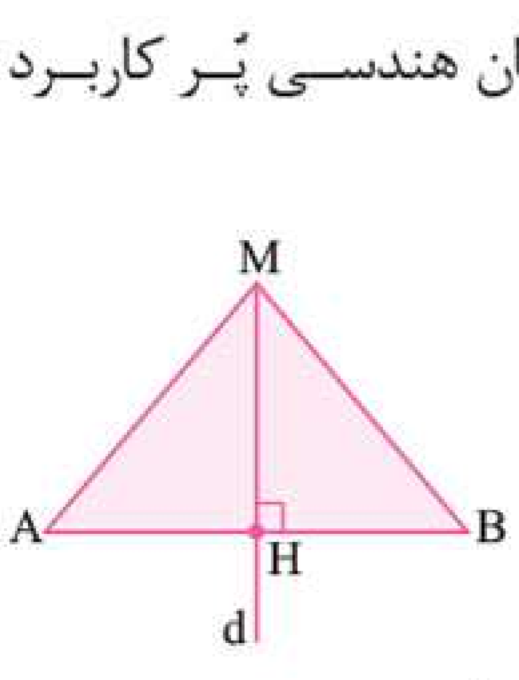
وعدهٔ ۲

مکان هندسی

مکان هندسی: مجموعهٔ نقاطی از صفحه (فضا) که همهٔ آن‌ها یک ویژگی مشترک داشته باشند، هم‌چنین هر نقطه‌ای که آن ویژگی را داشته باشد، عضو این مجموعه است.

برای درک بهتر تعریف فوق به دو مکان هندسی پُر کاربرد (عمودمنصف و نیمساز) می‌پردازیم:

الف **عمودمنصف**



هر نقطه روی عمودمنصف پاره‌خط، از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است.

هر نقطه‌ای که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، حتماً روی عمودمنصف آن است.

اگر خط d عمودمنصف پاره‌خط AB باشد، در این‌صورت:

$$M \in d \Leftrightarrow MA = MB$$

درس ۳ بیضی و سهمی

وعدهٔ ۶

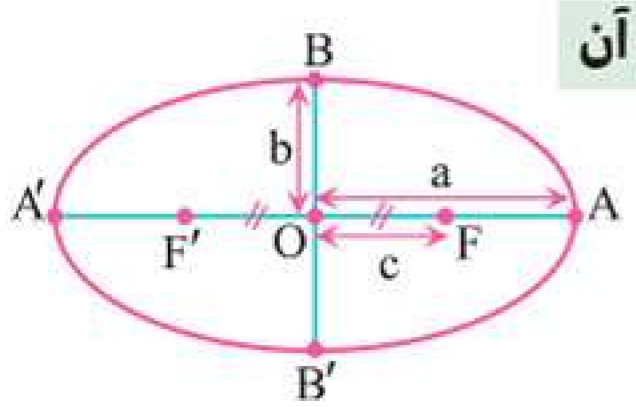
بیضی

بیضی: مجموع نقاطی از صفحه که مجموع فاصلهٔ همه آن‌ها از دو نقطهٔ ثابت همواره مقدار ثابتی است، این **نقاط ثابت را کانون‌های بیضی** گوییم.

تعریف براساس مکان هندسی

مکان هندسی مجموعه نقاطی از صفحه است که مجموع فاصلهٔ آن‌ها از کانون‌های بیضی همواره مقدار ثابتی است که به مقدار ثابت ۲a و نقاط ثابت کانون‌های بیضی می‌گوییم.

شکل هندسی بیضی و نقاط مهم آن



معرفی نقاط مهم بیضی

۱ $A\,,\,A'$: این دو نقطه را **رئوس کانونی** بیضی می‌نامیم.

۲ $B\,,\,B'$: این دو نقطه را **رئوس ناکانونی** بیضی می‌نامیم.

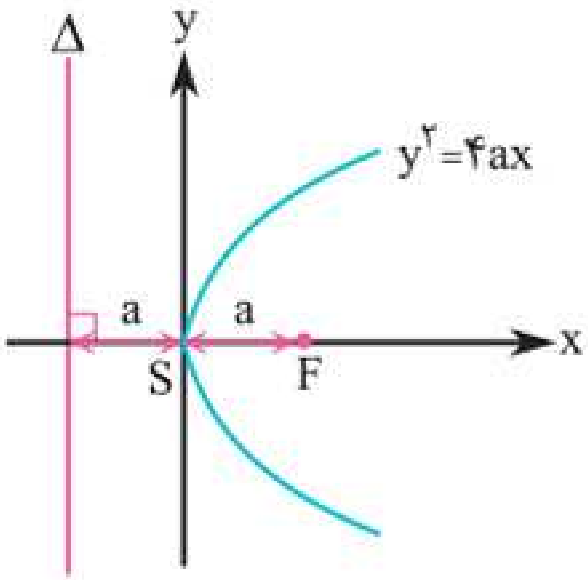
۳ $F\,,\,F'$: این دو نقطه را **کانون‌های بیضی** می‌نامیم.

۴ O: مرکز بیضی به مختصات $O(\alpha\,,\beta)$، بین نقاط A و A'، B و B'، F و F' است، یعنی برای به‌دست آوردن مختصات آن کافی است به صورت زیر عمل کنیم:

$$O=\frac{A+A'}{۲}=\frac{B+B'}{۲}=\frac{F+F'}{۲}$$

فرم کلی معادلهٔ شکل سهمی به مرکز مبدأ مختصات

۱ سهمی افقی رو به راست



مرکز این سهمی مبدأ مختصات است که آن را با نماد S نمایش می‌دهیم:

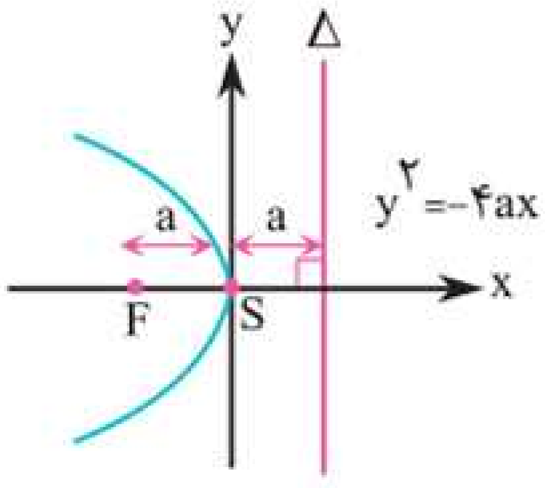
$S(0\,,0)$: مرکز سهمی

$\Delta : x = -a$: خط هادی

$F(a\,,0)$: کانون سهمی

فاصلهٔ کانون تا رأس سهمی و رأس سهمی تا خط هادی همواره a واحد است. به این عدد مثبت (a) فاصلهٔ کانونی سهمی گوییم و خطی که از کانون سهمی به خط هادی عمود می‌شود را محور تقارن سهمی می‌نامیم که در این‌جا محور x ها به عنوان محور تقارن سهمی است. که به آن محور کانونی یا محور سهمی نیز می‌گویند.

۲ سهمی افقی رو به چپ

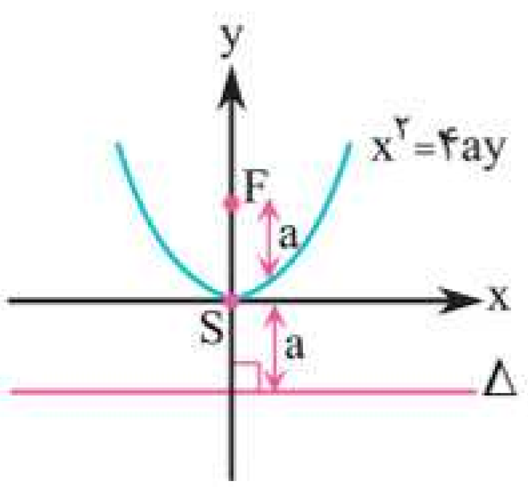


$S(0\,,0)$:مرکز سهمی

$\Delta : x = a$:خط هادی

$F(-a\,,0)$:کانون سهمی

۳ سهمی قائم رو به بالا

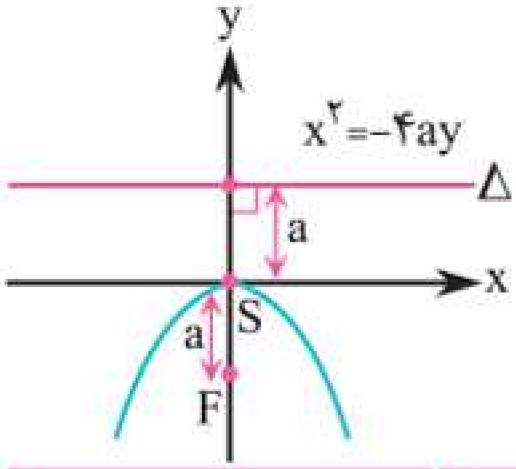


$S(0\,,0)$:مرکز سهمی

$F(0\,,a)$:کانون سهمی

$\Delta : y = -a$:خط هادی

۴ سهمی قائم رو به پایین



مرکز سهمی: $S(۰,۰)$

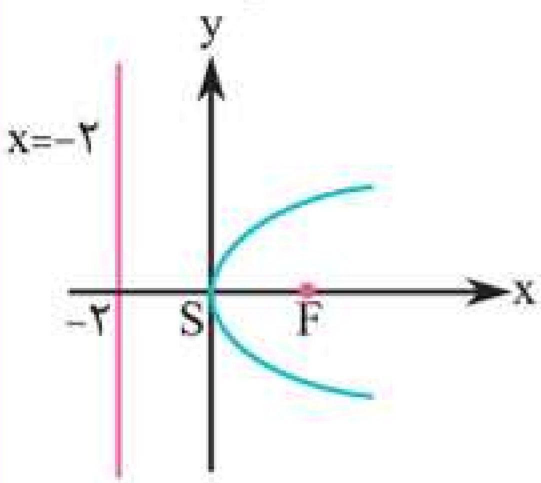
کانون سهمی: $F(۰,-a)$

خط هادی: $\Delta : y = a$

معادلهٔ سهمی $(a>۰)$	کانون	خط هادی	محور سهمی	دهانهٔ سهمی
$y^۲ = ۴ax$	$(a,۰)$	$x=-a$	محور x	روبه راست
$y^۲ = -۴ax$	$(-a,۰)$	$x=a$	محور x	رو به چپ
$x^۲ = ۴ay$	$(۰,a)$	$y=-a$	محور y	رو به بالا
$x^۲ = -۴ay$	$(۰,-a)$	$y=a$	محور y	رو به پایین

مثال: معادلهٔ $y^۲ = ۸x$ مربوط به چه شکلی است؟

پاسخ این معادله، یک سهمی است که دهانهٔ آن به سمت راست و محور آن محور x هاست.
با قرار دادن $۴a = ۸$ داریم $a = ۲$ لذا کانون آن $F(۲,۰)$ و خط هادی آن موازی محور yها، به معادلهٔ $x = -۲$ و رأس آن مبدأ مختصات است.



$S(۰,۰)$

$F(۲,۰)$

$\Delta : x = -۲$

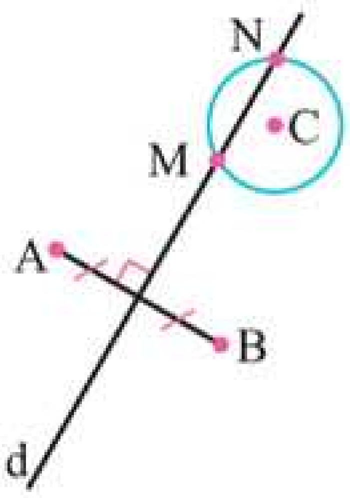
آزمون فصل دوم

۱. نقاط A ، B و C در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از C به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشد (بحث کنید).

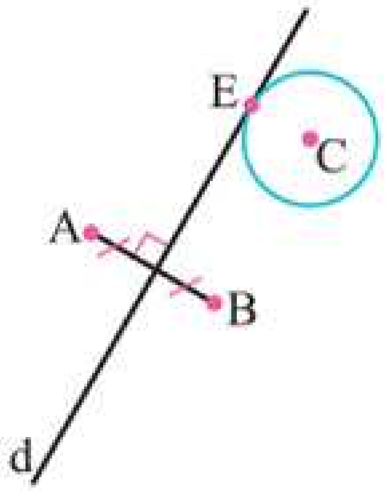
پاسخ مکان هندسی نقاطی که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله‌اند عمودمنصف پاره‌خط AB (خط d) است. مکان هندسی نقاطی که از نقطهٔ C به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر هستند دایره‌ای به مرکز C و شعاع ۳ سانتی‌متر است. نقطهٔ تلاقی خط d و دایره جواب مسئله است.

بحث در وجود جواب:

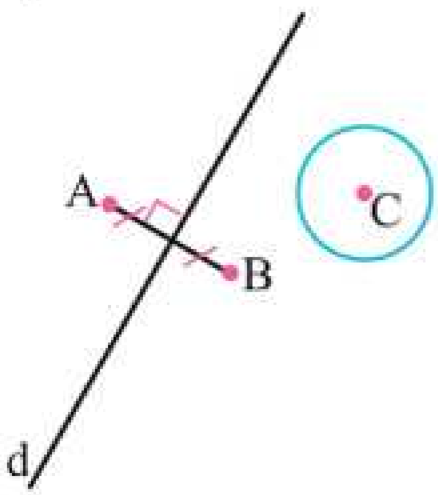
- اگر خط d ، دایره را در دو نقطه (M و N) قطع کند، مسئله دو جواب دارد.



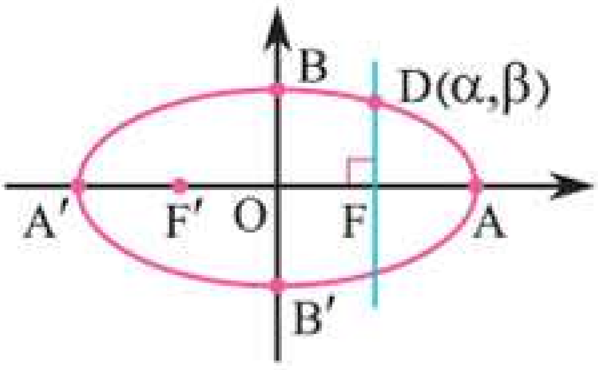
- اگر خط d ، بر دایره مماس باشد، مسئله یک جواب (E) دارد.



- اگر خط d، دایره را قطع نکند، مسئله جوابی ندارد.



۲. مرکز بیضی بر مبدأ مختصات و قطرهای آن مانند شکل بر محورهای x و y منطبق هستند و فاصلهٔ F از هر دو نقطهٔ O و A برابر ۴ است. اگر خطی که در نقطهٔ F بر AA' عمود کرده، این بیضی را در نقطهٔ D قطع کرده باشد، مختصات D را به‌دست آورید.



پاسخ

$$OF = FA = ۴ \Rightarrow \alpha = ۴$$

$$FF' = OF + OF' = ۴ + ۴ = ۸ \Rightarrow ۲c = ۸ \Rightarrow c = ۴$$

$$OA = OF + FA = ۴ + ۴ = ۸ \Rightarrow a = ۸$$

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow ۸^۲ = b^۲ + ۴^۲ \Rightarrow b = \sqrt{۶۴ - ۱۶}$$

$$= \sqrt{۴۸} = ۴\sqrt{۳}$$

اندازهٔ DF برابر نصف کوتاه‌ترین وتر کانونی است، بنابراین:

$$DF = \frac{b^۲}{a} = \frac{(۴\sqrt{۳})^۲}{۸} = \frac{۱۶ \times ۳}{۸} = ۶ \Rightarrow \beta = ۶$$

بنابراین: $D(۴\ ,۶)$

۳. نقاط $F'(۲ - \sqrt{۵}\ ,\ ۰)$ و $F(۲ + \sqrt{۵}\ ,\ ۰)$ دو کانون یک بیضی و $A(۵\ ,\ ۰)$ نقطه‌ای از آن است. خروج از مرکز بیضی را محاسبه کنید.

پاسخ

$$FF' = ۲c = \sqrt{(۲ + \sqrt{۵} - (۲ - \sqrt{۵}))^۲ + (۰\ ,\ ۰)^۲} = ۲\sqrt{۵}$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{۵}$$

$$AF + AF' = ۲a$$

$$\Rightarrow \sqrt{(۵ - ۲ - \sqrt{۵})^۲ + ۰^۲} + \sqrt{(۵ - ۲ + \sqrt{۵})^۲ + ۰^۲} = ۲a$$

فصل سوم

بردارها

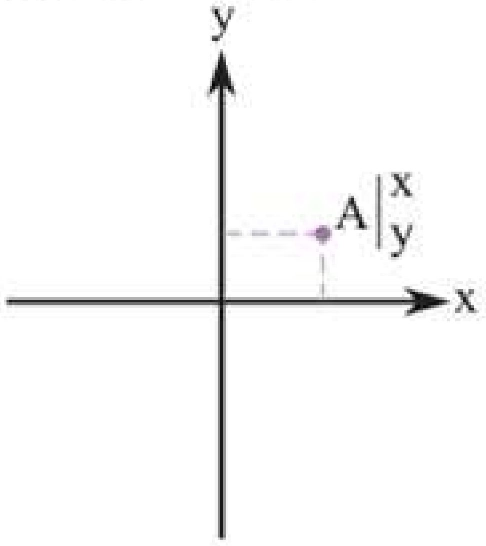
درس ۱ معرفی فضای $\mathbb{R}^3$

وعدهٔ ۱

معرفی فضای $\mathbb{R}^2$

در فضای دوبُعدی هر نقطه از صفحه توسط یک زوج مرتب مانند (a , b) که $a , b \in \mathbb{R}$ مشخص می‌شوند و هر زوج مرتب دقیقاً مختصات یک نقطه را مشخص می‌کند. با توجه به این‌که هر نقطه از صفحه را توسط یک زوج مرتب (a , b) نمایش می‌دهیم در این صورت مجموعهٔ $\mathbb{R}^2$ شامل همهٔ نقاط صفحه می‌باشد و آن را به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x , y) \mid x , y \in \mathbb{R}\}$$



نمایش هریک از نقاط مجموعهٔ فوق در دستگاه مختصات دکارتی دوبُعدی انجام می‌شود.

وعدهٔ ۲

معرفی فضای $\mathbb{R}^3$

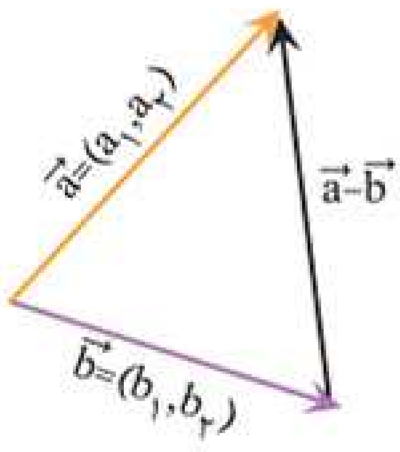
مجموعهٔ تمام سه‌تایی‌های مرتب (a , b , c) که در آن‌ها a، b و c اعداد حقیقی‌اند را به‌صورت زیر درنظر می‌گیریم و به آن فضای $\mathbb{R}^3$ (فضای سه‌بُعدی) می‌گوییم.

$$\mathbb{R}^3 = \{(a , b , c) \mid a , b , c \in \mathbb{R}\}$$

درس ۲ ضرب داخلی و ضرب خارجی بردارها

وعدهٔ ۱۱

ضرب داخلی بردارها



برای یافتن ضرب داخلی بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ نیازمند داشتن مقدار زاویهٔ بین آن‌ها هستیم. با توجه به شکل ابتدا بردار تفاضل $\vec{a}-\vec{b}$ را مطابق شکل رسم می‌کنیم تا مثلثی به طول اضلاع زیر به‌دست آید:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \qquad |\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

$$|\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2}$$

اکنون با استفاده از قضیهٔ کسینوس‌ها که سال گذشته آموخته‌اید می‌توان نوشت:

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a}-\vec{b}|^2) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a}-\vec{b}|^2)}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

از طرفی صورتِ کسر به دست آمده را می‌توان با توجه به اندازه‌های اضلاع مثلث که قبلاً محاسبه شده‌اند، ساده کرد:

$$\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$$

$$= \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - (a_1 - b_1)^2 - (a_2 - b_2)^2)$$

$$= \frac{1}{2}(2a_1b_1 + 2a_2b_2) = a_1b_1 + a_2b_2$$

پس داریم:

$$\cos\theta = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

با محاسبهٔ عبارت سمت راست و حل معادله مقدار $0 \le \theta \le \pi$ به‌دست می‌آید. کمیتی که در سمت راست عبارت بالا در صورت کسر قرار دارد را معمولاً با نماد $\vec{a} \cdot \vec{b}$ نشان می‌دهند و به آن حاصل ضرب داخلی، نقطه‌ای یا اسکالر می‌گویند.

پس داریم:

$$\cos\theta = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{|\vec{a}||\vec{b}|} \Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

هم‌چنین از روابط فوق داریم: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

به‌طور مشابه حاصل ضرب داخلی دو بردار در $\mathbb{R}^3$ نیز قابل تعریف است.

تعریف ضرب داخلی در فضای $\mathbb{R}^3$

اگر $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ دو بردار در $\mathbb{R}^3$ باشند، در این صورت ضرب داخلی $\vec{a}$ در $\vec{b}$ را که با نماد $\vec{a} \cdot \vec{b}$ نمایش می‌دهیم که به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

نکته: حاصل ضرب داخلی دو بردار همواره یک **عدد** است.

مثال: بر روی دو بردار $\vec{a}=3\mathbf{i}+3\mathbf{j}$ و $\vec{b}=\mathbf{i}-\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ متوازی‌الاضلاعی ساخته شده است. زاویهٔ بین این دو بردار را بیابید.

پاسخ باتوجه به رابطه‌ای که داشتیم:

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$\vec{a}=(3,3,0)\ ,\ \vec{b}=(1,-1,-2),|\vec{a}|=\sqrt{18}\ ,|\vec{b}|=\sqrt{6}$$

$$\cos\theta=\frac{3+(-3)+0}{\sqrt{18}\times\sqrt{6}}=0\Rightarrow\hat{\theta}=90^\circ=\frac{\pi}{2}$$

وعدهٔ ۱۲

خواص ضرب داخلی

خاصیت جابه‌جایی: ۱ $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

اثبات:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=b_1a_1+b_2a_2+b_3a_3=\vec{b}\cdot\vec{a}$$

۲ $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

اثبات: $\vec{a}\cdot\vec{a}=a_1a_1+a_2a_2+a_3a_3=a_1^2+a_2^2+a_3^2=|\vec{a}|^2$

خاصیت شرکت‌پذیری: ۳ $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

اثبات: $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=a_1(b_1+c_1)+a_2(b_2+c_2)+a_3(b_3+c_3)$

$$=a_1b_1+a_1c_1+a_2b_2+a_2c_2+a_3b_3+a_3c_3$$

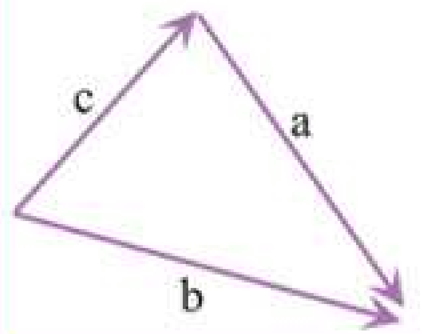
$$=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$$

۴ $\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Rightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=0\xrightarrow[|\vec{b}|\neq 0]{|\vec{a}|\neq 0}\cos\theta=0$$

چاشنی: اگر سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ هم صفحه باشند، حاصل ضرب مختلط آن‌ها $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ برابر صفر است.

مثال: اگر بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ با اندازه‌های ۳، ۴ و ۶ مانند شکل زیر باشند حاصل $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ را بیابید.



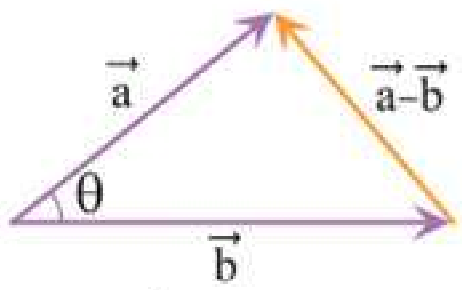
پاسخ هر ۳ بردار در یک صفحه‌اند پس حاصل‌ضرب مختلط آن‌ها (حجم ساخته شده) برابر صفر خواهد بود.

آزمون فصل سوم

۱. ثابت کنید θ زاویهٔ بین دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$$

پاسخ



فرض می‌کنیم دو بردار $\vec{a}=(a_۱\ ,\ a_۲)$ و $\vec{b}=(b_۱\ ,\ b_۲)$ در فضای دوبعدی باشند.
مطابق شکل ضلع سوم مثلث برابر است با:

$$\vec{a}-\vec{b}=(a_۱-b_۱\ ,\ a_۲-b_۲)$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_۱^۲+a_۲^۲}\ ,\ |\vec{b}|=\sqrt{b_۱^۲+b_۲^۲}$$

$$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(a_۱-b_۱)^۲+(a_۲-b_۲)^۲}$$

طبق قضیهٔ کسینوس‌ها:

$$|\vec{a}-\vec{b}|^۲=|\vec{a}|^۲+|\vec{b}|^۲-۲|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$$\Rightarrow ۲|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = |\vec{a}|^۲ + |\vec{b}|^۲ - |\vec{a}-\vec{b}|^۲$$

$$\Rightarrow ۲|a||b|\cos\theta = a_۱^{۲} + a_۲^{۲} + b_۱^{۲} + b_۲^{۲}$$

$$-[(a_۱ - b_۱)^۲ + (a_۲ - b_۲)^۲] = a_۱^{۲} + a_۲^{۲} + b_۱^{۲} + b_۲^{۲}$$

$$-(a_۱^{۲} + b_۱^{۲} - ۲a_۱b_۱ + a_۲^{۲} + b_۲^{۲} - ۲a_۲b_۲)$$

$$= ۲a_۱b_۱ + ۲a_۲b_۲ \Rightarrow |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = \underbrace{a_۱b_۱ + a_۲b_۲}_{\vec{a}\cdot\vec{b}\ \text{(تعریف ضرب داخلی)}}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{a\cdot b}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

رابطهٔ فوق در فضای سه بعدی نیز قابل تعمیم است.

۲. به‌ازای هر دو بردار دلخواه $\vec{u}$ و $\vec{v}$ نامساوی کشی ـ شوارتز را اثبات کنید.

پاسخ نامساوی کشی ـ شوارتز: $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq |\vec{u}||\vec{v}|$

طبق تعریف ضرب داخلی داریم: $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$

$$\left.\begin{array}{r} \xrightarrow{\text{اندازه}} |\vec{u}\cdot\vec{v}| = ||\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta| = |\vec{u}||\vec{v}||\cos\theta| \\ -۱ \leq \cos\theta \leq ۱ \Rightarrow |\cos\theta| \leq ۱ \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow |\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq |\vec{u}||\vec{v}|$$

۳. اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هم‌طول بوده و $|\vec{a}-\vec{b}| = ۱$ و $|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{۳}$ باشد، زاویهٔ بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ چقدر است؟

پاسخ

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| \Rightarrow \begin{cases} |\vec{a}-\vec{b}| = ۲|\vec{a}|\sin\frac{\theta}{۲} \\ |\vec{a}+\vec{b}| = ۲|\vec{a}|\cos\frac{\theta}{۲} \end{cases}$$

پیوست
فرمول‌نامه

فصل ۱ ماتریس و کاربردها

۱ تساوی دو ماتریس:

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}\ ,\ B=[b_{ij}]_{m\times n}$$

$$\forall_{i,j}\ ,\ a_{ij}=b_{ij}\Leftrightarrow[a_{ij}]=[b_{ij}]$$

۲ جمع و تفاضل دو ماتریس:

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}\ ,\ B=[b_{ij}]_{m\times n}$$

$$\Rightarrow A\pm B=[a_{ij}]\pm[b_{ij}]=[a_{ij}\pm b_{ij}]$$

۳ ضرب یک عدد در ماتریس:

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}\ ,\ r\in\mathbb{R}\Rightarrow rA=r[a_{ij}]_{m\times n}=[ra_{ij}]_{m\times n}$$

۴ خاصیت جابه‌جایی در جمع:

$$A+B=B+A$$

۵ خاصیت شرکت‌پذیری در جمع:

$$A+(B+C)=(A+B)+C$$

۶ خاصیت عضو خنثی برای عمل جمع ماتریس‌ها:

$$A+\bar{O}=\bar{O}+A=A$$

۷ خاصیت عضو قرینه برای عمل جمع ماتریس‌ها:

$$A+(-A)=(-A)+A=\bar{O}$$

۸ $r(A\pm B)=rA\pm rB$

۹ $(r\pm s)A=rA\pm sA$

۱۰ $rA=rB\ ,\ r\neq 0\Rightarrow A=B$

۱۱ $A=B\ ,\ r\neq 0\Rightarrow rA=rB$

فصل ۲ آشنایی با مقاطع مخروطی

۱ معادلهٔ استاندارد دایره:

$$(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=r^۲$$

$$O(\alpha\,,\beta)\,,\, r=\sqrt{r^۲}$$

۲ معادلهٔ گستردهٔ (ضمنی) دایره:

$$x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$$

$$O(-\frac{a}{۲}\,,-\frac{b}{۲})$$

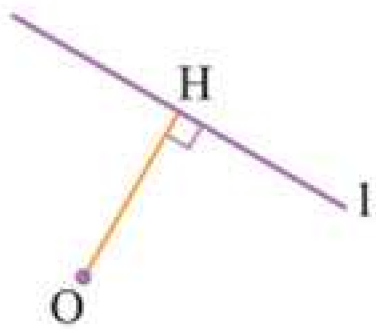
$$r=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}$$

۳ فاصلهٔ نقطه از خط:

$$l: ax+by+c=۰$$

$$O(x_۰\,,y_۰)$$

$$OH=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$



۴ در هر بیضی فاصلهٔ مرکز تا هر رأس کانونی A و A' همواره برابر a واحد است:

$$|OA|=|OA'|=a$$

۵ در هر بیضی فاصلهٔ مرکز تا رأس‌های ناکانونی B و B' همواره برابر b واحد است:

$$|OB|=|OB'|=b$$

امتحان نهایی دی ۱۴۰۰

۱. درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) اگر A و B دو ماتریس ۲×۲ باشند، آن‌گاه:

$$|AB|=|A||B|$$

ب) در حالتی که صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی (I) عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، فصل‌مشترک حاصل، یک دایره خواهد بود.

پ) در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر صفر باشد، بیضی تبدیل به یک پاره‌خط می‌شود.

ت) نقطه با مختصات $(-۴,۳,-۲)$، در ناحیه (کنج) شمارهٔ ۵ محورهای مختصات سه بعدی، واقع است.

۲. جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

الف) هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و ستون .... نامیده می‌شود.

ب) مکان هندسی، مجموعه نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همهٔ آن‌ها یک ویژگی .... داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد، عضو این مجموعه باشد.

پ) اگر مجموع فواصل نقطهٔ A از دو کانون بیضی بیشتر از طول قطر بزرگ بیضی باشد، نقطهٔ A در .... بیضی است.

ت) اگر برای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داشته باشیم: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$، در این‌صورت زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر .... است.

امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۱

۱. عبارت‌های زیر را کامل کنید.

الف) اگر ماتریس $\begin{bmatrix} r & m-1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ یک ماتریس همانی باشد، حاصل $m+r$ برابر با .... است.

ب) اگر در بیضی خروج از مرکز به عدد صفر نزدیک شود، کشیدگی بیضی کمتر شده و بیضی به .... نزدیک‌تر می‌شود.

پ) نقطهٔ $A(1,-2)$ در .... دایره به معادلهٔ $x^2+y^2-2x+2y=0$ قرار دارد.

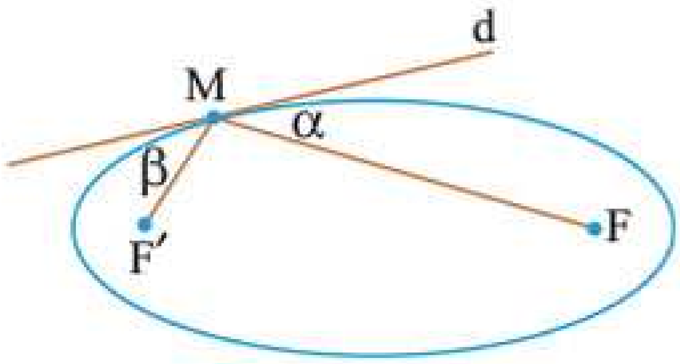
ت) اگر سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ در یک صفحه باشند، آن‌گاه حجم متوازی‌السطوح بنا شده توسط سه بردار برابر .... است.

۲. درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید؛ سپس شکل صحیح عبارت نادرست را بنویسید.

الف) اگر A یک ماتریس 3×3 و $|A|=5$ آن‌گاه $|2A|=40$ است.

ب) اگر صفحهٔ P به‌گونه‌ای باشد که هر دو تکهٔ بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور نباشد، در این‌صورت فصل مشترک صفحهٔ P و سطح مخروطی یک هذلولی است.

پ) در شکل روبه‌رو اگر خط d در نقطهٔ M بر بیضی مماس باشد، زاویهٔ $F\widehat{M}F' = 50^\circ$ باشد آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ $\alpha=\beta=60^\circ$ است.



ت) برای دو بردار واحد $\vec{i}$ و $\vec{j}$ حاصل‌ضرب خارجی $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{O}$ است.

پاسخ‌نامهٔ امتحان نهایی دی ۱۴۰۰

.۱

الف) درست / ب) درست / پ) نادرست / ت) نادرست

.۲

الف) ماتریس / ب) مشترک / پ) خارج / ت) صفر

.۳

$$A = B \Rightarrow \begin{bmatrix} ۲x & ۵ \\ z & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & ۲x + y \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۳ \\ ۲x + y = ۵ \\ z = -۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{۳}{۲} \\ y = ۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow x + ۲y + ۳z = \frac{-۱}{۲}$$

.۴

$$A = \begin{bmatrix} -۱ & -۴ \\ ۱ & -۲ \\ ۳ & ۰ \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ & -۱ \\ -۱ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow AB = \begin{bmatrix} -۱ & -۴ \\ ۱ & -۲ \\ ۳ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & -۱ & -۱ \\ -۱ & ۰ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & ۱ & ۵ \\ ۲ & -۱ & ۱ \\ ۰ & -۳ & -۳ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |AB| = ۴(۶) - ۱(-۶) + ۵(-۶) = ۰$$

پاسخ‌نامهٔ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۱

۱.

الف) ۲ / ب) دایره / پ) داخل / ت) صفر / ت) صفر

۲.

الف) درست / ب) درست

پ) نادرست، $\alpha = \beta = ۶۵^\circ$

ت) نادرست، $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$

۳.

$$A \times B = \begin{bmatrix} ۴+۳a & -۸+۲a \\ b-۳ & -۲b-۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ۲a-۸=۰ \Rightarrow a=۴ \\ b-۳=۰ \Rightarrow b=۳ \end{cases}$$

۴.

الف)

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۴ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۶ \end{bmatrix}$$

ب)

$$|B| = ۳۹$$

۵.

$$X = A^{-۱} \times B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{۱}{۱} \begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ -۷ & ۲ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۴ \\ ۱۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x = ۱, y = ۲$$