

به نام پروردگار مهربان



ریاضی و آمار

انسانی

دهم

آموزش به سبک لقمه

عباس اشرفی - دنیا سلیمی

مدیر و ناظر علمی گروه ریاضی: عباس اشرفی



مهروماه

این کتاب را، با همه وجودم به پدر و مادر عزیزم تقدیم می‌کنم تا شاید بخش کوچکی (در حد میل می‌کند به صفر!) از زحماتشان را جبران کرده باشم.



مقدمه

دوستان عزیز سلام!

امیدوارم با خواندن این کتاب بتوانید از پس امتحان ریاضی بر بیایید.

به جمع و جور بودن کتاب توجه نکنید (فلفل نبین چه ریزه بشکن ببین چه تیزه) مطمئن باشید تمامی مباحث کتاب درسی رو موبه موبهتون توضیح دادیم. بهتره قبل از هر چیز درباره کتاب مطالبی رو بهتون بگم:

۱ کلی وعده و چاشنی خوشمزه براتون تدارک دیدیم. هم‌چنین تعداد زیادی نکته که همه رو باید خوب یاد بگیرید و اما تذکر که اشتباهات رایج دانش‌آموزهاست که اگه به تذکرها دقت کنید به تمام سؤالات پاسخ کامل می‌دید.

۲ سؤالات امتحان‌های سال‌های گذشته و سؤالاتی که احتمال می‌دیم در امتحان بیاد رو براتون آوردیم.

۳ این کتاب یک کتاب مرجع هست چون هر جایی از ریاضی دهم رو که بلد نباشید، می‌تونید به این کتاب مراجعه کنید و درسنامه مربوط به اون قسمت رو بخونید، همین‌طور سؤالات مرتبط با هر مبحث.

۴ در پایان هر فصل براتون تعدادی سؤال تکمیلی قرار دادیم که با حل کردن این سؤالات خیالتون از امتحان راحت می‌شه.

تشکر و قدردانی

و در پایان لازم است از تمامی کسانی که در چاپ این کتاب ما را همراهی کردند تشکر کنیم:

- جناب آقای احمد اختیاری مدیر محترم انتشارات مهروماه
- جناب آقای محمدحسین انوشه مدیر فرهیخته شورای تألیف
- سرکار خانم زهرا انیشه ویراستار علمی کتاب
- سرکار خانم سمیرا سیاوشی مدیر دلسوز تولید
- جناب آقای میلاد صفایی (مدیر فنی)، خانم کتایون زهرایی (صفحه‌آرا)، آقای عطا عطری (رسام) و خانم مهناز ستاری (تایپیست)
- گروه هنری خلاق انتشارات به مدیریت جناب آقای فرهادی
- جناب آقای تایماز کاویانی (طراح گرافیک) و جناب آقای حسام طلایی (طراح جلد)

ارادتمند شما

عباس اشرفی - دنیا سلیمی

فهرست

- | | | |
|-----|-----------------------|-------|
| ۷ | یادآوری | فصل ۰ |
| ۲۵ | معادله درجه دوم | فصل ۱ |
| ۶۷ | تابع | فصل ۲ |
| ۹۷ | کار با داده‌های آماری | فصل ۳ |
| ۱۲۷ | نمایش داده‌ها | فصل ۴ |
| ۱۵۱ | فرمول‌نامه | پیوست |

فصل اول

معادله درجهٔ

دوم

معادله درجه دوم

درس اول

معادله و مسائل توصیفی

- ◀ معادله درجه اول
- ◀ معادله درجه دوم

درس دوم

حل معادله درجه دوم و کاربردها

- ◀ روش‌های حل معادله درجه دوم
- ◀ تجزیه عبارت جبری
- ◀ مربع کامل
- ◀ روش کلی (دلتا)

درس سوم

معادلات شامل
عبارت‌های گویا

- ◀ حل معادلات شامل عبارت‌های گویا
- ◀ حل چند مسئله



درس ۱

معادله و مسائل توصیفی

وعدۀ ۱

معادله درجه اول



معادله: به یک تساوی از عبارتهای جبری که فقط به ازای مقادیر خاصی برقرار باشند، معادله گفته می‌شود و آن مقادیر خاص جوابهای معادله یا ریشههای معادله هستند.

معادله درجه اول: هر معادله به صورت $ax + b = 0$ که در آن b و a اعداد حقیقی و $a \neq 0$ است.

روش حل معادله درجه یک

برای حل معادله درجه یک کافی است مجهولات را به یک طرف و اعداد را به طرف دیگر تساوی ببریم و در آخر مقدار مجهول را از فرمول عدد معلوم تقسیم بر ضریب مجهول محاسبه و یا از فرمول چاشنی زیر استفاده کنیم:

چاشنی: ریشه معادله یا جواب معادله درجه اول به صورت زیر است:

$$x = -\frac{b}{a}$$

برای نمونه ریشه معادله $2x + 5 = 0$ به صورت زیر است:

$$\left. \begin{array}{l} a = 2 \\ b = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow x = -\frac{b}{a} = -\frac{5}{2}$$

★ **حواست باشه:** منظور از حل معادله، یافتن عددی است که جای مجهول قرار گرفته و تساوی برقرار باشد یعنی اگر جواب مجهول به دست آمده را در معادله قرار دهیم تساوی درست به دست می آید.

🏠 **مثال:** معادلات زیر را حل کنید.

الف) $5x + 10 = 0$

$$\left. \begin{array}{l} a = 5 \\ b = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow x = -\frac{b}{a} = -\frac{10}{5} = -2$$

ب) $\frac{3}{2}x - 8 = 1$

$$\frac{3}{2}x - 8 - 1 = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}x - 9 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} a = \frac{3}{2} \\ b = -9 \end{array} \right\} \Rightarrow x = -\frac{b}{a} = -\frac{-9}{\frac{3}{2}} = \frac{9}{\frac{3}{2}} = \frac{18}{3} = 6$$

چاشنی: نماد ریاضی برخی عبارات که در سؤالات زیاد از آن‌ها استفاده می‌شود، به صورت زیر است:

عبارت ریاضی	تعبیر فارسی
x	عددی
$3x$	سه برابر عددی
$\frac{1}{2}x$	نصف عددی
$\frac{1}{3}x$	ثلث عددی
$\frac{1}{4}x$	ربع عددی
$\frac{1}{5}x$	خمس عددی
x^2	مجدور یا مربع عددی
x^3	مکعب عددی
\sqrt{x}	جذر عددی

مثال: معادله «مربع عددی برابر با همان عدد به علاوه یک است.» را بنویسید.
(تمرین کتاب درسی)

پاسخ

$$x^2 = x + 1$$

مربع عدد برابر با همان عدد به علاوه یک

عدد: x

مربع عددی: x^2

مثال: چهار برابر عددی به علاوه دو، با پنج برابر آن عدد به علاوه سه، برابر است. مکعب آن عدد به علاوه چهار چند است؟
(مشابه امتحان)

پاسخ

$$4x + 2 = 5x + 3$$

$$4x - 5x = 3 - 2 \Rightarrow -x = 1 \Rightarrow x = -1$$

$$\xrightarrow[\text{به علاوه چهار}]{\text{مکعب عدد}} x^3 + 4 \xrightarrow{x=-1} (-1)^3 + 4 = -1 + 4 = 3$$

مثال: برای عبارت زیر معادله بنویسید و آن را حل کنید.

«ما و ما و نصف ما و نصفه‌ای از نصف ما، گر تو هم با ما شوی، ما
جملگی صد می شویم.»
(کار در کلاس کتاب درسی)

پاسخ

$$100 = 1 + \text{نصف نصف ما} + \text{نصف ما} + \text{ما} + \text{ما}$$

$$\xrightarrow{\text{ما: } x} x + x + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}x}{2} + 1 = 100$$

$$\Rightarrow x + x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + 1 = 100$$

$$\xrightarrow[\text{مشترک}]{\text{مخرج}} \frac{4x + 4x + 2x + x}{4} - 99 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{11}{4}x - 99 = 0 \Rightarrow \frac{11}{4}x = 99 \Rightarrow x = \frac{99 \cdot 4}{11} = 36$$



$$x = \frac{99 \times 4}{11} = 36$$

وعدۀ ۲

معادله درجه دوم



معادله درجه دوم: هر معادله به صورت $ax^2 + bx + c = 0$ که در آن a ضریب x^2 و $a \neq 0$ ، b ضریب x و c عدد ثابت است.

برای نمونه در معادله مقابل داریم:

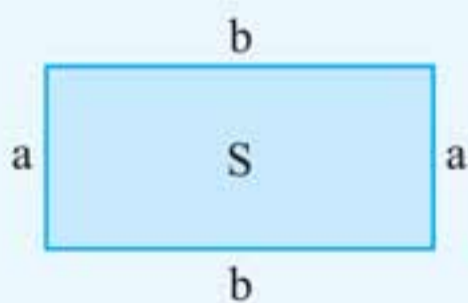
$$4x^2 - \sqrt{3}x + \frac{1}{2} = 0$$

$$a = 4, b = -\sqrt{3}, c = \frac{1}{2}$$

یادآوری: اگر A و B دو عبارت جبری باشند و داشته باشیم

$A \times B = 0$ ، آن گاه حداقل یکی از دو عبارت صفر است، یعنی:

$$A \times B = 0 \Rightarrow A = 0 \text{ یا } B = 0$$

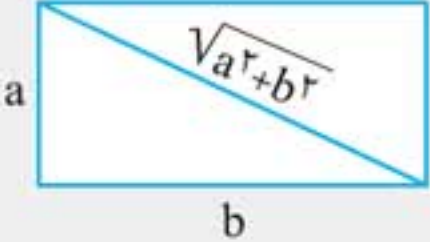
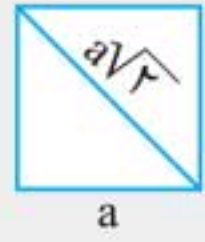
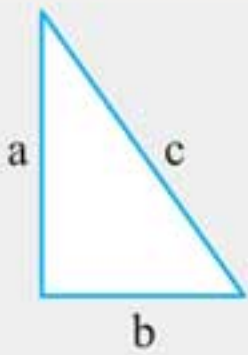



◀ (S) مساحت شکل: داخل شکل

(P) محیط شکل: دور شکل

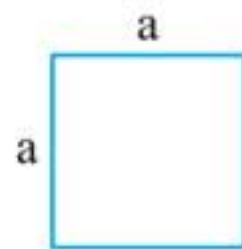
(r) شعاع شکل: فاصله مرکز دایره

تامحیط دایره

	
<p>محیط: $2(b + a)$</p> <p>مساحت: ab</p> <p>قطر: $\sqrt{a^2 + b^2}$</p>	<p>محیط: $4a$</p> <p>مساحت: a^2</p> <p>قطر: $a\sqrt{2}$</p>
	
<p>محیط: $a + b + c$</p> <p>مساحت: $\frac{1}{2}(ab)$</p>	<p>محیط: $2\pi r$</p> <p>مساحت: πr^2</p> <p>$\pi = 3/14$</p>

مثال: مساحت مربعی ۴۹ سانتی متر مربع است. قطر آن را به دست آورید.

پاسخ



$$\text{مساحت مربع} = a^2 \Rightarrow a^2 = 49 \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{49} \Rightarrow a = 7 \text{ cm}$$

$$\text{قطر مربع} = a\sqrt{2} \Rightarrow 7 \times \sqrt{2} = 7\sqrt{2} \text{ cm}$$

نمونه سؤالات امتحانی فصل اول



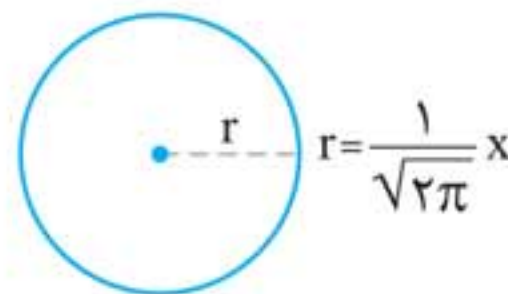
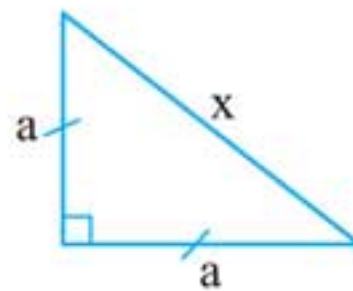
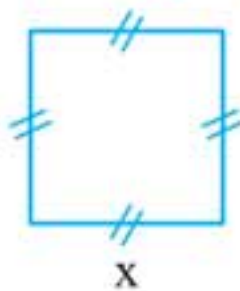
۱. هر کدام از عبارتهای زیر را به یک معادله تبدیل کنید. (تمرین کتاب درسی)
الف) پنج برابر عددی به علاوه دو مساوی با سه برابر آن عدد
منهای دو باشد.

$$\text{عدد } x \Rightarrow 5x + 2 = 3x - 2$$

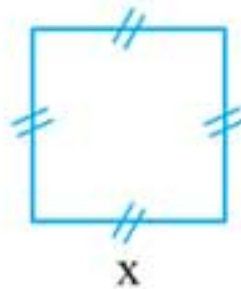
ب) مکعب عددی به علاوه دو مساوی با سه برابر همان عدد است.

$$\text{عدد } x \Rightarrow x^3 + 2 = 3x$$

۲. اگر مجموع مساحت‌های سه شکل زیر برابر ۷ باشد، مقدار x چقدر است؟ (تمرین کتاب درسی)

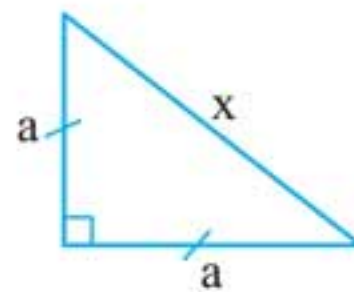


$$S = x^2$$



$$\text{فیثاغورس: } a^2 + a^2 = x^2$$

$$2a^2 = x^2 \Rightarrow a^2 = \frac{x^2}{2}$$



$$a = \pm \frac{x}{\sqrt{2}} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{x}{\sqrt{2}} & \text{قابل قبول} \\ a = -\frac{x}{\sqrt{2}} & \text{غیر قابل قبول} \end{cases}$$

پاسخ



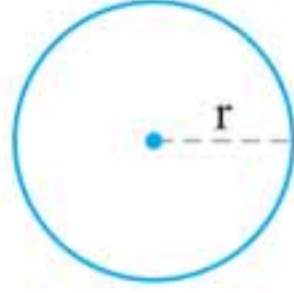
$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \times a \times a = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) = \frac{x^2}{4}$$

$$S = \pi r^2$$

$$S = \pi \left(\frac{1}{\sqrt{2}\pi} x \right)^2$$

$$S = \pi \left(\frac{1}{2\pi} x^2 \right)$$

$$S = \frac{x^2}{2}$$



طبق گفته صورت سوال داریم:

$$\Rightarrow S_{\square} + S_{\Delta} + S_{\circ} = 7$$

$$x^2 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{2} = 7$$

$$\frac{x^2 \times 4}{1 \times 4} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^2 \times 2}{2 \times 2} = 7$$

$$\frac{4x^2 + x^2 + 2x^2}{4} = 7 \Rightarrow \frac{7x^2}{4} = 7$$

$$\Rightarrow 7x^2 = 28 \Rightarrow x^2 = \sqrt{\frac{28}{7}}$$

$$\Rightarrow x = \pm 2 \begin{cases} x = 2 \text{ قابل قبول} \\ x = -2 \text{ غیر قابل قبول} \end{cases}$$

وعدۀ ۹



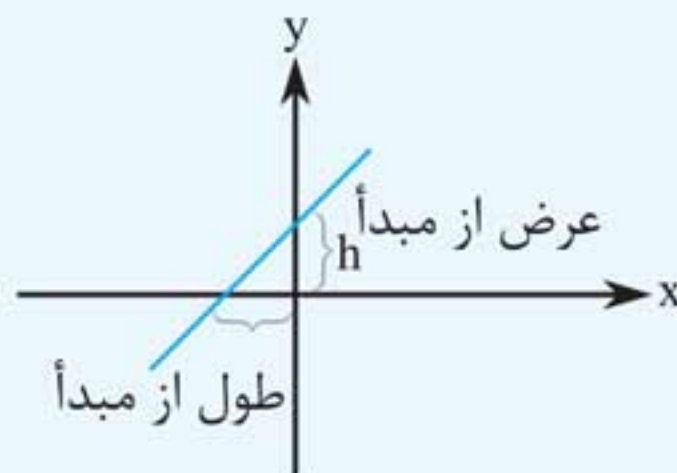
تابع خطی (تابع درجه یک)

تابعی را که بتوان به شکل $y = mx + h$ نمایش داد، یک تابع خطی می‌نامیم که m را شیب خط و h را عرض از مبدأ می‌گوییم.

یادآوری: عرض از مبدأ: به فاصله محل برخورد خط با محور

y ها از مبدأ، عرض از مبدأ می‌گوییم.

به این نکته توجه داشته باشید که همیشه عرض از مبدأ نقطه‌ای است که مؤلفه اول آن صفر است ($x = 0$).



شیب خط: برای به دست آوردن شیب خط از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

شکل کلی معادله خط:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$



درس ۲

معیارهای گرایش به مرکز

وعده ۶



معیارهای گرایش به مرکز

معیارهای گرایش به مرکز به سه دسته تقسیم می‌شوند:

۱ مُد ۲ میانگین ۳ میانه

۱ مُد

مقداری از متغیر که بیش‌ترین فراوانی را دارد. در رأی‌گیری‌ها، انتخاب رئیس‌جمهور و فروشندگان پوشاک از معیار مُد استفاده زیادی می‌کنند. محاسبه مُد: فقط فراوانی داده‌ها را با هم مقایسه می‌کنیم و داده‌ای که بیش‌ترین فراوانی را داشت، به عنوان مُد در نظر می‌گیریم.

مثال: در داده‌های زیر، مقدار مد را به دست آورید؟

۱, ۸, ۸, ۳, ۶, ۸, ۳, ۵, ۸

پاسخ: چون عدد ۸، چهار بار تکرار شده و بیش‌ترین، فراوانی را در بین داده‌های فوق دارد، پس مد برابر است با ۸.

چاشنی: یک جامعه ممکن است دو یا چند مُد داشته باشد یا اصلاً مُد نداشته باشد، پس ممکن است مُد، منحصر به فرد نباشد.

مثال: در بین داده‌های زیر مد کدام است؟

۶, ۹, ۳, ۲, ۳, ۳, ۶, ۱, ۶

پاسخ: اعداد ۳ و ۶ هر کدام سه بار تکرار شده‌اند پس مد برابر است با ۳ و ۶.

۲ میانگین

یک شاخص عددی است که متوسط داده‌ها را بیان می‌کند و آن را با نماد \bar{X} نمایش می‌دهند. به میانگین، معدل یا متوسط نیز گفته می‌شود. محاسبه میانگین: اگر n مشاهده به صورت X_1, X_2, \dots, X_n داشته باشیم، میانگین به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

چاشنی: در هر جامعه آماری، فقط یک میانگین وجود دارد، پس میانگین، منحصر به فرد است.

مثال: اگر میانگین داده‌های ۲۲، x ، ۱۲ برابر ۱۶ باشد، مقدار x را بیابید. (مشابه امتحان)

پاسخ

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$$

$$16 = \frac{22 + x + 12}{3} \Rightarrow 16 = \frac{34 + x}{3}$$

$$\Rightarrow 16 \times 3 = 34 + x \Rightarrow 48 = 34 + x \Rightarrow x = 14$$

مثال: میانگین داده‌های ۱۰، ۲۰، ۳۰، ۴۰، ۵۰ را به دست آورید. (کار در کلاس کتاب درسی)

پاسخ

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5}{n}$$

$$\Rightarrow \bar{X} = \frac{10 + 20 + 30 + 40 + 50}{5} = \frac{150}{5} = 30$$

پیوست فرمول‌نامه

فصل صفر (یادآوری)

۱ اتحاد مربع دو جمله‌ای $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

۲ اتحاد مزدوج $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

۳ اتحاد جمله مشترک

$$(a + x)(b + x) = x^2 + (a + b)x + ab$$

۴ ب م م: حاصل ضرب عوامل مشترک با کم‌ترین توان

۵ ک.م.م: حاصل ضرب عوامل غیرمشترک با بیشترین توان در

عوامل غیرمشترک

۶ دامنه عبارت گویا: $\mathbb{R} - \{\text{ریشه‌های مخرج}\}$

۷ ضرب دو عبارت گویا: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

۸ تقسیم دو عبارت گویا: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$

فصل اول (معادله درجه دوم)

۱ معادله درجه اول: $ax + b = 0$

۲ معادله درجه دوم: $ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$

۳ روش دلتا: $\Delta = b^2 - 4ac$

الف اگر $\Delta > 0$ باشد، آنگاه دو ریشه داریم:

$$x_1 = \frac{-b_1 + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b_1 - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

ب اگر $\Delta = 0$ باشد، آنگاه یک ریشه مضاعف داریم:

$$x = \frac{-b}{2a}$$



پ اگر $\Delta < 0$ باشد، آنگاه ریشه نداریم.

۴ در معادله درجه دوم اگر $a + b + c = 0$ باشد، آنگاه داریم:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{c}{a}$$

۵ در معادله درجه دوم اگر $a + c = b$ باشد، آنگاه داریم:

$$x_1 = -1, \quad x_2 = -\frac{c}{a}$$

۶ تشکیل معادله درجه دوم با داشتن S و P :

$$x^2 - Sx + P = 0$$

۷ S و P در معادله درجه دوم:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a}, \quad P = \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

۸ مسائل سود:

$$\underbrace{P(x)}_{\text{تابع سود}} = \underbrace{R(x)}_{\text{تابع درآمد}} - \underbrace{C(x)}_{\text{تابع هزینه}}, \quad R(x) = \underbrace{xP}_{\text{قیمت یک واحد کالا}}$$

۹ در مسائل سود اگر داشته باشیم:

الف $R(x) < C(x) \Leftrightarrow$ شرکت زیان می کند.

ب $R(x) = C(x) \Leftrightarrow$ شرکت نه سود می کند نه زیان

پ $R(x) > C(x) \Leftrightarrow$ شرکت سود می کند.

۱۰ اگر $P(x)$ به فرم معادله درجه دوم باشد، به ازای $x = \frac{-b}{2a}$

سود، مینیمم یا ماکسیمم می شود.