خلاصه درس

فصل اول: ماتریس و کاربردها

درس اول: ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

تعریف: هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و ستون، یک **ماتریس** نامیده می‌شود. هر عدد حقیقی واقع در هر ماتریس را **درایهٔ** (عنصر) آن ماتریس می‌نامیم.

معمولاً ماتریس‌ها را با حروف بزرگ مانند A، B، C و... نمایش می‌دهیم.

برای نمونه:

$$B=\begin{bmatrix} \pi & -۰/۵ \\ \frac{۱}{۳} & ۷ \end{bmatrix} \qquad A=\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۱ & ۰ \\ \sqrt{۲} & ۰/۱ \end{bmatrix}$$

$$D=[۲] \qquad C=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & -۳ \end{bmatrix}$$

مرتبهٔ ماتریس: اگر ماتریسی مانند A دارای m سطر و n ستون باشد، می‌نویسیم $A_{m\times n}$ و می‌خوانیم «A ماتریسی از مرتبهٔ $m\times n$ (m در n) است.»

برای نمونه: ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۷ & -۱ & ۰ \\ ۳ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ دارای ۲ سطر و ۳ ستون است، بنابراین از مرتبهٔ ۲×۳ است.

> **توجه:** فرم کلی نمایش ماتریس A از مرتبهٔ $m\times n$، به‌صورت $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ است، که a_{ij} (درایهٔ عمومی ماتریس) درایهٔ روی سطر iاُم و ستون jاُم است.

برای نمونه:

$$A_{۲\times ۲}=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{bmatrix} \qquad A_{۳\times ۲}=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} \end{bmatrix}$$

$$A_{۳\times ۳}=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix}$$

مثال **اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times ۴}$، به‌طوری‌که برای $i=j$ داشته باشیم $a_{ij}=۷$، برای $i>j$ داشته باشیم $a_{ij}=i+j$ و برای $i<j$ داشته باشیم $a_{ij}=i^۲$، در این‌صورت ماتریس A را با درایه‌هایش نمایش دهید.**

(کتاب درسی)

پاسخ با توجه به صورت مثال، می‌توان نوشت:

$$a_{ij}=\begin{cases} i+j & ; \quad i>j \\ ۷ & ; \quad i=j \\ i^۲ & ; \quad i<j \end{cases} \quad ; \quad A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} & a_{۱۴} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} & a_{۲۴} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} & a_{۳۴} \end{bmatrix}$$

برای درایه‌های $a_{۱۱}$، $a_{۲۲}$ و $a_{۳۳}$ داریم $i=j$، پس $a_{۱۱}=a_{۲۲}=a_{۳۳}=۷$.

همچنین برای درایهٔ $a_{۱۲}$ داریم $i=۱$ و $j=۲$ $(i<j)$، پس $a_{۱۲}=۱^۲=۱$.

به همین ترتیب:

$a_{۱۴}=۱^۲=۱$ $\qquad a_{۱۳}=۱^۲=۱$

$a_{۲۴}=۲^۲=۴$ $\qquad a_{۲۳}=۲^۲=۴$ $\qquad a_{۲۱}=۲+۱=۳$

$a_{۳۴}=۳^۲=۹$ $\qquad a_{۳۲}=۳+۲=۵$ $\qquad a_{۳۱}=۳+۱=۴$

در نتیجه ماتریس A به‌صورت $A=\begin{bmatrix} ۷ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۳ & ۷ & ۴ & ۴ \\ ۴ & ۵ & ۷ & ۹ \end{bmatrix}$ است.

مثال **ماتریس $B=[b_{ij}]_{۲\times ۲}$ به‌صورت $b_{ij}=i-۲j$ تعریف شده است. ماتریس B را با درایه‌هایش بنویسید.**

پاسخ ماتریس B به‌صورت $B=\begin{bmatrix} b_{۱۱} & b_{۱۲} \\ b_{۲۱} & b_{۲۲} \end{bmatrix}$ است. همچنین:

$b_{۱۲}=۱-۲(۲)=-۳$ $\qquad b_{۱۱}=۱-۲(۱)=-۱$

$b_{۲۲}=۲-۲(۲)=-۲$ $\qquad b_{۲۱}=۲-۲(۱)=۰$

بنابراین ماتریس B به‌صورت $B=\begin{bmatrix} -۱ & -۳ \\ ۰ & -۲ \end{bmatrix}$ است.

> **توجه:** اگر ماتریس A از مرتبهٔ ۱×۱ باشد، یعنی $A=[k]_{۱\times ۱}$، در این‌صورت این ماتریس را مساوی با عدد حقیقی k تعریف می‌کنیم. **برای نمونه:** $A=[۲]_{۱\times ۱}=۲$

■ معرفی چند ماتریس خاص

۱) **ماتریس سطری:** ماتریسی که فقط یک سطر داشته باشد.

برای نمونه: $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}_{۱\times ۴}$

۲) **ماتریس ستونی:** ماتریسی که فقط یک ستون داشته باشد.

برای نمونه:

$$B=\begin{bmatrix} -۱ \\ \pi \\ \sqrt{۲} \end{bmatrix}_{۳\times ۱}$$

۳) **ماتریس صفر:** ماتریسی که تمام درایه‌های آن صفر باشد را ماتریس صفر می‌نامیم و با نماد $\bar{O}$ نشان می‌دهیم. **برای نمونه:**

$$\bar{O}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}_{۳\times ۲} \qquad \bar{O}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}_{۲\times ۲}$$

۴) **ماتریس مربعی:** اگر در ماتریس A، تعداد سطرها با تعداد ستون‌ها برابر و مساوی n باشد، A را یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ n $(n\times n)$ می‌نامیم.

برای نمونه: ماتریس A، ماتریس مربعی از مرتبهٔ ۲ و B، ماتریس مربعی از مرتبهٔ ۳ است.

$$B=\begin{bmatrix} ۱۰ & ۹ & ۸ \\ ۷ & ۶ & ۵ \\ ۴ & ۳ & ۲ \end{bmatrix}_{۳\times ۳} \qquad A=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}_{۲\times ۲}$$

▪ خواص مهم دترمینان:

① دترمینان هر ماتریس قطری برابر اســت با حاصل‌ضرب درایه‌های روی قطر اصلی.

برای نمونه:

$$\begin{vmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{vmatrix} = ۲\times(-۱)\times ۳ = -۶$$

② اگر ماتریس مربعی دارای یک ســطر (یک ستون) صفر باشد، دترمینان آن صفر است.

③ دترمینــان ماتریس مربعــی صفر، برابر با صفــر و دترمینان ماتریس I (همانی) برابر با یک است.

④ اگر A و B دو ماتریس مربعی باشند در این‌صورت $|AB|=|A||B|$.

⑤ اگر A ماتریس مربعی از مرتبهٔ n و عدد k حقیقی باشد، در این‌صورت $|kA|=k^n|A|$. یعنی اگر عدد از داخل دترمینان خارج شود به توان مرتبهٔ ماتریس می‌رسد.

⑥ اگــر A ماتریس مربعی و n عدد طبیعی باشــد، آن‌گاه $|A^n|=|A|^n$. (جابه‌جایی توان و دترمینان)

⑦ اگر A^{-1} وارون ماتریس A باشد، آن‌گاه دترمینان آن نیز وارون دترمینان A است. یعنی $|A^{-1}|=|A|^{-1}=\frac{۱}{|A|}$. (جابه‌جایی توان و دترمینان)

⑧ اگر ماتریس A دو ســطر یا دو ستون یکسان داشته باشد، دترمینان آن برابر با صفر است.

⑨ اگر در ماتریس A یک ســطر (ســتون) مضربی از سطر (ستون) دیگر باشد، دترمینان آن برابر صفر است.

مثال **اگــر A ماتریســی ۳×۳ باشــد و $|A|=۴$، در این‌صورت حاصل $||A|A|$ را به‌دست آورید.**

پاسخ

$$||A|A| = |۴A| \xlongequal{A\text{ ماتریس ۳×۳}} ۴^۳|A| = ۴^۳\times ۴ = ۴^۴ = ۲۵۶$$

مثال **اگر A ماتریســی ۳×۳ و $|A|=۳$ باشد، حاصل $|۶A^{-1}|$ را به‌دست آورید.**

پاسخ

$$|۶A^{-1}| = ۶^۳\times|A^{-1}| = ۶^۳\times\frac{۱}{|A|} = ۶^۳\times\frac{۱}{۳} = ۷۲$$

مثال **اگر $\sqrt{۵}A=\begin{bmatrix}|A| & ۲\\ -۲ & |A|\end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه حاصل $|A|^۳-۲$ را بیابید.**

پاسخ

$$|\sqrt{۵}A| = \begin{vmatrix}|A| & ۲\\ -۲ & |A|\end{vmatrix} \Rightarrow ۵|A| = |A|^۲+۴$$

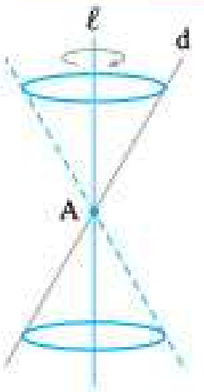
$$\Rightarrow |A|^۲-۵|A|+۴=۰ \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر}} \begin{cases}|A|=۱\\ |A|=۴\end{cases}$$

$$|A|=۱ \Rightarrow |A|^۳-۲ = ۱-۲ = -۱$$

$$|A|=۴ \Rightarrow |A|^۳-۲ = ۴^۳-۲ = ۶۴-۲ = ۶۲$$

فصل دوم: آشنایی با مقاطع مخروطی

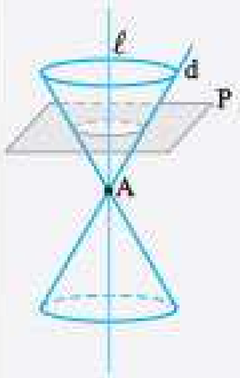
درس اول: آشنایی با مقاطع مخروطی و مکان هندسی



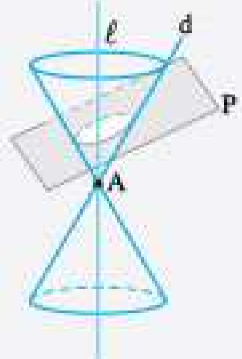
تعریف: فــرض کنید دو خط d و ℓ در نقطهٔ A متقاطع (غیرعمود) باشــند. سطح حاصل از دوران خــط d حول خــط ℓ را یک **رویهٔ مخروطی (سطح مخروطی)** می‌نامیم. در این حالت خط ℓ را **محور**، نقطهٔ A را **رأس** و خط d را **مولد** این سطح مخروطی می‌گوییم.

توجه به فصل مشــترک صفحهٔ دلخواه P و یک ســطح مخروطی، یــک **مقطع مخروطی** گفته می‌شــود که با توجه بــه حالت‌های مختلف صفحه و ســطح مخروطی نســبت به هم، شکل آن به یکی از صورت‌های زیر خواهد بود:

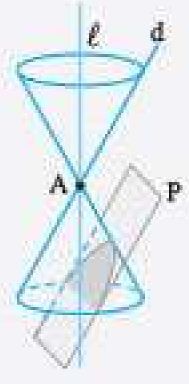
① اگر صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی عمود باشــد و از رأس آن عبــور نکند، آن‌گاه مقطع مخروطی حاصل، **دایره** است.
توجه شــود که در این حالــت، اگر صفحهٔ P از رأس عبور کند، آن‌گاه فصل مشــترک صفحه و سطح مخروطی **یک نقطه** است.



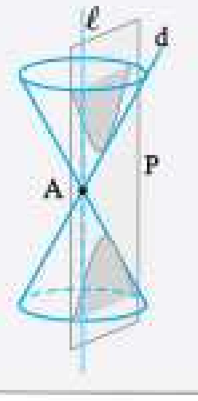
② اگــر صفحهٔ P بر محور ℓ عمود نباشــد و با مولد d نیز موازی نباشــد و تنها یکی از دو نیمهٔ مخــروط را قطع کند، مقطــع مخروطی حاصل، یک **بیضی** است.



③ اگر صفحهٔ P با مولد d موازی باشد و از رأس A عبور نکنــد، آن‌گاه مقطع مخروطــی حاصل، یک **سهمی** است.
توجه شود در این حالت اگر صفحهٔ P از رأس A بگذرد، فصل مشــترک صفحه و سطح مخروطی، **یک خط** است.



④ اگر صفحهٔ P به گونه‌ای باشــد که هر دو تکهٔ بالایی و پایینی ســطح مخروطی را قطع کند و شــامل محور ℓ نباشــد، در این‌صــورت مقطع مخروطی حاصل، یک **هذلولی** است.
توجه شود اگر صفحهٔ P شــامل محور ℓ باشد، مقطع مخروطی حاصل، **دو خط متقاطع** است.



مثال اگر $\vec i$، $\vec j$ و $\vec k$ بردارهای یکه باشند، حاصل $(2\vec i\cdot(\vec j\times\vec k))\vec i+\vec j\times(\vec k+\vec i)+(\vec i\times(2\vec j\times\vec i))\times\vec k$ را به‌دست آورید.

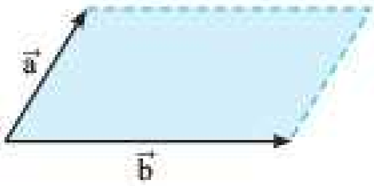
پاسخ با استفاده از نمودار چرخشی  داریم:

$$(2\vec i\cdot\underbrace{(\vec j\times\vec k)}_{\vec i})\vec i+\vec j\times(\vec k+\vec i)+(\vec i\times(2\underbrace{\vec j\times\vec i}_{-\vec k}))\times\vec k$$

$$=(2|\vec i|^2)\vec i+\underbrace{\vec j\times\vec k}_{\vec i}+\underbrace{\vec j\times\vec i}_{-\vec k}-2(\underbrace{\vec i\times\vec k}_{-\vec j})\times\vec k$$

$$=2\vec i+\vec i-\vec k+2\underbrace{\vec j\times\vec k}_{\vec i}=5\vec i-\vec k$$

▪ تعبیر هندسی اندازهٔ ضرب خارجی



اندازهٔ ضرب خارجی دو بردار $\vec a$ و $\vec b$ برابر است با مساحت متوازی‌الاضلاع ساخته شده توسط این دو بردار، یعنی:

$$S_{\square}=|\vec a\times\vec b|$$

بنابراین مساحت مثلث ساخته‌شده توسط این دو بردار برابر است با:

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}|\vec a\times\vec b|$$

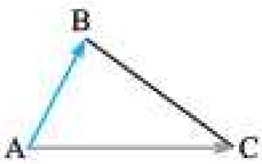
مثال مساحت متوازی‌الاضلاعی را تعیین کنید که بر روی دو بردار $\vec a=(6,2,-5)$ و $\vec b=(4,-1,-1)$ ساخته شده است.

پاسخ می‌دانیم مساحت این متوازی‌الاضلاع برابر است با $|\vec a\times\vec b|$، پس:

$$\vec a\times\vec b=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & 2 & -5 \\ 4 & -1 & -1\end{vmatrix}=(-7,-14,-14)$$

$$S=|\vec a\times\vec b|=\sqrt{7^2+(-14)^2+(-14)^2}=21$$

مثال مساحت مثلثی را تعیین کنید که سه رأس آن عبارت‌اند از $A(1,2,3)$، $B(3,7,-1)$ و $C(2,1,0)$.



پاسخ مطابق شکل کافی است دو بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ را تشکیل دهیم و خواهیم داشت:

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$$

$$\overrightarrow{AB}=\vec B-\vec A=(2,5,-4)$$

$$\overrightarrow{AC}=\vec C-\vec A=(1,-1,-3)$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 5 & -4 \\ 1 & -1 & -3\end{vmatrix}=(-19,2,-7)$$

$$\Rightarrow S=\frac{1}{2}\sqrt{(-19)^2+2^2+(-7)^2}=\frac{\sqrt{414}}{2}$$

مثال اگر $|\vec a|=5$، $|\vec b|=8$ و مساحت مثلث تولیدشده توسط این دو بردار ۱۰ واحد مربع باشد، زاویهٔ بین دو بردار را به‌دست آورید.

پاسخ می‌دانیم مساحت مثلث تولیدشده توسط دو بردار $\vec a$ و $\vec b$ برابر است با $\frac{1}{2}|\vec a\times\vec b|$، پس:

$$\frac{1}{2}|\vec a\times\vec b|=10\Rightarrow|\vec a||\vec b|\sin\theta=20$$

$$\Rightarrow 8\times5\times\sin\theta=20\Rightarrow\sin\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=30^\circ \text{ یا } 150^\circ$$

مثال اگر $|\vec a|=1$، $|\vec b|=2$ و $|\vec a\times\vec b|=\frac{2}{3}$ باشد، حاصل $\vec a\cdot\vec b$ را محاسبه کنید.

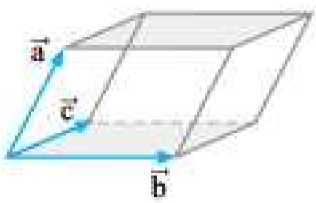
پاسخ می‌دانیم $|\vec a\times\vec b|=|\vec a||\vec b|\sin\theta$، بنابراین:

$$\frac{2}{3}=1\times2\times\sin\theta\Rightarrow\sin\theta=\frac{1}{3}$$

$$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}\Rightarrow\cos\theta=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\vec a\cdot\vec b=|\vec a||\vec b|\cos\theta=1\times2\times(\pm\frac{2\sqrt{2}}{3})=\pm\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

▪ حجم متوازی‌السطوح



اگر $\vec a$، $\vec b$ و $\vec c$ سه بردار غیرواقع در یک صفحه باشند، حجم متوازی‌السطوح ساخته‌شده توسط این سه بردار از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\vec V=|\vec a.(\vec b\times\vec c)|$$

مثال حجم متوازی‌السطوحی که توسط سه بردار $\vec a=(1,2,3)$، $\vec b=(2,1,4)$ و $\vec c=(1,-1,5)$ تولید شده است را به‌دست آورید.

پاسخ می‌دانیم حجم این متوازی السطوح برابر است با $\vec V=|\vec a\cdot(\vec b\times\vec c)|$. بنابراین ابتدا $\vec b\times\vec c$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\vec b\times\vec c=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 5\end{vmatrix}=(9,-6,-3)$$

$$\Rightarrow\vec a\cdot(\vec b\times\vec c)=(1,2,3)\cdot(9,-6,-3)=9-12-9=-12$$

$$\Rightarrow V=|\vec a\cdot(\vec b\times\vec c)|=12$$

نکته: اگر سه بردار در یک صفحه واقع باشند، متوازی‌السطوحی توسط این بردارها ساخته نمی‌شود و لذا حجم متوازی‌السطوح صفر است. بنابراین شرط لازم و کافی برای این‌که سه بردار $\vec a$، $\vec b$ و $\vec c$ در یک صفحه واقع باشند این است که $\vec a\cdot(\vec b\times\vec c)=0$.

مثال مقدار m را چنان بیابید که بردارهای $(2,1,-1)$، $(1,1,0)$ و $(m,2m-5,-1)$ در یک صفحه واقع باشند.

پاسخ فرض می‌کنیم $\vec a=(m,2m-5,-1)$، $\vec b=(1,1,0)$ و $\vec c=(2,1,-1)$. چون سه بردار در یک صفحه واقع‌اند، داریم $\vec a\cdot(\vec b\times\vec c)=0$، پس:

$$\vec b\times\vec c=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=(-1,1,-1)$$

$$\vec a\cdot(\vec b\times\vec c)=0\Rightarrow(m,2m-5,-1)\cdot(-1,1,-1)=0$$

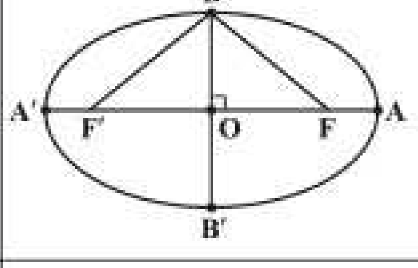
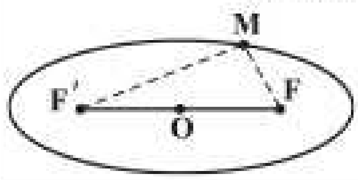
$$\Rightarrow-m+2m-5+1=0\Rightarrow m=4$$

درس: هندسه ۳ (دوازدهم)	رشته: ریاضی فیزیک	مدت امتحان: ۱۱۰ دقیقه	تاریخ:

ردیف	سؤالات	نمره
	فصل اول	
۱	ماتریس‌های $A=[a_{ij}]_{۲\times۲}$ و $B=[b_{ij}]_{۲\times۲}$ به‌صورت زیر تعریف شده‌اند، AB را به‌دست آورید. $a_{ij}=\begin{cases} i^{۲}-j & ; & i=j \\ ۲i+j & ; & i>j \\ j-i & ; & i<j \end{cases}$ $b_{ij}=\begin{cases} i^{۲}+j & ; & i=j \\ i+j & ; & i>j \\ i-j+۲ & ; & i<j \end{cases}$	۱/۵
۲	اگر A و B ماتریس‌های ۳ × ۳ و تعویض‌پذیر باشند (AB = BA)، ثابت کنید: الف) $(A+B)^{۲}=A^{۲}+۲AB+B^{۲}$ ب) $(A-B)(A+B)=A^{۲}-B^{۲}$	۱/۵
۳	اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ باشد، در این‌صورت ماتریس $A^{۷}-A^{۳}$ را بیابید.	۱
۴	با یک مثال نقض نشان دهید که قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نیست. به‌عبارت دیگر نشان دهید که در حالت کلی از تساوی AB = AC نمی‌توان نتیجه گرفت B = C.	۱
۵	اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و I ماتریس واحد باشد و داشته باشیم $A=aA^{-1}+bI$، مقادیر a و b را تعیین کنید.	۱/۲۵
۶	اگر $\sqrt{۵}A=\begin{bmatrix} \|A\| & ۲ \\ -۲ & \|A\| \end{bmatrix}$ باشد، در این‌صورت $\|A\|$ را بیابید.	۱
۷	دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۱ & ۱ & -۱ \\ ۲ & ۵ & ۴ \end{bmatrix}$ را یک‌بار به روش ساروس و باردیگر برحسب ستون اول محاسبه کنید.	۱/۵
۸	مقدار m را چنان بیابید تا دستگاه $\begin{cases} mx+۳y=-۴ \\ ۲x+(m-۱)y=۴ \end{cases}$ بی‌شمار جواب داشته باشد.	۱/۲۵
	فصل دوم	
۹	یک رویهٔ مخروطی را در نظر بگیرید. اگر صفحهٔ P عمود بر محور رویهٔ مخروطی آن را قطع کند و از رأس عبور نکند، سطح مقطع حاصل چه شکلی است؟ شکل مناسب را رسم کنید.	۰/۷۵
۱۰	به دو سؤال زیر پاسخ دهید: الف) مکان هندسی را تعریف کنید. ب) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط ℓ به فاصلهٔ ثابت ۲ واحد باشند را مشخص کنید. (رسم شکل)	۰/۵ ۰/۲۵
۱۱	نقاط A، B، C و D در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای در این صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشد (بحث کنید).	۱/۵
۱۲	معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که $O(۱,-۲)$ مرکز آن بود و بر خط با معادلهٔ $۲x+y=۱$ مماس باشد.	۱/۵
۱۳	دایره به معادلهٔ $x^{۲}+y^{۲}+۸x-۱۲y+۳=۰$ را ابتدا به کمک روش مربع کامل به فرم استاندارد نوشته، سپس مختصات مرکز و طول شعاع آن‌را به‌دست آورید.	۱/۵
۱۴	وضعیت خط $۳x+۴y=۰$ را نسبت به دایره $x^{۲}+y^{۲}-۴x-۴y+۷=۰$ مشخص کنید.	۲
۱۵	وضعیت دو دایرهٔ مقابل را نسبت به یکدیگر تعیین کنید. $\begin{cases} x^{۲}+y^{۲}-۴x+۴y=۱ \\ x^{۲}+y^{۲}-۴x+۸y+۱۹=۰ \end{cases}$	۲
	جمع نمره	۲۰

سؤالات امتحانی دانش‌آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور نوبت دوم

درس: هندسه ۳ (دوازدهم)	رشته: ریاضی فیزیک	مدت امتحان: ۱۳۵ دقیقه	تاریخ امتحان: خرداد ۱۴۰۰

ردیف	سؤالات	نمره
۱	**جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.** **الف)** اگر ماتریس $\begin{bmatrix} 2 & 0 & f \\ 0 & a & 0 \\ e & c & b \end{bmatrix}$ اسکالر باشد، حاصل دترمینان ماتریس برابر ..... است. **ب)** اگر صفحهٔ P با مولد (d) موازی باشد و از رأس سطح مخروطی عبور کند، در این‌صورت فصل مشترک صفحهٔ P و سطح مخروطی، یک ..... است. **پ)** در بیضی، در حالتی که $\frac{c}{a}=0$ باشد، بیضی به ..... تبدیل می‌شود. **ت)** در فضای $\mathbb{R}^3$، نقطهٔ $(-3,2,-5)$ در ناحیهٔ (کنج) ..... دستگاه مختصات قرار دارد.	۱
۲	**درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.** **الف)** اگر A و B دو ماتریس هم‌مرتبه و r یک عدد حقیقی دلخواه و مخالف صفر باشد، و $rA=rB$، آن‌گاه داریم: $A=B$. درست ☐ نادرست ☐ **ب)** مکان هندسی مرکزهای همهٔ دایره‌هایی در صفحه که بر خط d در نقطهٔ ثابت A مماس‌اند، یک نیم‌خط عمود بر خط d در نقطهٔ A است. درست ☐ نادرست ☐ **پ)** در یک سهمی، هر شعاع نوری که موازی با محور سهمی به بدنهٔ سهمی بتابد، بازتاب آن از کانون سهمی خواهد گذشت. درست ☐ نادرست ☐ **ت)** اگر زاویهٔ بین دو بردار مخالف صفر، منفرجه باشد، آن‌گاه حاصل‌ضرب داخلی آن‌ها یک عدد حقیقی مثبت است. درست ☐ نادرست ☐	۱
۳	دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} 2 & m-2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ n+1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ m & 0 & n \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر A یک ماتریس قطری باشد، حاصل AB را محاسبه کنید. پرتکرار	۱
۴	اگر $2A=\begin{bmatrix} \|A\| & -4 \\ 1 & \|A\| \end{bmatrix}$ باشد، در این‌صورت حاصل $\|A^{-1}\|$ را بیابید.	۱/۵
۵	جواب دستگاه زیر را در صورت وجود با استفاده از ماتریس وارون بیابید. پرتکرار $\begin{cases} 3x-4y=7 \\ 2x+y=1 \end{cases}$	۱
۶	معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(2,1)$ بوده و بر خط $3x+4y=-5$ مماس باشد.	۱
۷	وضعیت دایرهٔ $x^2+y^2-6x-2y+9=0$ با دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع یک را نسبت به هم مشخص کنید. پرتکرار	۱/۵
۸	در شکل مقابل اگر $OA=a$ و $OB=b$ و $OF=c$ باشد، ثابت کنید: $a^2=b^2+c^2$. 	۱
۹	نقطهٔ M روی بیضی به اقطار ۱۰ و ۶ واحد به گونه‌ای قرار دارد، که فاصلهٔ آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است. **الف)** نشان دهید مثلث MFF' قائم‌الزاویه است. **ب)** طول MF را به‌دست آورید. (F,F' کانون‌های بیضی هستند و $MF<MF'$). 	۱/۵

پاسخنامهٔ تشریحی

امتحان ۱ (نوبت اول)

۱ الف) ندارد (فصل ۱ / خواص ضرب ماتریس‌ها) (۰/۲۵) / ب) حاصل‌ضرب درایه‌های روی قطر اصلی (فصل ۱ / دترمینان) (۰/۲۵) پ) غیرصفر (فصل ۱ / ماتریس وارون) (۰/۲۵)

۲ الف) درست (فصل ۱ / تساوی دو ماتریس) (۰/۲۵)

ب) نادرست (فصل ۱ / خواص ضرب ماتریس‌ها) (۰/۲۵)

پ) درست (فصل ۱ / دستگاه دو معادله دو مجهول) (۰/۲۵) / ت) نادرست (فصل ۱ / دترمینان ۲×۲) (۰/۲۵)

۳ ابتدا ماتریس‌های A و B را با درایه‌هایشان مشخص می‌کنیم.

$$A=\begin{bmatrix}2&1\\3&2\\4&5\end{bmatrix}\ (0/25)\quad ,B=\begin{bmatrix}0&-1&-2\\-1&0&-1\end{bmatrix}\ (0/25)$$

$$\Rightarrow AB=\begin{bmatrix}-1&-2&-5\\-2&-3&-8\\-5&-4&-13\end{bmatrix}\ (0/5)$$

$$AB+I=\begin{bmatrix}-1&-2&-5\\-2&-3&-8\\-5&-4&-13\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-2&-5\\-2&-2&-8\\-5&-4&-12\end{bmatrix}\quad (0/5)$$

(فصل ۱ / ضرب و جمع ماتریس‌ها)

۴ ماتریس I با هر ماتریسی خاصیت جابه‌جایی دارد، بنابراین می‌توان از اتحاد کمک گرفت.

$$(A^2+I)^2=(A^2)^2+2A^2I+I^2=A^4+2A^2+I\ (0/25)$$

$$(A^2+I)^2=\underbrace{A^3A+2A^2+I}_{(0/25)}=\underbrace{(I-2A)A+2A^2+I}_{(0/25)}$$

$$=A-2A^2+2A^2+I=A+I\ (0/25)$$

(فصل ۱ / توان ماتریس)

۵ ابتدا A^2 و A^3 را به‌دست می‌آوریم:

$$A^2=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\ (0/25)$$

$$A^3=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3\\0&1\end{bmatrix}\ (0/25)$$

در نتیجه $A^{1400}=\begin{bmatrix}1&1400\\0&1\end{bmatrix}$ (۰/۲۵)، بنابراین داریم:

$$\begin{bmatrix}1&1400\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow a=1,b=1400,c=0,d=1\ (0/25)$$

$$2a+b-c+3d=2+1400-0+3=1405\ (0/25)$$

(فصل ۱ / توان ماتریس)

۶ داریم $|A|=-\frac{2}{3}$، بنابراین:

$$|-4A^{-1}|=\underbrace{(-4)^3|A^{-1}|}_{(0/25)}=\underbrace{(-4)^3\frac{1}{|A|}}_{(0/25)}=(-4)^3\times(-\frac{3}{2})=96$$

(فصل ۱ / دترمینان ـ دترمینان وارون)

۷ فرض می‌کنیم $A^{-1}=\begin{bmatrix}x&y\\z&t\end{bmatrix}$ باشد، در این‌صورت داریم:

$$AA^{-1}=I\Rightarrow\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&y\\z&t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\ (0/25)$$

$$\begin{bmatrix}ax+bz&ay+bt\\cx+dz&cy+dt\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\ (0/25)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}ax+bz=1\\ay+bt=0\\cx+dz=0\\cy+dt=1\end{cases}\ (0/25)$$

$$\Rightarrow x=\frac{d}{ad-bc},y=\frac{-b}{ad-bc},z=\frac{-c}{ad-bc}$$

$$t=\frac{a}{ad-bc}\ (0/25)$$

می‌دانیم $|A|=ad-bc$ است، در نتیجه:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{d}{|A|}&\frac{-b}{|A|}\\\frac{-c}{|A|}&\frac{a}{|A|}\end{bmatrix}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}\ (0/25)$$

(فصل ۱ / ماتریس وارون)

۸

$$\begin{bmatrix}2&x&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\\x&1\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=14$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}3+x^2&4+x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=14\ (0/5)$$

$$\underbrace{[3+x^2+8+2x]=14}_{(0/25)}$$

$$\Rightarrow x^2+2x-3=0\Rightarrow x=1,-3\ (0/25)$$

(فصل ۱ / خاصیت شرکت‌پذیری ضرب ماتریس‌ها)

۹ ابتدا $|A|$ و $|B|$ را محاسبه می‌کنیم:

$$|A|=0+1\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}4&2\\3&1\end{vmatrix}+0=2\ (0/25)$$

$$|B|=3(-1)(1)=-3\ (0/25)$$

$$|A|+|B|=2-3=-1\ (0/25)$$

(فصل ۱ / دترمینان ماتریس‌های ۳×۳)

۱۰

$$A=\begin{bmatrix}3&4\\-3&2\end{bmatrix}\Rightarrow|A|=6+12=18\ (0/25)$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{18}\begin{bmatrix}2&-4\\3&3\end{bmatrix}\ (0/25)\ ,\ \underbrace{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\frac{1}{18}\begin{bmatrix}2&-4\\3&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10\\-4\end{bmatrix}}_{(0/25)}$$

$$\Rightarrow\underbrace{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}}_{(0/25)}\Rightarrow x=2,y=1$$

(فصل ۱ / حل دستگاه به روش ماتریس وارون)

امتحان ۴ (نوبت اول)

۱ با توجه به تساوی دو ماتریس داریم:

$$A=B\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix}x+y & ۳\\ x-y & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵ & z-۱\\ -۳ & ۰\end{bmatrix}}_{(۰/۲۵)}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{cases}x+y=۵\\ x-y=-۳\\ z-۱=۳\end{cases}}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \begin{cases}x=۱\\ y=۴\\ z=۴\end{cases} \quad (۰/۲۵)$$

بنابراین: $۲x-y+z=۲(۱)-۴+۴=۲$ (۰/۲۵)

(فصل ۱ / تساوی دو ماتریس)

۲ ابتدا از رابطهٔ داده‌شده، ماتریس X را به‌دست می‌آوریم:

$$\underbrace{۲A+B-۳X=\bar{O}\Rightarrow ۳X=۲A+B}_{(۰/۲۵)}$$

$$\Rightarrow X=\frac{۲}{۳}A+\frac{۱}{۳}B \ (۰/۲۵) = \underbrace{\frac{۲}{۳}\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & ۴\\ ۵ & ۶\end{bmatrix}+\frac{۱}{۳}\begin{bmatrix}-۳ & -۲\\ ۱ & -۵\\ ۴ & ۳\end{bmatrix}}_{(۰/۲۵)}$$

$$=\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{۲}{۳} & \frac{۴}{۳}\\ ۲ & \frac{۸}{۳}\\ \frac{۱۰}{۳} & ۴\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۱ & \frac{-۲}{۳}\\ \frac{۱}{۳} & \frac{-۵}{۳}\\ \frac{۴}{۳} & ۱\end{bmatrix}}_{(۰/۲۵)}=\begin{bmatrix}\frac{-۱}{۳} & \frac{۲}{۳}\\ \frac{۷}{۳} & ۱\\ \frac{۱۴}{۳} & ۵\end{bmatrix} \ (۰/۲۵)$$

(فصل ۱ / اعمال روی ماتریس‌ها)

۳ الف) -۳ (فصل ۱ / دترمینان ماتریس‌های ۲×۲) (۰/۲۵) ب) $۲\times(-۱)\times۷=-۱۴$ (فصل ۱ / دترمینان ماتریس قطری) (۰/۲۵) پ) $۴\times۵-۳$ (فصل ۱ / شرط ضرب دو ماتریس) (۰/۵)

ت) صفر (فصل ۱ / دترمینان) (۰/۲۵)

۴ ابتدا $A^۲$ را محاسبه می‌کنیم:

$$A^۲=\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=I \quad (۰/۲۵)$$

$$A^{۱۳۹۷}-A^{۱۳۹۰}=\underbrace{(A^۲)^{۶۹۸}\times A-(A^۲)^{۶۹۵}}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{I^{۶۹۸}\times A-I^{۶۹۵}}_{(۰/۲۵)}$$

$$=\underbrace{A-I}_{(۰/۲۵)}=\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۱ & ۱\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲ & ۰\\ ۱ & ۰\end{bmatrix} \quad (۰/۲۵)$$

(فصل ۱ / توان ماتریس)

۵ می‌دانیم $|A^n|=|A|^n$، بنابراین $\underbrace{|A^۴|=۲۵\Rightarrow |A|^۴=۲۵\Rightarrow |A|=\sqrt{۵}}_{(۰/۲۵)}$.

حال دترمینان A را برحسب سطر اول می‌نویسیم:

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ a & -a & -۲\\ ۱ & a & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow \underbrace{|A|=۱\times(-۱)^{۱+۱}\times\begin{vmatrix}-a & -۲\\ a & ۱\end{vmatrix}+۰+۰}_{(۰/۲۵)}$$

$$\Rightarrow |A|=-a+۲a=a \quad (۰/۲۵)$$

بنابراین $a=\sqrt{۵}$ (۰/۲۵) (فصل ۱ / جابه‌جایی توان و دترمینان)

۶ فرض می‌کنیم ماتریس مربعی A وارون‌پذیر باشد و دارای دو وارون B و C باشد، نشان می‌دهیم $B=C$ (۰/۲۵). از آن‌جا که B و C هر دو وارون‌های A هستند، داریم:

$$\underbrace{AB=BA=I}_{(۰/۲۵)}\ ,\ \underbrace{AC=CA=I}_{(۰/۲۵)}$$

$$\underbrace{B=BI=B(AC)}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{(BA)C=IC=C}_{(۰/۲۵)}$$

(فصل ۱ / قضیهٔ یکتایی وارون)

۷ شرط این‌که ماتریس A وارون‌پذیر نباشد، این است که $|A|=۰$، پس:

$$A=\begin{bmatrix}m+۱ & m-۲\\ m-۱ & ۲\end{bmatrix}\Rightarrow \underbrace{|A|=۲(m+۱)-(m-۱)(m-۲)=۰}_{(۰/۵)}$$

$$\Rightarrow ۲m+۲-m^۲+۳m-۲=۰ \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow m^۲-۵m=۰\Rightarrow m(m-۵)=۰\Rightarrow m=۰ \text{ یا } m=۵ \quad (۰/۲۵)$$

(فصل ۱ / شرط وارون‌پذیری)

۸ شرط اینکه دستگاه جواب منحصربه‌فرد داشته باشد، این است که دترمینان ماتریس ضرایب غیرصفر باشد (۰/۲۵). ابتدا معادلات را ساده می‌کنیم:

$$\begin{cases}۲x=۳x-۳y-۳\\ ۲y=۳x+۳y+۳\end{cases}\Rightarrow \underbrace{\begin{cases}x-۳y=۳\\ ۳x+y=-۳\end{cases}}_{(۰/۲۵)}$$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}۱ & -۳\\ ۳ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=۱+۹=۱۰ \quad (۰/۲۵)$$

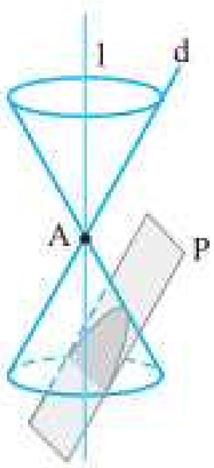
$$\underbrace{\begin{bmatrix}۱ & -۳\\ ۳ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳\\ -۳\end{bmatrix}}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & -۳\\ ۳ & ۱\end{bmatrix}^{-۱}\begin{bmatrix}۳\\ -۳\end{bmatrix}}_{(۰/۲۵)}$$

$$=\frac{۱}{۱۰}\begin{bmatrix}۱ & ۳\\ -۳ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳\\ -۳\end{bmatrix} \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\frac{۱}{۱۰}\begin{bmatrix}-۶\\ -۱۲\end{bmatrix}}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{\begin{bmatrix}-\frac{۶}{۱۰}\\ -\frac{۱۲}{۱۰}\end{bmatrix}\Rightarrow \begin{cases}x=\frac{-۳}{۵}\\ y=\frac{-۶}{۵}\end{cases}}_{(۰/۲۵)}$$

(فصل ۱ / دستگاه دو معادله دو مجهول)

۹ سطح مقطع حاصل یک سهمی است. (۰/۵)



(۰/۲۵)

(فصل ۲ / مقاطع مخروطی)

امتحان ۱۰ - خرداد ماه ۱۴۰۰ (نوبت دوم)

۱ الف) ۸ (فصل ۱ / ماتریس اسکالر) (۰/۲۵) / ب) خط (فصل ۲ / مقاطع مخروطی) (۰/۲۵) / پ) دایره (فصل ۲ / خروج از مرکز بیضی) (۰/۲۵) / ت) ۶ (فصل ۳ / معرفی فضای $\mathbb{R}^۳$) (۰/۲۵)

۲ الف) درست (فصل ۲ / ضرب عدد حقیقی در ماتریس) (۰/۲۵) / ب) نادرست (فصل ۲ / مکان هندسی) (۰/۲۵) / پ) درست (فصل ۲ / ویژگی بازتابندگی سهمی‌ها) (۰/۲۵) / ت) نادرست (فصل ۳ / ضرب داخلی) (۰/۲۵)

۳

$$\begin{cases} m-۲=۰ \\ n+۱=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=۲ & (۰/۲۵) \\ n=-۱ & (۰/۲۵) \end{cases}$$

$$AB=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & -۱ \\ ۳ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ & ۲ & ۲ \\ ۶ & ۰ & -۳ \\ ۹ & -۳ & ۶ \end{bmatrix} \quad (۰/۵)$$

(فصل ۱ / ضرب دو ماتریس)

۴

$$\underbrace{|۲A|=(|A|^۲+۴)}_{(۰/۵)} \Rightarrow \underbrace{(|A|-۲)^۲=۰}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow |A|=۲ \quad (۰/۲۵)$$

$$\underbrace{|A^{-۱}|=\frac{۱}{|A|}}_{(۰/۲۵)}=\frac{۱}{۲} \quad (۰/۲۵)$$

(فصل ۱ / خواص دترمینان)

۵

$$A=\begin{bmatrix} ۳ & -۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\underbrace{\frac{۱}{۳+۸}\begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}}_{(۰/۵)}\begin{bmatrix} ۷ \\ ۱ \end{bmatrix}}_{(۰/۲۵)}=\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} \quad (۰/۲۵)$$

(فصل ۱ / حل دستگاه با استفاده از ماتریس وارون)

۶ فاصلهٔ مرکز دایره تا خط مماس بر دایره برابر است با:

$$r=\frac{|۳(۲)+۴(۱)+۵|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}}=\frac{۱۵}{۵}=۳ \quad (۰/۵)$$

معادلهٔ دایره برابر است با: $(x-۲)^۲+(y-۱)^۲=۹$ (۰/۵)

(فصل ۲ / معادلهٔ دایرهٔ مماس بر خط)

۷

مرکز و شعاع دایرهٔ $x^۲+y^۲-۶x-۲y+۹=۰ \Rightarrow (x-۳)^۲+(y-۱)^۲=۱$ برابر است با: $O'=(۳,۱)\,,\, r'=۱$ (۰/۵)

فاصلهٔ دو مرکز برابر $d=OO'=\sqrt{(۳)^۲+(۱)^۲}=\sqrt{۱۰}$ (۰/۵) است و $d>r+r'=۲$ (۰/۲۵). بنابراین دو دایره بیرون یکدیگرند (متخارج‌اند) (۰/۲۵)

(فصل ۲ / وضعیت نسبی دو دایره)

۸ نقطهٔ B روی عمودمنصف پاره‌خط FF' قرار دارد، در نتیجه:

$BF=BF' (۱)$ (۰/۲۵)

فاصلهٔ هر نقطه روی بیضی از دو کانون برابر است با قطر بزرگ بیضی:

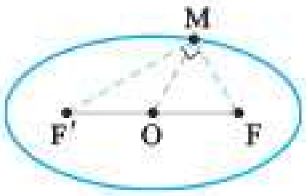
$$BF+BF'=۲a \xrightarrow{(۱)} BF=BF'=a \quad (۰/۲۵)$$

بنا به رابطهٔ فیثاغورس در مثلث BOF، داریم:

$$OF^۲+OB^۲=BF^۲ \xrightarrow{(۰/۲۵)} c^۲+b^۲=a^۲ \quad (۰/۲۵)$$

(فصل ۲ / اجزای بیضی)

۹ الف)



$$\begin{cases} ۲a=۱۰ \Rightarrow a=۵ \\ ۲b=۶ \Rightarrow b=۳ \end{cases} (۰/۲۵) \Rightarrow a^۲=b^۲+c^۲ \Rightarrow c=۴ \quad (۰/۲۵)$$

در مثلث MFF'، میانهٔ وارد بر یک ضلع، نصف ضلع روبه‌رو است $MO=\frac{۱}{۲}FF'=۴$. در نتیجه مثلث MFF' قائم‌الزاویه است. (۰/۲۵)

ب) $MF+MF'=۲a=۱۰ \Rightarrow MF'=۱۰-MF$ (۰/۲۵)

$$MF^۲+MF'^۲=FF'^۲ \Rightarrow \underbrace{MF^۲+(۱۰-MF)^۲=۸^۲}_{(۰/۲۵)}$$

$$\Rightarrow MF=۵-\sqrt{۷} \quad (۰/۲۵)$$

(فصل ۲ / اجزای بیضی)

۱۰ الف) با استفاده از جایگاه رأس و خط هادی سهمی قائم در دستگاه مختصات، خواهیم داشت: $a=-۴$ (۰/۲۵)

دهانهٔ سهمی رو به پایین است و معادلهٔ آن برابر است با:

$(x-۲)^۲=۴(-۴)(y-۳)$ (۰/۵) (فصل ۲ / معادلهٔ سهمی)

ب) مختصات کانون سهمی برابر است با: $F=(۲,-۱)$ (۰/۵)

(فصل ۲ / اجزای سهمی)

۱۱ اگر قطر دهانهٔ دیش را با $۲b$ و گودی آن را با h نمایش دهیم، فاصلهٔ کانونی برابر $a=\frac{۴b^۲}{۱۶h}$ (۰/۲۵) است.

$h=۹$ و $۲b=۶۰$. با جای‌گذاری در رابطهٔ فوق، داریم:

$$a=\frac{(۲b)(۲b)}{۱۶h}=\frac{۶۰\times۶۰}{۱۶(۹)}=۲۵ \quad (۰/۵)$$

(فصل ۲ / اجزای سهمی)

۱۲ الف) $b=-۳$ (۰/۵) ب) محور zها (۰/۵)

پ) نقطهٔ $A=(۰,۲,۳)$ (۰/۲۵) و مختصات وسط AB برابر است با: $(-۲,۴,۰)$، (۰/۲۵) (فصل ۳ / معرفی فضای $\mathbb{R}^۳$)

۱۳

$$\vec{b}+\vec{c}=(۲,-۳,۶) \; (۰/۵) \;,\; \underbrace{\vec{a}'=\frac{\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})}{|(\vec{b}+\vec{c})|^۲}(\vec{b}+\vec{c})}_{(۰/۲۵)}$$

$$=\frac{۳۵}{۴۹}(۲,-۳,۶) \quad (۰/۷۵)$$

(فصل ۳ / تصویر قائم بردار)

۱۴

$$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^۲=|\vec{O}|^۲ \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow |\vec{a}|^۲+|\vec{b}|^۲+|\vec{c}|^۲+۲(\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a})=۰ \quad (۰/۵)$$

$$\Rightarrow ۱+۴+۹+۲(\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a})=۰ \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow (\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a})=-۷ \quad (۰/۲۵)$$

(فصل ۳ / ضرب داخلی)