

دوست خوبم، سلام

یک سؤال قدیمی (و البته شبیه جُک) در بین دانش‌آموزان رشته ریاضی متداول است که از معلم‌های ریاضی دبیرستان و استادان ریاضی دانشگاه می‌پرسند: «بالأخره می‌گویید حساب دیفرانسیل و انتگرال در زندگی روزمره به چه دردی می‌خورد؟» از این شوخی که بگذریم به نظرم اگر بخواهم چند مبحث خیلی مهم و کاربردی ریاضی در زندگی را نام ببرم این‌ها هستند: آمار، احتمال، منطق و حساب، سه مورد از این‌ها در همین کتاب آمار و احتمال یازدهم که قرار است بخوانید و یاد بگیرید، هست.

مؤلف‌های خوبمان آقابان مهریار و مهرداد راشدی این کتاب را با دقتی مثال‌زدنی نوشته‌اند، به ریزترین نکات توجه کرده‌اند؛ پوشش مطالب، تنوع سؤال‌ها، چیدمان آموزشی و ... و تمام ویژگی‌های دیگری که این کتاب را به یک کتاب کار خوب و دوست‌داشتنی تبدیل کرده است.

امیدوارم با حل سؤال‌های این کتاب نمره‌های ریاضی‌تان از نظر آماری رشد کنند و احتمال موفقیتتان در هر کاری که دوست دارید به ۱ نزدیک شود.

خوب و شاد باشید.


مقدمه مؤلف

من همیشه به تصمیم اول احترام می‌گذارم.
تصمیم اولی که به ذهنت می‌زند،
با همهٔ جان گرفته می‌شود.
تصمیم دوم با عقل،
تصمیم سوم با ترس؛
از تصمیم اول که رد شدی، باقی‌ش مزه‌ای ندارد...

(رضا امیرخانی)

سلام

به کتاب آمار و احتمال یازدهم خوش آمدید.
امیدوارم این کتاب به جان شما بنشیند و به قول رضا امیرخانی عزیز، تصمیم اول ذهنتان در رابطه با این کتاب، با مزه‌های شگفت‌انگیز و طعم لذیذ یادگیری همراه باشد.
راستش را بخواهید در نوشتن این کتاب تمام تلاشمان را کردیم تا کتابی عالی در شأن شما تألیف کنیم.
تمام متن کتاب درسی را با دقت زیادی مورد بررسی قرار دادیم و در انتخاب و چینش سؤالات هر بخش وسواس به خرج دادیم.
در ابتدای هر بخش، یک درس‌نامه برای مرور سریع مطالب آن بخش قرار دادیم. برای تسلط بیشتر بر متن کتاب درسی، سؤالات «کامل کنید» و «درست و نادرست» در نظر گرفتیم و سپس «پرسش‌های تشریحی» آورده شده است.
در انتهای هر فصل تعدادی سؤال دشوار (البته منطبق با کتاب درسی!) برای دانش‌آموزان علاقمند گذاشتیم؛ این سؤالات، پاسخ تشریحی دقیق و یاددهنده دارند!

امیدوارم از حل سؤالات کتاب لذت ببرید. 


در پایان لازم است از زحمات دکتر کوروش اسلامی و سرکار خانم ده‌حقی تشکر ویژه داشته باشیم.

از آقای علی اعلا که با دقت و ریزبینی بر غنای کار افزودند، سپاسگزاریم.

هم‌چنین از همکاران تولید که زحمت آماده‌سازی کتاب را کشیدند، ممنونیم.

از طریق آدرس زیر می‌توانید online با ما در ارتباط باشید و نظرات، پیشنهادات و ایرادات احتمالی را با ما در میان بگذارید.

مهرداد راشدی - مهرداد راشدی

 @AmarEhtemal 11

فهرست

فصل اول: آشنایی با مبانی ریاضیات

- درس اول: آشنایی با منطق ریاضی ۸
- درس دوم (قسمت اول): مجموعه - زیرمجموعه ۲۱
- درس سوم (قسمت دوم): قوانین اعمال بین مجموعه‌ها (جبر مجموعه‌ها) ۲۸
- پرسش‌های دشوار ۳۸

فصل دوم: احتمال

- درس اول: مبانی احتمال ۴۱
- درس دوم: احتمال غیرهم‌شانس ۵۹
- درس سوم: احتمال شرطی ۶۵
- درس چهارم: پیشامدهای مستقل و وابسته ۷۱
- پرسش‌های دشوار ۸۱

فصل سوم: آمار توصیفی

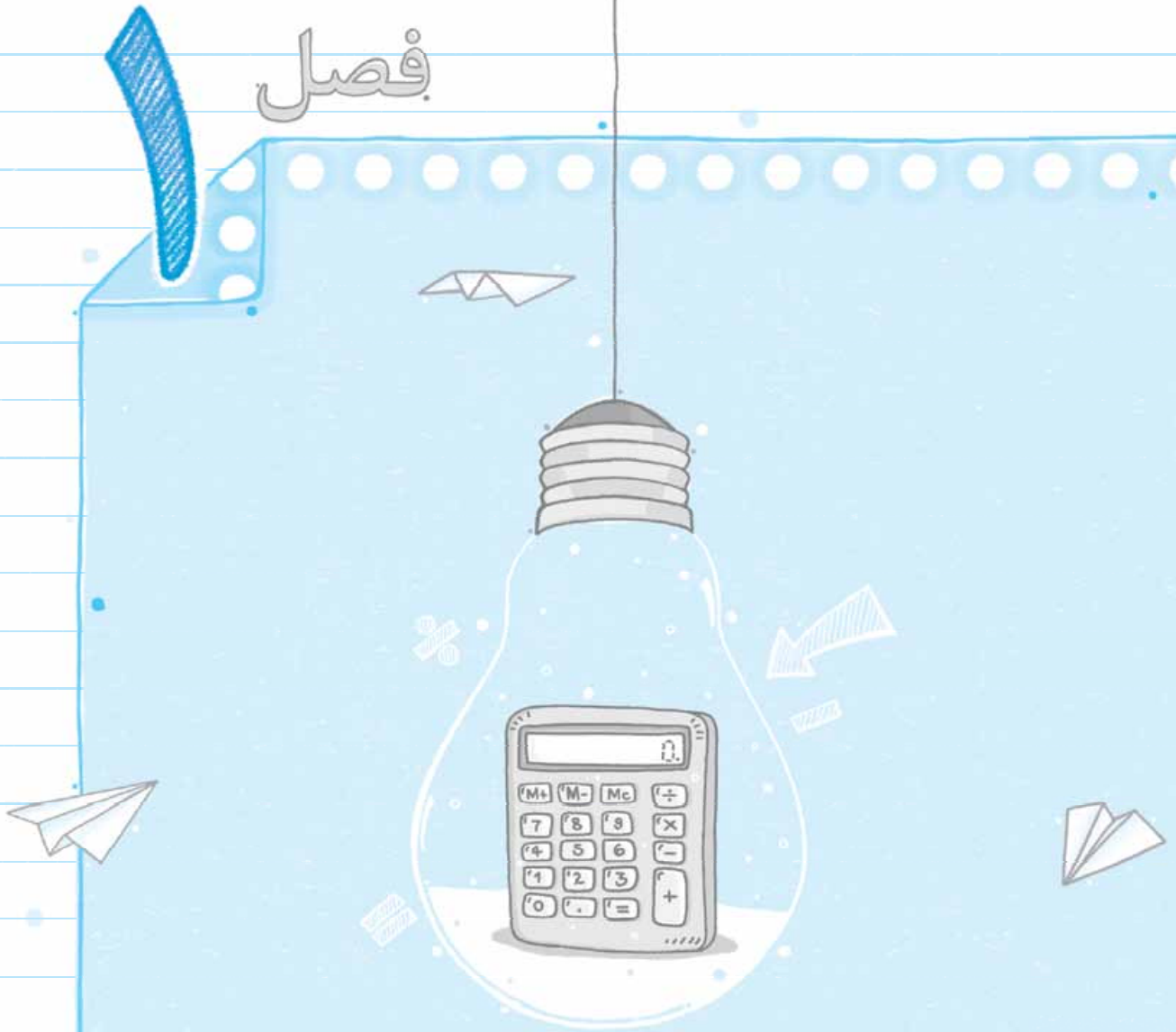
- درس اول: توصیف و نمایش داده‌ها ۸۵
- درس دوم: معیارهای گرایش به مرکز ۹۱
- درس سوم: معیارهای پراکندگی ۹۸
- پرسش‌های دشوار ۱۰۸

فصل چهارم: آمار استنباطی

- درس اول: گردآوری داده‌ها ۱۱۰
- درس دوم: برآورد ۱۱۸
- پرسش‌های دشوار ۱۲۵

- پاسخ پرسش‌های دشوار ۱۲۶
- آزمون نوبت اول ۱۴۴
- آزمون نوبت دوم ۱۴۵

فصل



آشنایی با مبانی
ریاضیات

درس

آشنایی با منطق ریاضی

منطق ریاضی یا منطق نمادین به بررسی دقیق استدلال‌های ریاضی می‌پردازد و درستی یا نادرستی یک استدلال را مشخص می‌کند. گزاره: جمله‌ای است خبری که دارای یکی از ارزش‌های درست یا نادرست است.

جمله مرکب

جمله «در فیلم‌های حاتمی‌کیا، پرویز پرستویی یا رضا کیانیان حضور دارند. پرویز پرستویی برای فیلم جدید حاتمی‌کیا دعوت نشده، در نتیجه رضا کیانیان در فیلم جدید حاتمی‌کیا حضور دارد» یک گزاره است که از چند جمله تشکیل شده، دو جمله اول را مقدمه‌های استدلال و جمله آخر را نتیجه استدلال می‌گویند. در مورد گزاره‌ها لازم است بدانیم:

۱) یک گزاره نمی‌تواند هم درست و هم نادرست باشد.

۲) ارزش گزاره درست را با «د» یا «T» و ارزش گزاره نادرست را با «ن» یا «F» نمایش می‌دهند.

۳) جملات پرسشی، امری و عاطفی، گزاره محسوب نمی‌شوند. مثلاً جملات: «یک لیوان آب به من بده»، «چه گوشی زیبایی!»، «آیا فیلم زندگی دیگران اثر دهنرسمارک را دیده‌ای؟»

گزاره‌نما: هر جمله خبری که شامل یک یا چند متغیر باشد و با جای‌گذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل شود، گزاره‌نما نامیده می‌شود.

دامنه متغیر گزاره‌نما: مجموعه مقادیری است که می‌توان به جای متغیرها قرار داد تا گزاره‌نما تبدیل به گزاره شود و با D نمایش می‌دهند. حالا

اگر به ازای مقادیر جایگزین شده، گزاره‌نما به گزاره‌ای درست تبدیل شود به این مقادیر مجموعه جواب گزاره‌نما می‌گویند و با S نمایش می‌دهند.

بدیهی است که S باید زیرمجموعه D باشد.

مثلاً «X مضرب ۵ است» یک گزاره‌نما است که دامنه آن اعداد صحیح و مجموعه جواب آن $\{..., -10, -5, 0, 5, 10, \dots\}$ است.

جدول ارزش گزاره‌ها

هر گزاره دارای ارزش درست یا نادرست است.

جدول ارزش یک گزاره و دو گزاره را در روبه‌رو می‌بینید.

p	p	q
د	د	د
ن	د	ن
	ن	د
	ن	ن

به طور کلی جدول ارزش n گزاره، 2^n حالت دارد.

جدول ارزش که باید بلد باشیم:

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

۱) **نقیض یک گزاره:** نقیض گزاره p را با $\sim p$ نمایش می‌دهند و معادل فارسی آن «چنین نیست که p» می‌باشد.

مثلاً نقیض گزاره « $a \in \{b, c, d\}$ » به صورت‌های زیر نوشته می‌شود:

«چنین نیست که a عضو مجموعه $\{b, c, d\}$ باشد.» یا «a عضو مجموعه $\{b, c, d\}$ نیست.»

توجه داشته باشید که، ارزش p با ارزش $\sim(\sim p)$ یکسان است و این دو گزاره را هم‌ارز منطقی گویند و این‌طور نشان می‌دهند: $\sim(\sim p) \equiv p$

۴۱ ترکیب فصلی دو گزاره: گزاره مرکب « p یا q » که به صورت « $p \vee q$ » نمایش داده می‌شود را ترکیب فصلی دو گزاره گویند.

رابط منطقی « \vee » را فاصل می‌نامند.

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

در ترکیب فصلی دو گزاره فقط در حالتی که ارزش دو گزاره نادرست باشد، ارزش ترکیب فصلی نادرست است.

۴۲ ترکیب عطفی دو گزاره: گزاره مرکب « p و q » که به صورت « $p \wedge q$ » نمایش داده می‌شود را ترکیب عطفی دو گزاره گویند و رابط منطقی « \wedge » را

عاطف می‌نامند.

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

ترکیب عطفی دو گزاره فقط در حالتی ارزش درست دارد که هر دو گزاره p و q درست باشند.

۴۳ ترکیب شرطی دو گزاره: گزاره مرکب « p آن‌گاه q » که به صورت « $p \Rightarrow q$ » نمایش داده می‌شود را ترکیب شرطی دو گزاره گویند. در ترکیب شرطی

به p ، مقدم (یا فرض) و به q ، تالی (یا حکم) گویند. ترکیب شرطی دو گزاره فقط در حالتی که p درست و q نادرست باشد دارای ارزش نادرست است.

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	ن	د
ن	د	د

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$
د	د	ن	د
د	ن	ن	ن
ن	ن	د	د
ن	د	د	د

« p شرط کافی برای q است» و « q شرط لازم برای p است».

دقت کنید! $p \Rightarrow q$ و $\sim p \vee q$ هم‌ارز منطقی‌اند.

۴۴ ترکیب دوشروطی دو گزاره: گزاره مرکب « $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ » را به صورت « $p \Leftrightarrow q$ » می‌نویسند و به صورت « p اگر و تنها اگر q » یا

« p شرط لازم و کافی برای q » می‌خوانند.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د

برای مثال، جدول ارزش دو گزاره (۱) « $(p \wedge q) \Rightarrow p$ » و (۲) « $p \Rightarrow (p \vee q)$ » را رسم می‌کنیم. این دو به «ادخال فاصل» و «حذف عاطف» معروف‌اند

که همواره با « T » هم‌ارزند.

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow p$
د	د	د	د
د	ن	ن	د
ن	د	ن	د
ن	ن	ن	د

p	q	$p \vee q$	$p \Rightarrow (p \vee q)$
د	د	د	د
د	ن	د	د
ن	د	د	د
ن	ن	ن	د

به عبارت دیگر داریم:

۱ قانون حذف عاطف: $(p \wedge q \Rightarrow p) \equiv T$

۲ قانون ادخال فاصل: $(p \Rightarrow p \vee q) \equiv T$

مثال ا با کمک جدول ارزش نشان می‌دهیم $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$. را عکس نقیض $p \Rightarrow q$ گویند.

پاسخ ا

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
د	د	د	ن	ن	د
د	ن	ن	ن	د	ن
ن	د	د	د	ن	د
ن	ن	د	د	د	د

قوانین گزاره‌ها

۱ قوانین جابه‌جایی:

$$\begin{cases} p \vee q \equiv q \vee p \\ p \wedge q \equiv q \wedge p \end{cases}$$

۲ قوانین شرکت‌پذیری:

$$\begin{cases} (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r) \\ (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \end{cases}$$

۳ قوانین توزیع‌پذیری:

$$\begin{cases} p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{cases}$$

۴ قانون عکس نقیض:

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

۵ قانون نفی مضاعف:

$$\sim(\sim p) \equiv p$$

۶ قوانین دمورگان:

$$\begin{cases} \sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q \\ \sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q \end{cases}$$

سورها

عبارت‌های «به ازای هر» یا «به ازای تمام مقادیر» که با نماد \forall نمایش داده می‌شوند به «سور عمومی» معروف‌اند. همچنین «به ازای بعضی مقادیر» یا «وجود دارد» که با نماد \exists نمایش داده می‌شوند را، «سور وجودی» می‌گویند.

باید بدانیم:

۱ گزاره‌نمای شامل متغیر x که با سور عمومی همراه می‌شود وقتی به یک گزاره درست تبدیل می‌شود که هر عضو از دامنه متغیر در گزاره‌نما صدق کند؛ به عبارت ساده‌تر هیچ مثال نقضی نداشته باشد. مثلاً گزاره‌نمای $\forall x \in \mathbb{R} : |x| \geq 0$ درست است زیرا به ازای جمیع مقادیر حقیقی x ، قدرمطلق x ، بزرگ‌تر یا مساوی صفر است.

۲ گزاره‌نمای شامل متغیر x که با سور وجودی همراه می‌شود وقتی درست است که مجموعه جواب آن تهی نباشد. یعنی حداقل یک جواب پیدا کنیم که در گزاره‌نما صدق کند. مثلاً گزاره‌نمای $p \in (\mathbb{Z}^n + 1) : \exists n \in \mathbb{N}$ درست است زیرا به ازای $n = 5$ ، $2^1 + 1$ اول نیست.

نقیض سورها

۱ نقیض گزاره $\forall x : P(x)$ عبارت است از: $\exists x : \sim P(x)$

۲ نقیض گزاره $\exists x : P(x)$ عبارت است از: $\forall x : \sim P(x)$

الف $\forall x \in \mathbb{R}^+ : x + \frac{1}{x} \geq 2$

ب $\exists x \in \mathbb{R} : \frac{x-3}{5} = 0$

مثال نقیض گزاره‌های مقابل را بنویسید.

الف $\sim (\forall x \in \mathbb{R}^+ : x + \frac{1}{x} \geq 2) \equiv \exists x \in \mathbb{R}^+ : x + \frac{1}{x} < 2$

پاسخ

ب $\sim (\exists x \in \mathbb{R} : \frac{x-3}{5} = 0) \equiv \forall x \in \mathbb{R} : \frac{x-3}{5} \neq 0$

خود گزاره درست است و نقیض آن نادرست است.

خود گزاره به ازای $x = 3$ برقرار و درست است. ولی نقیض آن نادرست است.

درست و نادرست

- یک گزاره می‌تواند هم درست و هم نادرست باشد.
- دامنه متغیر گزاره‌نمای « $4x^2 - 3x - 1 = 0$ »، مجموعه اعداد حقیقی است.
- مجموعه جواب گزاره‌نما زیرمجموعه‌ای از دامنه متغیر گزاره‌نما است.
- فقط در صورتی ارزش گزاره ترکیب فصلی p و q درست است که p و q هر دو درست باشند.
- هر گزاره شرطی با عکس نقیض خود هم‌ارز است.
- گزاره‌نمای شامل متغیر x که با سور عمومی همراه می‌شود وقتی به یک گزاره درست تبدیل می‌شود که بعضی از اعضای دامنه متغیر در گزاره‌نما صدق کنند.
- اگر بوفون ۴ گل بخورد رئال مادرید قهرمان می‌شود. بوفون ۴ گل خورده است. در نتیجه رئال قهرمان شده است.
- دو گزاره p و $\sim(\sim(\sim(\sim p)))$ هم‌ارز منطقی‌اند.

کامل کنید

- محتوای جمله خبری که دارای ارزش درست یا نادرست است را می‌گویند.
- جدول ارزش ۴ گزاره p, q, r و s دارای حالت است.
- هر جمله خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جای‌گذاری مقادیر به جای متغیر، به یک گزاره تبدیل شود نامیده می‌شود و مقادیری که می‌توان به جای متغیر قرار داد تا تبدیل به گزاره شود، نامیده می‌شود.
- از ترکیب دو یا چند گزاره به وسیله رابطه‌ها، گزاره‌ای به دست می‌آید.
- نقیض گزاره r را به صورت می‌نویسیم و آن را می‌خوانیم.
- ترکیب فصلی دو گزاره p و q را به صورت و ترکیب عطفی دو گزاره p و q را به شکل نمایش می‌دهیم.
- در گزاره مرکب « $p \Rightarrow q$ » p را و q را می‌گویند.
- گزاره مرکب « $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ » را گزاره‌های p و q می‌نامند.
- عبارت‌های «به ازای هر» با نماد و «به ازای بعضی از مقادیر» با نماد به معروف‌اند.

۱۰ گزاره‌نمای شامل متغیر x که با سور وجودی همراه است وقتی درست است که مجموعه جواب آن باشد.

پرسش‌های تشریحی

۱ از جملات زیر، کدامیک گزاره است. ارزش گزاره‌ها را مشخص کنید.

(الف) $1 + 1 = 1$ عددی اول است.

(ب) چه رنگین کمان زیبایی!

(پ) دامنه $\sqrt{|x|}$ ، x های بزرگ‌تر یا مساوی صفر است.

(ت) در هفته آینده چه روزی باران می‌بارد؟

(ث) آمار و احتمال یکی از درس‌های سال یازدهم رشته ریاضی است.

(ج) معادله درجه دوم با $\Delta = 0$ ، دارای دو ریشه حقیقی متمایز است.

(چ) پروفسور مریم میرزاخانی، ریاضی‌دان ایرانی، اولین زن برنده جایزه فیلدز بود.

(ح) عدد x عددی صحیح است.

۲ در گزاره‌نماهای زیر، دامنه متغیر گزاره‌نما و مجموعه جواب گزاره‌نما را مشخص کنید.

(الف) $6x^2 - 5x - 1 = 0$

(ب) p عددی اول است.

(پ) باقی‌مانده تقسیم x بر ۵ برابر ۳ است.

(ت) $\frac{x}{\sqrt{x}} \leq 10$

(ث) در پرتاب دو تاس با هم، مجموع ارقام دو تاس بزرگ‌تر از ۱۱ است.

۳ نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) ۵ عددی زوج است.

ب) $x \leq 3$

پ) خوارزمی یکی از بزرگ‌ترین ریاضی‌دانان ایرانی است.

ت) احتمال آمدن حداقل یک «رو» در پرتاب دو سکه با هم، برابر $\frac{3}{4}$ است.

ث) X زوج یا اول است.

ج) دانشگاه صنعتی امیرکبیر در خیابان حافظ است و هوای اهواز غبارآلود است.

چ) اگر p اول باشد، p^2 اول است.

ح) در مثلث ABC ، اگر $BC > AC$ ، آن‌گاه $\hat{A} > \hat{B}$.

۴ مشخص کنید هر یک از استنتاج‌های زیر، درست هستند یا نادرست.

الف) «اگر فردا جمعه باشد، مدرسه تعطیل خواهد بود.»

«فردا مدرسه تعطیل است.»

نتیجه «فردا جمعه است.»

ب) «هر عدد طبیعی که دو مقسوم‌علیه طبیعی داشته باشد، عددی اول است.»

«عدد طبیعی X ، دو مقسوم‌علیه طبیعی دارد.»

نتیجه «عدد طبیعی X اول است.»

پ) «سن علی از رضا و محمد بیشتر است.»

«سن رضا کم‌تر از سن میثم نیست.»

«چنین نیست که سن میثم کم‌تر از محمد باشد.»

نتیجه > سن محمد > سن رضا > سن میثم > سن علی

۵ حالت‌های مختلف ارزش سه گزاره p، q و r در جدول نمایش داده شده‌اند. جاهای خالی را پر کنید.

p	q	r
د	د
.....	د	ن
د	ن
.....	ن
ن	د
.....	د	ن
ن	ن
.....

p	q
د
.....	ن
ن
.....	ن

۶ اگر p و q دو گزاره باشند، جدول ارزش زیر را کامل کنید.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	ن	ن

ترکیب دوشروطی ترکیب شرطی ترکیب فصلی ترکیب عطفی

۷ جدول‌های ارزش زیر را کامل کنید.

نتیجه

الف)

p	T	$p \wedge T$	$p \vee T$	$\sim p$
د	د
ن	د

$p \wedge T \equiv \dots\dots\dots (1)$

$p \vee T \equiv \dots\dots\dots (2)$

$\sim p \vee p \equiv \dots\dots\dots (3)$

نتیجه

ب)

p	F	$p \wedge F$	$p \vee F$	$\sim p$
د	ن
ن	ن

$p \wedge F \equiv \dots\dots\dots (1)$

$p \vee F \equiv \dots\dots\dots (2)$

$\sim p \wedge p \equiv \dots\dots\dots (3)$



ب)

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

نتیجه

$p \wedge q \equiv \dots\dots\dots (1)$

$p \vee q \equiv \dots\dots\dots (2)$

ت)

p	q	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

نتیجه

$p \vee (p \wedge q) \equiv \dots\dots\dots (1)$

$p \wedge (p \vee q) \equiv \dots\dots\dots (2)$

ث)

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

نتیجه

ج)

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

نتیجه

$\sim (p \wedge q) \equiv \dots\dots\dots (1)$

$\sim (p \vee q) \equiv \dots\dots\dots (2)$

چ)

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \Leftrightarrow \sim q$
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

نتیجه

$p \Leftrightarrow q \equiv \dots\dots\dots$

ح)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Leftrightarrow \sim q$	$\sim p \Leftrightarrow q$
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

نتیجه

$p \Leftrightarrow \sim q \equiv \dots\dots\dots$