

مقدمه ناشر

یکی از کارهایی که تو هندسه انجام می‌دیم اثبات قضیه‌هاست که شاید خیلی‌ها دوشش ندارن و با خودشون می‌گن این اثبات‌ها به چه دردمون می‌خوره؟!!

شاید فک کنید هیچ‌وقت از اثبات‌ها تو زندگیتون استفاده نکنید و فقط به درد نمره امتحانتون بخوره!! ولی اثبات‌ها باعث می‌شن که درست فکر کنید و بهت یاد می‌دن که خیلی منظم و دقیق بین افکار ارتباط برقرار کنی! این‌ها زندگیتون رو بسیار ساده‌تر می‌کنند. باور کنید!!!

خلاصه این‌که هندسه نکته‌های جذاب زیادی واسه زندگی داره! از استاد کیوان صارمی عزیز که زحمت تألیف این کتاب رو کشیدن و هم‌چنین همهٔ بچه‌های گروه تألیف و تولید خیلی‌سبز بسیار ممنونیم

مقدمه مؤلف


خلاصه و مفید بخوام بهترتون بگم این کتاب «آنچه باید بدانید است»؛ یعنی هر چی لازمه رو براتون آوردم و هر چیزی که جاش تو این کتاب نبود نیاوردم. راستش سخت‌ترین قسمتش هم همین نیاوردنا بود. (حالا نمی‌دونم چه قدر موفق بودم تو این زمینه.) در تألیف این کتاب خیلیا به من کمک کردن؛ جا داره ازشون تشکر کنم:

● مهندس سبزمیدانی که به من اصول کتاب‌نوشتن رو یاد دادن. ممنونم بابت همه چیز.

● پیام ابراهیم‌نژاد که راهنمایی کرد منو.

● احسان حسینیان که اعتماد داشت بهم.

● و همه دوستان واحد تولید خیلی سبزمون که زحمت تولید کتاب رو

کشیدن. دمتون گرم. 

فهرست مطالب

۹

دایره

فصل اول

۷۴

تبدیل‌های هندسی و کاربردها

فصل دوم

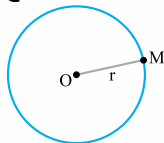
۱۰۸

روابط طولی در مثلث

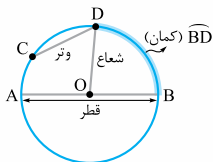
فصل سوم

مفاهیم اولیه دایره

• **دایره** • به مجموعه نقاطی از صفحه که از یک نقطه ثابت فاصله‌ای ثابت دارند، دایره می‌گوییم. به نقطه ثابت، مرکز و به فاصله ثابت، شعاع دایره گفته می‌شود.



دایره‌ای را که مثل شکل روبه‌رو مرکزش O و شعاعش r باشد، به صورت $C(O, r)$ نمایش می‌دهیم.



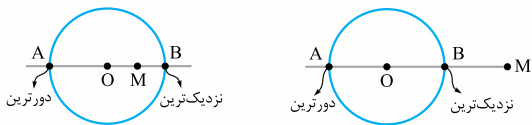
• چند تعریف مقدماتی از دایره •

قبلاً با مفاهیمی مثل شعاع، وتر، کمان و ... آشنا شدید. برای این که این مفاهیم یادتان بیاید به شکل مقابل توجه کنید:

• **وضعیت نقطه و دایره** • وضعیت نقطه و دایره با توجه به فاصله‌ای که آن نقطه از مرکز دایره دارد، مشخص می‌شود. نگاه کنید:

| رابطه | شکل | وضعیت نقطه و دایره |
|----------|-----|--------------------|
| $OA > r$ | | نقطه خارج دایره |
| $OA = r$ | | نقطه روی دایره |
| $OA < r$ | | نقطه داخل دایره |

• بیشترین و کمترین فاصله یک نقطه از دایره



به شکل‌هایی که برایتان کشیدم توجه کنید. همان‌طور که می‌بینید نقطه M چه داخل دایره باشد و چه خارج از آن، وقتی خطی که از نقطه M و مرکز دایره می‌گذرد رسم بشود، نزدیک‌ترین نقطه به M و دورترین نقطه از آن پیدا می‌شود. حالا اگر فرض کنیم فاصله M از مرکز d و شعاع دایره r باشد، بیشترین و کمترین فاصله M از دایره برابر هستند با:

$$MA = \text{فاصله بیشترین} = d + r$$

$$MB = \text{فاصله کمترین} = \boxed{d - r} \text{ یا } \boxed{r - d}$$

وقتی M داخل دایره است. وقتی M خارج دایره است.

• وضعیت خط و دایره • وضعیت خط و دایره با توجه به فاصله مرکز

دایره از خط یا تعداد نقطه‌های مشترک خط و دایره مشخص می‌شود.

این موضوع را در جدول زیر ببینید:

| تعداد نقاط مشترک | رابطه | شکل | وضعیت خط و دایره |
|------------------|----------|-----|------------------|
| ۲ | $OH < r$ | | مقاطع |
| ۱ | $OH = r$ | | مماس |

| تعداد نقاط مشترک | رابطه | شکل | وضعیت خط و دایره |
|------------------|----------|-----|------------------|
| ۰ | $OH > r$ | | متخارج |

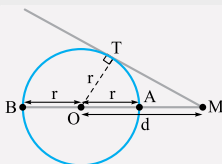
تست

شعاع (یا قطر) دایره در نقطهٔ تماس بر خط مماس عمود است و برعکس. یعنی اگر خطی در انتهای شعاعی از دایره که روی دایره است، بر آن شعاع عمود باشد، حتماً این خط بر دایره مماس است: $OH \perp d$ بر دایره مماس است.

تست

نقطهٔ M بیرون دایرهٔ C مفروض است. اگر دورترین و نزدیک‌ترین نقطهٔ دایرهٔ C به نقطهٔ M به ترتیب به فاصلهٔ ۸ و ۲ واحد از آن قرار داشته باشند، طول مماس مرسوم از نقطهٔ M بر دایرهٔ C کدام است؟

۳/۵ (۱) $\sqrt{13}$ (۲) ۴ (۳) $3\sqrt{2}$ (۴)



پاسخ گزینهٔ «۳» اول شکل مسئله را به همراه شعاع عمود بر مماس رسم می‌کنیم. با توجه به این که مسئله کم‌ترین و بیشترین فاصلهٔ M از دایره را داده است، می‌نویسیم:

$$\begin{cases} d+r=8 \\ d-r=2 \end{cases} \xrightarrow{+} 2d=10 \Rightarrow d=5 \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} r=3$$

فواست باشه ننویسی $r-d$

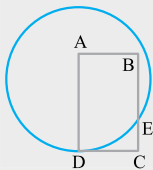


حالا با داشتن r و d می‌توانیم به کمک فیثاغورس در مثلث OTM ، طول مماس MT را محاسبه کنیم:

$$r^2 + MT^2 = d^2 \xrightarrow[r=3]{d=5} 3^2 + MT^2 = 5^2$$

$$\Rightarrow MT^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow MT = 4$$

تست



در شکل مقابل چهارضلعی $ABCD$ مستطیل است به طوری که CD بر دایره مماس است. اگر $AB = 12$ و $CE = 8$ باشد، شعاع دایره برابر کدام است؟

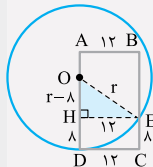
۱۳ (۲)

۱۲/۵ (۱)

۱۴ (۴)

۱۳/۵ (۳)

پاسخ: گزینه «۲» از آنجایی که CD بر دایره مماس و



$AD \perp CD$ است، مرکز دایره روی ضلع AD قرار دارد. (نقطه O را در شکل مقابل ببینید.)

اگر شعاع دایره r باشد، $OE = OD = r$

است. حالا اگر از نقطه E عمود EH را بر AD

رسم کنیم، مستطیل $DHEC$ ساخته می‌شود

که در آن $DH = EC = 8$ و $CD = HE = 12$ و در نتیجه $OH = r - 8$

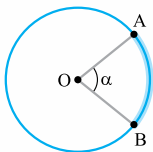
است. مقدار r را به دست می‌آوریم:

$$OE^2 = OH^2 + EH^2 \Rightarrow r^2 = (r-8)^2 + 12^2$$

$$\Rightarrow r^2 = r^2 - 16r + 64 + 144 \Rightarrow 16r = 208 \Rightarrow r = 13$$

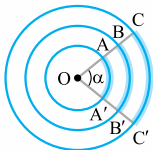
همه‌چیز راجع به زاویه‌ها و وترها در دایره

انواع زاویه‌ها در دایره

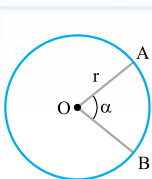


- **زاویه مرکزی** • به زاویه‌ای که رأس آن مرکز دایره و اضلاع آن شعاع‌های دایره هستند، زاویه مرکزی می‌گوییم. مثلاً زاویه α در شکل مقابل یک زاویه مرکزی است. اندازه زاویه مرکزی برابر با اندازه کمان مقابلش است؛ یعنی: $\alpha = \widehat{AB}$

توجه - دلیل تأکید روی کلمه «اندازه» این است که معمولاً با طول اشتباه گرفته می‌شود. حواستان باشد، طول و اندازه کمان با هم فرق دارند.



برای درک بهتر این موضوع به سه دایره هم‌مرکز روبرو نگاه کنید. طبق تعریف زاویه مرکزی می‌توانیم بنویسیم: $\alpha = \widehat{AA'} = \widehat{BB'} = \widehat{CC'}$ این یعنی کمان‌های $\widehat{AA'}$ ، $\widehat{BB'}$ و $\widehat{CC'}$ اندازه‌های یکسانی دارند، اما واضح است که طول‌های یکسانی ندارند: $AA' < BB' < CC'$ ؛ پس طول کمان یک چیز است و اندازه کمان چیز دیگری!

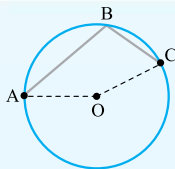


بین طول و اندازه کمان این رابطه برقرار است:

$$\bullet \text{ محیط دایره} \times \frac{\text{اندازه آن کمان}}{360^\circ} = \text{طول کمان}$$

یعنی برای کمان AB در شکل مقابل می‌توانیم

$$\bullet \text{ بنویسیم: } \text{طول AB} = \frac{\alpha}{360^\circ} \times 2\pi r$$



دایره $C(O, 2)$ مطابق شکل مقابل

مفروض است. اگر طول کمان AB برابر $\frac{4\pi}{3}$ و

$\widehat{BC} = 2\widehat{AB}$ باشد، زاویه AOC را به دست

آورید.

• پاسخ • طول کمان AB و شعاع دایره را داریم، پس می‌توانیم اندازه کمان AB را به دست بیاوریم؛ ببینید:

$$\text{محیط دایره} \times \frac{\text{اندازه کمان } AB}{360^\circ} = \text{طول کمان } AB$$

$$\Rightarrow \frac{4\pi}{3} = \frac{\widehat{AB}}{360^\circ} \times (2\pi \times 2) \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{4\widehat{AB}}{360^\circ}$$

$$\Rightarrow \widehat{AB} = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$$

از طرفی به گفته سؤال $\widehat{BC} = 2\widehat{AB}$ است؛ پس:

$$3\widehat{BC} = 2\widehat{AB} \xrightarrow{\widehat{AB}=120^\circ} 3\widehat{BC} = 2 \times 120^\circ \Rightarrow \widehat{BC} = 80^\circ$$

زاویه AOC یک زاویه مرکزی است که کمان \widehat{ABC} را نگاه می‌کند،

$$A\widehat{OC} = \widehat{ABC} = \widehat{AB} + \widehat{BC} = 120^\circ + 80^\circ = 200^\circ \quad \text{بنابراین:}$$

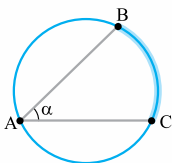
• زاویه محاطی • به زاویه‌ای که رأس آن روی محیط دایره و اضلاع آن

وترهایی از دایره هستند، زاویه محاطی می‌گوییم.

مثلاً در شکل مقابل، زاویه α یک زاویه محاطی

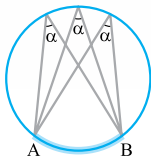
است. اندازه زاویه محاطی نصف کمان مقابلش

است؛ یعنی:



$$\alpha = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

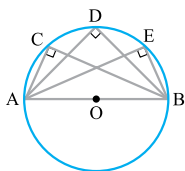
تمرین



در هر دایره:

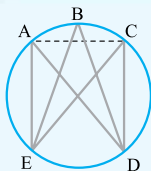
۱ اندازه زاویه‌های محاطی رو به یک کمان، با هم برابرند.

$$\alpha = \frac{\widehat{AB}}{2}$$



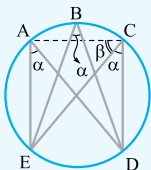
۲ زاویه محاطی رو به قطر 90° است.

$$\hat{C} = \hat{D} = \hat{E} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$



در شکل مقابل قطر دایره است.

اگر مجموع زاویه‌های A، B و C برابر 15° باشد، زاویه ACE را به دست آورید.



پاسخ همان طور که از شکل پیداست، زاویه‌های محاطی A، B و C همگی رو به کمان ED هستند؛ پس می‌توانیم همه آن‌ها را برابر α بگذاریم. سؤال می‌گوید جمع این زاویه‌ها 15° است؛ بنابراین:

$$\alpha + \alpha + \alpha = 15^\circ \Rightarrow 3\alpha = 15^\circ \Rightarrow \alpha = 5^\circ$$

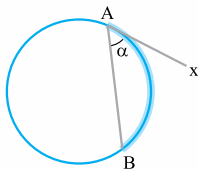


حالا خوب به زاویه \widehat{ACD} نگاه کنید. همان طور که می بینید این زاویه رو به قطر AD است، پس $\widehat{ACD} = 90^\circ$ و در نتیجه:

$$\widehat{ACD} = 90^\circ \Rightarrow \beta + \alpha = 90^\circ \xrightarrow{\alpha = 50^\circ} \beta + 50^\circ = 90^\circ$$

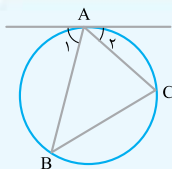
$$\Rightarrow \beta = 40^\circ$$

• **زاویهٔ ظلّی** • به زاویه‌ای که رأس آن روی محیط دایره، یک ضلع آن



وتری از دایره و ضلع دیگرش مماس بر دایره باشد، زاویهٔ ظلّی می‌گوییم. مثلاً زاویهٔ α در شکل مقابل یک زاویهٔ ظلّی است. اندازهٔ این زاویه هم مثل زاویهٔ محاطی نصف کمان مقابلش است، یعنی:

$$\alpha = \frac{\widehat{AB}}{2}$$



در شکل مقابل A نقطهٔ تماس است.

اگر $\widehat{BC} = 92^\circ$ و $\hat{A}_1 = 1/5 \hat{A}_2$ باشد، اندازهٔ کمان \widehat{ACB} را به دست آورید.

• **پاسخ** • \hat{A} ، زاویهٔ محاطی رو به کمان BC است؛ بنابراین

$$\hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{92^\circ}{2} = 46^\circ$$

است. واضح است که جمع زاویه‌های A_1 ،

$$\hat{A}_1 + \hat{A} + \hat{A}_2 = 180^\circ$$

و A باید 180° باشد، پس داریم:

$$\xrightarrow{\substack{\hat{A}=46^\circ \\ \hat{A}_1=1/5\hat{A}_2}} 1/5\hat{A}_2 + 46^\circ + \hat{A}_2 = 180^\circ \Rightarrow 2/5\hat{A}_2 = 134^\circ$$

$$\Rightarrow A_2 = \frac{134^\circ}{2/5} \times \frac{5}{4} = 53/6^\circ$$

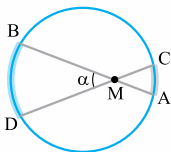
از طرفی \hat{A}_r یک زاویه ظلّی رو به کمان AC است؛ بنابراین:

$$\hat{A}_r = \frac{\widehat{AC}}{r} \Rightarrow 53/6^\circ = \frac{\widehat{AC}}{r} \Rightarrow \widehat{AC} = 107/2^\circ$$

بنابراین اندازه کمان ACB برابر می‌شود با:

$$\widehat{ACB} = \widehat{AC} + \widehat{BC} = 107/2^\circ + 92^\circ = 199/2^\circ$$

• زاویه بین دو وتر • به زاویه‌ای که از برخورد دو وتر در داخل دایره ساخته

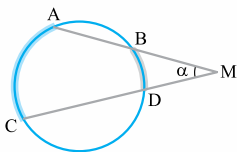


می‌شود، زاویه بین دو وتر می‌گوییم. مثلاً در شکل مقابل زاویه α این چنین است. اندازه این زاویه از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\alpha = \frac{\widehat{AC} + \widehat{BD}}{2}$$

• زاویه بین امتداد دو وتر • به زاویه‌ای که از برخورد امتداد دو وتر در

خارج از دایره ساخته می‌شود، زاویه بین امتداد دو وتر می‌گوییم.



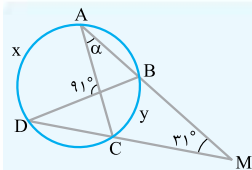
$$\alpha = \frac{\widehat{AC} - \widehat{BD}}{2}$$

دست می‌آید:

مثال در شکل مقابل x ، y و α را

به دست آورید.

(تمرین کتاب درسی)





پاسخ زاویه بین امتداد دو وتر در خارج از دایره، 31° است؛ پس:

$$31^\circ = \frac{x-y}{2} \Rightarrow x-y=62^\circ \quad (1)$$

زاویه بین دو وتر در داخل دایره هم 91° است، پس:

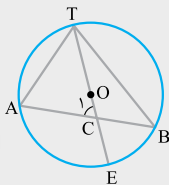
$$91^\circ = \frac{x+y}{2} \Rightarrow x+y=182^\circ \quad (2)$$

حالا با حل دستگاه زیر، اول x و y و بعد α را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x-y=62^\circ \\ x+y=182^\circ \end{cases} \xrightarrow{+} 2x=244^\circ \Rightarrow x=122^\circ$$

$$\xrightarrow{\text{جای‌گذاری } x+y=182^\circ} y=60^\circ \xrightarrow{\text{به } y \text{ است. محاطی رو}} \alpha = \frac{y}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

تست



در شکل مقابل، O مرکز دایره است. اگر

$\hat{A} = 65^\circ$ و $\hat{B} = 35^\circ$ باشد، زاویه C چند

درجه است؟

۶۱ (۲)

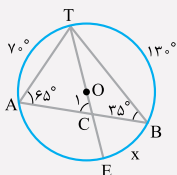
۶۰ (۱)

۶۳ (۴)

۶۲ (۳)

پاسخ گزینه «۱» زاویه‌های A و B محاطی هستند، پس:

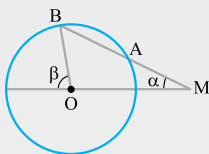
$$\begin{cases} \hat{A} = \frac{\widehat{TB}}{2} \xrightarrow{\hat{A}=65^\circ} \widehat{TB} = 130^\circ \\ \hat{B} = \frac{\widehat{AT}}{2} \xrightarrow{\hat{B}=35^\circ} \widehat{AT} = 70^\circ \end{cases}$$



از طرفی پاره‌خط TE قطر دایره است؛
بنابراین $\widehat{TE} = 180^\circ$ و در نتیجه
حالا با توجه به $x = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$
این که \hat{C}_1 زاویه بین دو وتر در داخل دایره
است، مقدار آن به راحتی پیدا می‌شود:

$$\hat{C}_1 = \frac{x + 70^\circ}{2} = \frac{50^\circ + 70^\circ}{2} = 60^\circ$$

تست



دایره $C(O, r)$ مطابق شکل مفروض است.
از نقطه M در خارج دایره خطی چنان
رسم کرده‌ایم که دایره را در دو نقطه A و
 B قطع کرده است. اگر $MA = r$ باشد،

نسبت $\frac{\beta}{\alpha}$ برابر کدام است؟ (تمرین کتاب درسی)

۳ / ۲۵ (۴)

۳ (۳)

۲ / ۷۵ (۲)

۲ (۱)

• پاسخ گزینۀ «۳» اول شعاع OA را رسم می‌کنیم. چون $MA = r$ ،

پس مثلث OAM متساوی‌الساقین و در نتیجه $\hat{AOM} = \hat{M} = \alpha$

است. زاویه‌های $\hat{B}OC$ و $\hat{A}OD$ هر

دو مرکزی هستند، پس $\widehat{AD} = \alpha$

و $\widehat{BC} = \beta$ است، حال با توجه به

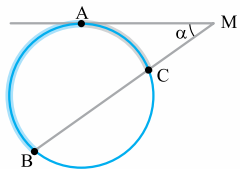
این که \hat{M} ، زاویه بین امتداد دو وتر

در خارج دایره است، داریم:

$$\hat{M} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AD}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\beta - \alpha}{2} \Rightarrow 2\alpha = \beta - \alpha \Rightarrow 3\alpha = \beta \Rightarrow \frac{\beta}{\alpha} = 3$$



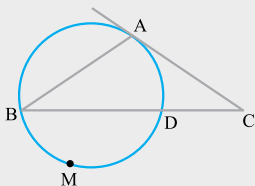
• زاویه بین امتداد وتر و مماس • همان طور که در شکل زیر می بینید به



زاویه‌ای مثل α که از برخورد امتداد یک وتر و مماس در خارج دایره ساخته می‌شود، زاویه بین امتداد وتر و مماس می‌گوییم. اندازه‌اش هم از این رابطه پیدا می‌شود:

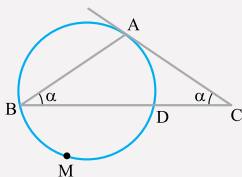
$$\alpha = \frac{\widehat{AB} - \widehat{AC}}{2}$$

تست



در شکل مقابل مماس AC بر دایره، با وتر AB از دایره برابرند. اگر $\widehat{DMB} = 174^\circ$ باشد، زاویه C چند درجه است؟

- | | |
|--------|--------|
| ۳۲ (۲) | ۳۱ (۱) |
| ۳۴ (۴) | ۳۳ (۳) |



• پاسخ • گزینه «۱» از آن جایی که $AB = AC$ ، پس مثلث ABC متساوی الساقین است، در نتیجه می‌توان گفت $\hat{B} = \hat{C} = \alpha$. یک زاویه محاطی و \hat{C} زاویه بین امتداد وتر و مماس است، پس:

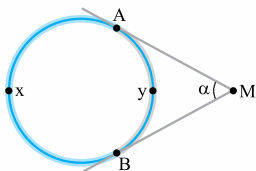
$$\left\{ \begin{aligned} \hat{B} &= \frac{\widehat{AD}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\widehat{AD}}{2} \Rightarrow \widehat{AD} = 2\alpha \\ \hat{C} &= \frac{\widehat{AB} - \widehat{AD}}{2} \xrightarrow[\hat{C} = \alpha]{\widehat{AD} = 2\alpha} \alpha = \frac{\widehat{AB} - 2\alpha}{2} \\ \Rightarrow 2\alpha &= \widehat{AB} - 2\alpha \Rightarrow \widehat{AB} = 4\alpha \end{aligned} \right.$$

از طرفی یک دایره کلاً 36° درجه است، بنابراین:

$$\widehat{BMD} + \widehat{AD} + \widehat{AB} = 36^\circ \Rightarrow 174^\circ + 2\alpha + 4\alpha = 36^\circ$$

$$\Rightarrow 6\alpha = 186^\circ \Rightarrow \alpha = 31^\circ$$

• زاویه بین دو مماس • همان طور که در شکل زیر می بینید به زاویه ای

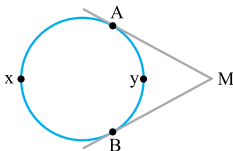


مثل α که از برخورد دو مماس در خارج دایره ساخته می شود، زاویه بین دو مماس می گوئیم. اندازه اش هم می شود:

$$\alpha = \frac{\widehat{AxB} - \widehat{AyB}}{2}$$



زاویه بین دو مماس و کمان کوچکی که در دایره می سازد، مکمل یکدیگرند. (مهموعشون ۱۸۰ درجه اس.)



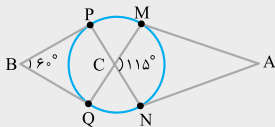
$$\widehat{M} + \widehat{AyB} = 180^\circ$$

کمان کوچیکه (\widehat{AxB}) هم کمان بزرگس که باهاش کاری نداریم!

هواستون باشه که این نکته فقط برای زاویه بین دو مماس برقراره.



پاره خط های AM ، AN ، BP و BQ مطابق شکل زیر بر دایره مماس اند.

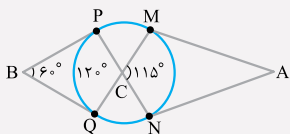


زاویه $\angle MAN$ به درجه کدام است؟

(خارج ۱۴۰۰)

۶۵ (۲) ۶۰ (۱)

۷۵ (۴) ۷۰ (۳)



پاسخ گزینۀ «۳» ابتدا

به کمک نکته‌ای که در مورد زاویۀ بین دو مماس گفتیم، اندازه کمان PQ را محاسبه می‌کنیم:

$$\hat{B} + \widehat{PQ} = 180^\circ \Rightarrow 60^\circ + \widehat{PQ} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{PQ} = 120^\circ$$

از طرفی \hat{C} ، زاویۀ بین دو وتر در داخل دایره است، پس:

$$115^\circ = \frac{120^\circ + \widehat{MN}}{2} \Rightarrow \widehat{MN} = 110^\circ$$

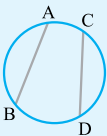
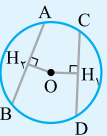
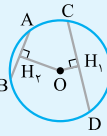
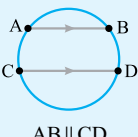
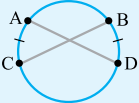
حالا اگر یک بار دیگر از نکته زاویۀ بین دو مماس استفاده کنیم، خواسته مسئله به دست می‌آید:

$$\hat{A} + \widehat{MN} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} + 110^\circ = 180^\circ \Rightarrow A = 70^\circ$$

قضیه‌های مربوط به وتر در دایره در بعضی از سؤالات این قسمت،

مباحث مربوط به زاویه‌ها را با ویژگی‌های وترها ترکیب می‌کنند. در جدول زیر تمام قضیه‌هایی را که باید راجع به وترها بدانید برایتان آورده‌ام:

| شکل | عکس قضیه | شرح قضیه | اسم قضیه |
|--|---|---|-----------------|
| <p>OH \perp AB \Leftrightarrow AH = HB \Leftrightarrow $\widehat{AM} = \widehat{MB}$</p> | برقرار است، یعنی اگر از مرکز دایره به وسط وتر یا وسط کمان نظیرش وصل کنید، بر آن وتر عمود است. | هم خود وتر و هم کمان‌های نظیرش را نصف می‌کند. | قطر عمود بر وتر |

| شکل | عکس قضیه | شرح قضیه | اسم قضیه |
|---|---|---|----------------|
|  <p>$AB = CD$</p> <p>$\Leftrightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}$</p>  <p>$AB = CD$</p> <p>$\Leftrightarrow OH_1 = OH_2$</p> | <p>برقرار است، یعنی اگر اندازه دو کمان برابر باشند، طول وترهای نظیرشان نیز برابر است و همچنین اگر فاصله دو وتر از مرکز دایره یکسان باشد، طول وترها نیز یکسان خواهد بود.</p> | <p>۱- کمان‌های مساوی ایجاد می‌کنند. ۲- فاصله‌شان از مرکز دایره یکسان است.</p> | وترهای مساوی |
|  <p>$CD > AB$</p> <p>$\Leftrightarrow OH_1 < OH_2$</p> | <p>برقرار است، یعنی هر چه فاصله یک وتر از مرکز کمتر باشد، طول وتر بزرگ‌تر است.</p> | <p>از بین آن‌ها وتری بزرگ‌تر است که فاصله‌اش از مرکز کمتر باشد. (هر چه وتر بزرگ‌تر، فاصله از مرکز کمتر)</p> | وترهای نامساوی |
|  <p>$AB \parallel CD$</p> <p>$\Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD}$</p>  | <p>لزوماً برقرار نیست. مثال نقض زیر را ببینید.</p> | <p>کمان‌های محصور بین آن‌ها هم‌اندازه هستند.</p> | وترهای موازی |