مقدمهٔ ناشـــر

یکی از کارهایی که تو هندسه انجام می‌دیم اثبات قضیه‌هاست که شاید خیلی‌ها دوسش نداشته باشن و با خودشون می‌گن این اثبات‌ها به چه دردمون می‌خوره؟!!

شاید فک کنید هیچ‌وقت از اثبات‌ها تو زندگیتون استفاده نکنید و فقط به درد نمره امتحانتون بخوره!! ولی اثبات‌ها باعث می‌شن که درست فکر کنید و بهتون یاد می‌دن که خیلی منظم و دقیق بین افکارتون ارتباط برقرار کنید! این‌ها زندگیتون رو بسیار ساده‌تر می‌کنند. باور کنید!!!

خلاصه این‌که هندسه نکته‌های جذاب زیادی واسه زندگی داره!

از آقای نصرالهی عزیز که زحمت تألیف این کتاب رو کشیدن و هم‌چنین همهٔ بچه‌های گروه تألیف و تولید خیلی‌سبز بسیار ممنونیم.

مقدمهٔ مؤلف

کنکوری‌های عزیز سلام

اگر در هر مقطع زمانی به این نتیجه رسیدید که مطالب هندسه دوازدهم را با بازدهی کامل مطالعه و جمع‌بندی کنید، این کتاب را به شما پیشنهاد می‌کنیم. تمامی مثال‌ها، تمرین‌ها و کار در کلاس‌های مهم و کاربردی با راه‌حل‌های کاملاً تشریحی و تست‌های کنکور چند سال اخیر به همراه قضایا و نکات در این کتاب گنجانده شده است به طوری که با مطالعهٔ آن به راحتی می‌توانید خود را آمادهٔ امتحان نهایی و کنکور پیش رو کنید.

لازم می‌دانم از مدیریت محترم انتشارات خیلی‌سبز که شرایط چاپ کتاب را فراهم آورده‌اند تشکر کنم. هم‌چنین از زحمات آقای ابراهیم‌نژاد و ویراستاران گرامی متشکرم.

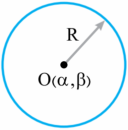
تشکر ویژه از دوست عزیزمان نوید شاهی و مهندس رسول محسنی‌منش که سهم ویژه‌ای در هم‌فکری با بنده داشتند.

فهرست مطالب

درس دوم

دایره

دایره



مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصلهٔ آن‌ها از یک نقطهٔ ثابت $O(\alpha,\beta)$ به فاصلهٔ معلوم R باشد، دایره‌ای به مرکز O و شعاع R است.

معادلهٔ هر دایره به دو صورت استاندارد و گسترده (ضمنی) نوشته می‌شود.

معادلهٔ استاندارد دایره معادلهٔ استاندارد دایره‌ای به مرکز $O(\alpha,\beta)$ و شعاع R برابر است با:

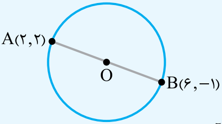
$$(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲$$

مثال **معادلهٔ دایره‌ای که نقاط $A(۲,۲)$ و $B(۶,-۱)$ دو سر یکی از قطرهای آن هستند را بنویسید.**

پاسخ ابتدا شعاع دایره را به دست می‌آوریم:

$$|AB|=۲R=\sqrt{(۶-۲)^۲+(۲-(-۱))^۲}=۵ \Rightarrow R=۲/۵$$

نقطهٔ وسط پاره‌خط (قطر) AB، مرکز دایره می‌باشد؛ بنابراین:



$$O=\frac{A+B}{۲}=(\frac{۶+۲}{۲},\frac{-۱+۲}{۲})=(۴,\frac{۱}{۲})$$

با توجه به مختصات مرکز و شعاع به‌دست‌آمده داریم:

$$(x-۴)^۲+(y-\frac{۱}{۲})^۲=۶/۲۵$$

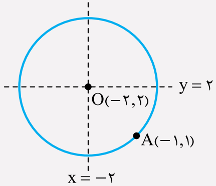
تست

به ازای هر m، معادلهٔ $(m-۲)x+(m+۱)y=۶$ معادلهٔ قطری از دایرهٔ C است. اگر نقطهٔ $A(-۱,۱)$ روی دایرهٔ C باشد، محیط دایرهٔ C کدام است؟ (سراسری ۱۴۰۱)

۱) $۲\sqrt{۲}\pi$ ۲) ۲π ۳) ۳π ۴) $۲\sqrt{۳}\pi$

پاسخ گزینهٔ «۱» می‌دانیم نقطهٔ تقاطع دو قطر از دایره مختصات مرکز را به ما می‌دهد، بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l} m=۲ \Rightarrow ۳y=۶ \Rightarrow y=۲ \\ m=-۱ \Rightarrow -۳x=۶ \Rightarrow x=-۲ \end{array}\right\} \Rightarrow O(-۲,۲)$$



فاصلهٔ O تا A طول شعاع دایره را معلوم می‌کند: $R=|OA|$

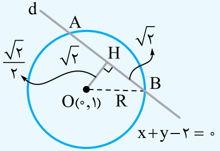
$$=\sqrt{(-۲-(-۱))^۲+(۲-۱)^۲}=\sqrt{۲}$$

بنابراین محیط دایره برابر است با:

$$۲\pi R=۲\sqrt{۲}\pi$$

مثال **معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که $O(۰,۱)$ مرکز آن بوده و روی خط به معادلهٔ $x+y=۲$ وتری به طول $۲\sqrt{۲}$ جدا کند.**

(کار در کلاس کتاب درسی)



پاسخ ابتدا فاصلهٔ O را از خط d به دست می‌آوریم:

$$|OH|=\frac{|۰+۱-۲|}{\sqrt{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

با توجه به این‌که OH وتر AB را نصف می‌کند $AH=BH=\sqrt{2}$؛ حالا به کمک قضیهٔ فیثاغورس، شعاع دایره را به دست می‌آوریم:

$$\overset{\Delta}{OBH}: R^2=OH^2+BH^2 \Rightarrow R^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+(\sqrt{2})^2 \Rightarrow R^2=\frac{5}{2}$$

با توجه به شعاع به‌دست‌آمده و مرکز داده‌شده معادلهٔ دایره به صورت مقابل خواهد بود: $x^2+(y-1)^2=\frac{5}{2}$

مثال **نقاط $A(-1,-1)$ ، $B(1,1)$ و $C(1,-3)$ رئوس مثلث ABC هستند. معادلهٔ دایرهٔ محیطی مثلث ABC را بنویسید. سپس معادلهٔ خط مماس بر این دایره را در رأس B به دست آورید.** (تمرین کتاب درسی)

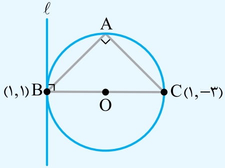
پاسخ اندازهٔ اضلاع مثلث را به دست می‌آوریم:

$$|AB|=\sqrt{(1-(-1))^2+(1-(-1))^2}=2\sqrt{2}$$

$$|AC|=\sqrt{(1-(-1))^2+(-3-(-1))^2}=2\sqrt{2} \Rightarrow BC^2=AB^2+AC^2$$

$$|BC|=\sqrt{(1-1)^2+(-3-1)^2}=4$$

در نتیجه مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ قائم‌الزاویه است؛ پس وتر، همان قطر دایره و مرکز دایره در وسط وتر واقع است.



$$O=\frac{B+C}{2} \Rightarrow O(1,-1)$$

$$|BC|=2R \Rightarrow 4=2R$$

$$\Rightarrow R=2$$

$$\xrightarrow[\text{دایره}]{\text{معادلهٔ}} (x-1)^2+(y+1)^2=4$$

خط l بر BC عمود است و از نقطهٔ $B(۱,۱)$ می‌گذرد؛ بنابراین برای به دست آوردن معادلهٔ آن داریم:
$$BC : y = ۱ \Rightarrow \ell : x = ۱$$

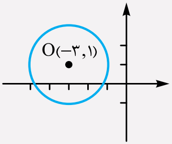
تذکر در ادامهٔ فصل و پس از آشنایی با معادلهٔ گستردهٔ دایره، این مسئله را با جای‌گذاری نقاط در معادلهٔ دایره نیز حل کنید.

تست

دایره‌ای به معادلهٔ $(x+۳)^۲ + (y-۱)^۲ = ۴$ از کدام نواحی مختصات عبور می‌کند؟

۱) دوم
۲) دوم و سوم
۳) دوم، سوم و چهارم
۴) هر ۴ ناحیهٔ مختصاتی

پاسخ گزینهٔ «۲» با توجه به معادلهٔ داده‌شده، مرکز دایره $(-۳,۱)$ و شعاع دایره ۲ می‌باشد؛ بنابراین داریم:



با توجه به شکل رسم‌شده، دایره از نواحی دوم و سوم عبور می‌کند.

معادلهٔ گستردهٔ دایره اگر در معادلهٔ دایره، هر دو پرانتز را به توان برسانیم و همه را به طرف چپ معادله بیاوریم، معادلهٔ گستردهٔ دایره حاصل می‌شود:

$$x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$$

در معادلهٔ گستردهٔ دایره، شعاع و مرکز دایره به صورت زیر به دست می‌آید:

مرکز دایره: $O(\alpha,\beta) = (\frac{-a}{۲}, \frac{-b}{۲})$

شعاع دایره: $R = \frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲ + b^۲ - ۴c}$

تست

در دایرهٔ $۲x^۲+۲y^۲-۶x+۴y-۲=۰$ اگر مرکز $O(\alpha,\beta)$ و شعاع r باشد، حاصل $\alpha r\beta$ کدام است؟

۱) $-۳\sqrt{۱۷}$ ۲) $۳\sqrt{۱۷}$ ۳) $\frac{۳\sqrt{۱۷}}{۴}$ ۴) $\frac{-۳\sqrt{۱۷}}{۴}$

پاسخ گزینهٔ «۴» طبق معادلهٔ گستردهٔ دایره ضرایب $x^۲$ و $y^۲$ باید ۱ باشد، پس کل معادله را بر ۲ تقسیم می‌کنیم و داریم:

$$۲x^۲+۲y^۲-۶x+۴y-۲=۰ \xrightarrow{\div ۲} x^۲+y^۲\underset{a}{\underbrace{-۳}}x+\underset{b}{\underbrace{۲}}y\underset{c}{\underbrace{-۱}}=۰$$

حالا با توجه به روابط مربوط به مرکز و شعاع دایره داریم:

$$O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(\overset{\alpha}{\frac{۳}{۲}},\overset{\beta}{-۱})$$

$$R=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۹+۴+۴}=\frac{\sqrt{۱۷}}{۲}$$

بنابراین حاصل‌ضرب $\alpha\beta r$ برابر است با:

$$\alpha\beta r=\frac{۳}{۲}\times(-۱)\times\frac{\sqrt{۱۷}}{۲}=\frac{-۳\sqrt{۱۷}}{۴}$$

نکته

در معادلهٔ گستردهٔ دایره با توجه به علامت $a^۲+b^۲-۴c$ سه حالت داریم:

حالت ۱: $a^۲+b^۲-۴c>۰$

معادلهٔ گسترده نشان‌دهندهٔ معادلهٔ یک دایره است.

حالت ۲: $a^۲+b^۲-۴c=۰$

معادلهٔ گسترده نشان‌دهندهٔ مختصات نقطهٔ $(\frac{-a}{۲},\frac{-b}{۲})$ است.

حالت ۳: $a^۲+b^۲-۴c<۰$

معادلهٔ گسترده نشان‌دهندهٔ هیچ نقطه‌ای در صفحه نیست.

مثال محدودهٔ a را طوری تعیین کنید تا معادلهٔ $x^{۲}+y^{۲}-۳x+۵y+a=۰$ نمایانگر معادلهٔ دایره باشد. (تمرین کتاب درسی)

پاسخ برای این‌که خروجی معادلهٔ بالا، یک دایره شود، باید شرط $a^{۲}+b^{۲}-۴c>۰$ برقرار باشد، بنابراین:

$$\begin{cases} a=-۳ \\ b=۵ \\ c=a \end{cases} \Rightarrow a^{۲}+b^{۲}-۴c>۰ \Rightarrow (-۳)^{۲}+۲۵-۴(a)>۰$$

$$\Rightarrow ۹+۲۵-۴a>۰ \Rightarrow ۳۴>۴a \Rightarrow \frac{۳۴}{۴}>a$$

تست

معادلهٔ دایره‌ای که بر دو خط $y=۲$ و $y=۶$ مماس و مرکز آن روی خط $y-x=۱$ باشد، کدام است؟

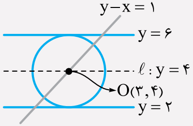
۱) $x^{۲}+y^{۲}+۶x-۸y-۱=۰$

۲) $x^{۲}+y^{۲}-۶x+۸y-۲۰=۰$

۳) $x^{۲}+y^{۲}-۶x-۸y+۲۱=۰$

۴) $x^{۲}+y^{۲}+۶x+۸y+۲۱=۰$

پاسخ گزینهٔ «۳» خط l که وسط دو خط $y=۶$ و $y=۲$ است از مرکز می‌گذرد و معادلهٔ آن $l: y=\frac{۶+۲}{۲}=۴$ می‌باشد. بنابراین مؤلفهٔ دوم مرکز، برابر ۴ است. برای به دست آوردن مختصات x آن، $y=۴$ را در معادلهٔ $y-x=۱$ جای‌گذاری کرده و داریم:



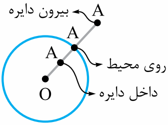
$$y-x=۱ \xrightarrow{y=۴} ۴-x=۱ \Rightarrow x=۳$$

پس مختصات مرکز $O(۳,۴)$ می‌باشد. فاصلهٔ دو خط موازی ۴ واحد و برابر قطر دایره است، بنابراین شعاع دایره، ۲ بوده و معادلهٔ آن به فرم زیر می‌شود:

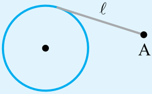
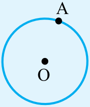
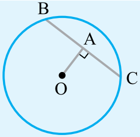
$$(x-۳)^{۲}+(y-۴)^{۲}=۴ \Rightarrow x^{۲}+y^{۲}-۶x-۸y+۲۱=۰$$

وضعیت نسبی نقطه و دایره

یک نقطه می‌تواند داخل، روی محیط و یا خارج دایره واقع شود که برای تعیین وضعیت آن فرض می‌کنیم $F(x,y)=x^2+y^2+ax+by+c$ و مختصات نقطه را در معادلهٔ گسترده جای‌گذاری می‌کنیم $(F(A))$ تا یکی از حالت‌های زیر پیش آید:



C(O,R)

حالت‌ها	شرط	وضعیت	ویژگی	شکل
(۱)	$F(A)>0$	نقطهٔ A خارج دایرهٔ C	طول مماس رسم‌شده از A $\sqrt{F(A)}=l$	
(۲)	$F(A)=0$	نقطهٔ A روی محیط دایرهٔ C	$OA=R$	
(۳)	$F(A)<0$	نقطهٔ A داخل دایرهٔ C	طول کوتاه‌ترین وتر گذرنده از نقطهٔ A $BC=2\sqrt{\lvert F(A)\rvert}$	

مثال **محدودهٔ m را طوری تعیین کنید تا نقطهٔ $A(-2,m)$ درون دایرهٔ $x^2+y^2+4x+2=0$ قرار گیرد.**

پاسخ مختصات نقطه را در معادلهٔ دایره جای‌گذاری کرده و باید داشته باشیم:

$$F(A)<0 \Rightarrow (-2)^2+(m)^2+4(-2)+2<0$$

$$\Rightarrow 4+m^2-8+2<0 \Rightarrow m^2<2 \Rightarrow -\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$$

تست

اندازهٔ کوچک‌ترین وتر گذرا از نقطهٔ $A(۱,۱)$ درون دایرهٔ $x^۲+y^۲-۳x+y-۹=۰$ کدام است؟

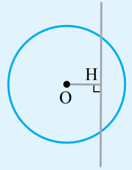
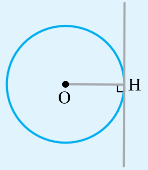
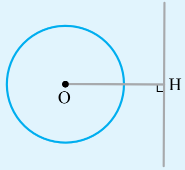
۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ گزینهٔ «۴» با توجه به این‌که نقطه درون دایره است، طول کوتاه‌ترین وتر گذرا از آن $۲\sqrt{|F(A)|}$ می‌باشد؛ پس:

$$\text{طول کوتاه‌ترین وتر} = ۲\sqrt{|F(A)|} = ۲\sqrt{|۱+۱-۳+۱-۹|}$$

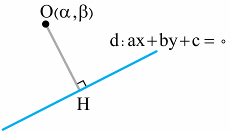
$$= ۲\sqrt{۹} = ۶$$

وضعیت نسبی خط و دایره اگر OH فاصلهٔ مرکز دایرهٔ $C(O,R)$ از خط d باشد، با توجه به طول OH و R برای خط و دایره مطابق جدول زیر سه حالت مختلف وجود دارد:

	حالت اول	حالت دوم	حالت سوم
شکل			
توصیف	خط و دایره متقاطع	خط و دایره مماس	خط و دایره متخارج
شرط	$OH < R$	$OH = R$	$OH > R$

یادآوری فاصلهٔ نقطهٔ $O(\alpha,\beta)$ از خط $ax+by+c=۰$ برابر است با:

$$|OH| = \frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$



تست

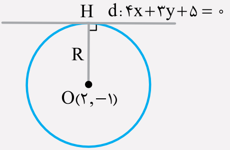
فرض کنید خطوط $x+y=۱$ و $x-y=۳$ قطرهای یک دایره و خط $۴x+۳y+۵=۰$ بر آن مماس باشد. نزدیک‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ $M(۴,-۲)$ از دایره کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۰)

۱) $\sqrt{۳}-۱$ ۲) $\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\sqrt{۵}-۲$

پاسخ گزینهٔ «۴» محل برخورد قطرها مختصات مرکز را مشخص می‌کند:

$$\begin{cases} x+y=۱ \\ x-y=۳ \end{cases} \Rightarrow ۲x=۴ \Rightarrow x=۲, y=-۱ \Rightarrow O(۲,-۱)$$

با توجه به شکل زیر، فاصلهٔ O از خط d اندازهٔ شعاع را تعیین می‌کند:

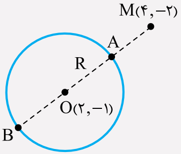


$$|OH|=R=\frac{|۴(۲)+۳(-۱)+۵|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}}$$

$$\Rightarrow R=\frac{۱۰}{۵}=۲$$

پس معادلهٔ دایره $(x-۲)^۲+(y+۱)^۲=۴$ است.

نزدیک‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ M از دایره پاره‌خط MA می‌باشد، که برای به دست آوردن اندازهٔ آن داریم:



$$|AM|=|OM|-R \Rightarrow |AM|$$

$$=\sqrt{(۴-۲)^۲+(-۱-(-۲))^۲}-۲$$

$$\Rightarrow |AM|=\sqrt{۵}-۲$$