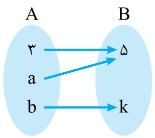
# فهرست مطالب

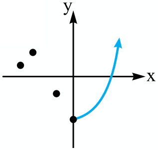
# فصل دوم
# تابع

## ۱۳ تعریف تابع

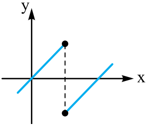
رابطهٔ تعریف‌شده از مجموعهٔ A به B زمانی تابع است که به هر عضو مجموعهٔ A دقیقاً یک عضو از مجموعهٔ B (نه بیشتر نه کم‌تر) نظیر شود.

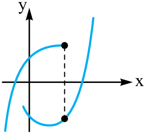
روش‌های مختلف نمایش رابطه و شرط تابع‌بودن آن‌ها در جدول زیر آمده است:

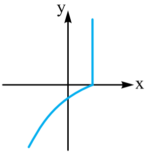
<table>
<tr><th>نوع رابطه</th><th>شرط تابع‌بودن رابطه</th><th>مثال</th></tr>
<tr><td>۱) زوج مرتبی</td><td>در بین زوج مرتب‌ها، مؤلفهٔ اول تکراری موجود نباشد مگر این‌که مؤلفهٔ دوم آن‌ها نیز با هم برابر باشد. تکراری‌بودن مؤلفهٔ دوم ایرادی ندارد.</td><td>$f=\{(۱,۲),(۳,۴),(۵,۴)\}$</td></tr>
<tr><td>۲) نمودار پیکانی</td><td>از هر یک از اعضای مجموعهٔ A، دقیقاً یک پیکان خارج شود.<br>این‌که به اعضای مجموعهٔ B، بیش از یک پیکان وارد شود ایرادی ندارد.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>۳) جدولی</td><td>در ردیف یا ستون مربوط به متغیر x، مؤلفهٔ تکراری نداشته باشیم.</td><td><table><tr><td>x</td><td>علی</td><td>پرسپولیس</td><td>مهدی</td><td>کریم</td></tr><tr><td>y</td><td>۸</td><td>۶</td><td>۲</td><td>۶</td></tr></table></td></tr>
</table>

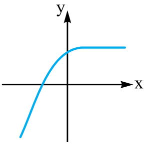
| نوع رابطه | شرط تابع‌بودن رابطه | مثال |
|---|---|---|
| **۴) مختصاتی (نموداری)** | آزمون خط عمودی: هر خط عمودی با هر طولی، نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند. |  |
| **۵) توصیفی** | توصیف نسبت داده‌شده به یک عبارت، دقیقاً واحد باشد. | رابطه‌ای که به هر فرد کد ملی او را نسبت می‌دهد. |
| **۶) ضابطهٔ جبری** | به فرم $\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ y = f(x) \end{cases}$ نمایش داده می‌شود که A دامنه و $y=f(x)$ ضابطهٔ آن است. به ازای هر ورودی (دامنه) دقیقاً یک خروجی (برد) وجود داشته باشد. | $\begin{cases} f: \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = 3x - 1 \end{cases}$ |

**تست** **کدام نمودار، نمایش یک تابع $y=f(x)$ است؟** (خارج ۹۸)

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

**پاسخ** **گزینهٔ ۴** در گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) حداقل یک خط عمودی وجود دارد، که با نمودار تابع بیش از یک برخورد داشته باشد.

**تست** اگر $f=\{(۱,x-۲y),(۲,۳),(۹,۵),(۱,-۷),(۹,x+y)\}$ یک تابع باشد، مقدار $x^۲+y^۲$ چند برابر $-x-۴y$ است؟ (سراسری ۱۴۰۱)

۱) ۲   ۲) ۱   ۳) ۱-   ۴) ۲-

**پاسخ** **گزینهٔ ۳** رابطهٔ داده‌شده تابع است و نباید بین زوج مرتب‌ها مؤلفهٔ اول تکراری وجود داشته باشد؛ مگر این‌که مؤلفهٔ دوم آن‌ها نیز با هم برابر باشند؛ بنابراین مؤلفهٔ دوم زوج مرتب‌های $(۱,x-۲y),(۱,-۷)$ را با هم و مؤلفهٔ دوم زوج مرتب‌های $(۹,۵),(۹,x+y)$ را با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} x+y=۵ \\ x-۲y=-۷ \end{cases} \xrightarrow{\times ۲} \begin{cases} ۲x+\cancel{۲y}=۱۰ \\ x-\cancel{۲y}=-۷ \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳x=۳ \Rightarrow x=۱ \\ x+y=۵ \xrightarrow{x=۱} ۱+y=۵ \Rightarrow y=۴ \end{cases}$$

در نهایت داریم:

$$\frac{x^۲+y^۲}{-x-۴y}=\frac{۱+۱۶}{-۱-۱۶}=\frac{۱۷}{-۱۷}=-۱$$

## ۱۴ مقدار، دامنه و برد تابع

مقدار خروجی تابع به ازای هر مقدار مشخص ورودی را «مقدار تابع» می‌گوییم. به مجموعهٔ متشکل از مقادیر ورودی و خروجی تابع به ترتیب، دامنه $(D)$ و برد $(R)$ می‌گوییم. در نمایش‌های مختلف تابع، دامنه و برد به صورت صفحهٔ بعد به دست می‌آید:

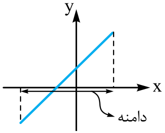
## دامنه

زوج مرتب: مجموعهٔ متشکل از مؤلفه‌های اول

نمودار پیکانی: مجموعه‌ای که پیکان از اعضای آن خارج می‌شود.

جدول: مجموعهٔ مربوط به متغیر x

مختصاتی: مجموعه اعدادی که نمودار، روی محور xها پوشش می‌دهد.




ضابطهٔ جبری: مجموعه‌ای (بازه یا فاصله) از اعداد که می‌توان آن‌ها را به عنوان مقادیر ورودی به تابع داد.

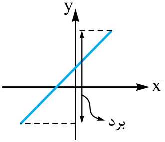
## بـرد

زوج مرتب: مجموعهٔ متشکل از مؤلفه‌های دوم

نمودار پیکانی: مجموعهٔ B که پیکان به اعضای آن‌ها وارد می‌شود.

جدول: مجموعهٔ مربوط به متغیر y

مختصاتی: مجموعه اعدادی که نمودار، روی محور yها پوشش می‌دهد.




ضابطهٔ جبری: مجموعه‌ای (بازه یا فاصله) از اعداد که به ازای مقادیر ورودی از تابع خارج می‌شود.

**تست** اگر در تابع $\begin{cases} f: A \to B \\ f(x) = \dfrac{۳x - ۱}{x - ۲} \end{cases}$ مجموعهٔ $A = \{-۳, ۱, ۳, ۷\}$ باشد، مجموع اعضای برد تابع f کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) صفر ۳) ۸ ۴) ۱۶

**پاسخ** **گزینهٔ ۱** اعضای مجموعهٔ A دامنهٔ تابع f هستند؛ بنابراین آن‌ها را به عنوان ورودی به تابع f داده و مقدار تابع را به دست می‌آوریم. مقادیر به دست آمده مجموعه برد تابع f را تشکیل می‌دهند.

$$\left.\begin{array}{l} f(-۳)=\dfrac{۳(-۳)-۱}{-۳-۲}=\dfrac{-۱۰}{-۵}=۲ \\ f(۱)=\dfrac{۳(۱)-۱}{۱-۲}=\dfrac{۲}{-۱}=-۲ \\ f(۳)=\dfrac{۳(۳)-۱}{۳-۲}=\dfrac{۸}{۱}=۸ \\ f(۷)=\dfrac{۳(۷)-۱}{۷-۲}=\dfrac{۲۰}{۵}=۴ \end{array}\right\} \Rightarrow$$

جمع مقادیر برد $=۲-۲+۸+۴=۱۲$

# ۱۵ تابع خطی و رسم آن

| الف. فرم کلی تابع: |
|---|
| به صورت $f(x)=y=mx+n$ است که در آن m شیب و n عرض از مبدأ را نشان می‌دهد. |
| خطوط عمودی و افقی را به ترتیب به فرم $x=k$ و $y=h$ $(k,h\in\mathbb{R})$ نمایش می‌دهیم. |

| ب. نوشتن ضابطه: |
|---|
| با داشتن دو نقطهٔ $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ شیب به صورت $m_{AB}=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$ به دست می‌آید. با جای‌گذاری $m_{AB}$ و یکی از نقاط A یا B در $y=mx+n$ مقدار n نیز مشخص می‌شود. (اگر از اول m و یک نقطه داشتیم، فقط جای‌گذاری می‌کنیم.) |

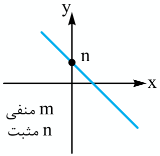
| پ. رابطهٔ بین سه نقطه از یک خط |
|---|
| اگر تابع خطی f از نقاط A و B و C عبور کند داریم: $m_{AB}=m_{BC}$ |

## ت. رسم تابع

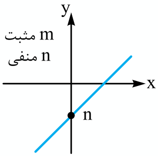
الف. رسم دقیق: دو نقطه از تابع را با مقداردهی می‌یابیم و به هم وصل می‌کنیم.

ب. رسم تقریبی: با پیداکردن مقدار و علامت شیب $(m)$ و عرض از مبدأ $(n)$، شش حالت داریم: $(m \neq ۰)$

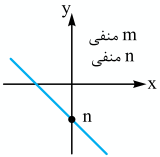
شکل تابع خطی به صورت یک خط صاف است.



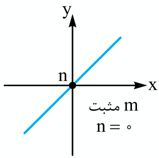
از ناحیهٔ ③ نمی‌گذرد.



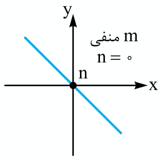
از ناحیهٔ ② نمی‌گذرد.



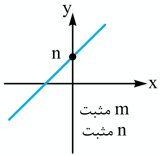
از ناحیهٔ ① نمی‌گذرد.



از ناحیهٔ ② و ④ نمی‌گذرد.



از ناحیهٔ ① و ③ نمی‌گذرد.



از ناحیهٔ ④ نمی‌گذرد.

## ث. کاربرد تابع خطی در حل مسائل

در بعضی سؤالات رابطهٔ داده‌شده به صورت خطی است. به عنوان مثال رابطهٔ بین درجهٔ دما برحسب سانتی‌گراد و فارنهایت به صورت $F = \frac{۹}{۵}C + ۳۲$ است.

**تست** نمودار یک تابع خطی از نقاط $(-۲,a)$، $(-۱,۳)$ و $(۱,-۴)$ می‌گذرد. مقدار $a$ کدام است؟ (سراسری ۱۴۰۱)

۱) ۶ ۲) ۶/۵ ۳) ۷ ۴) ۷/۵

**پاسخ** **گزینهٔ ۲** **روش اول:** اگر نقاط را به ترتیب $A(-۲,a)$، $B(-۱,۳)$ و $C(۱,-۴)$ فرض کنیم داریم:

$$m_{AB}=m_{BC}\ \Rightarrow\ \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}$$

$$\Rightarrow\ \frac{۳-a}{-۱-(-۲)}=\frac{-۴-۳}{۱-(-۱)}\Rightarrow\ \frac{۳-a}{۱}=\frac{-۷}{۲}$$

$$\xrightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}}\ ۶-۲a=-۷\ \Rightarrow\ ۲a=۱۳\ \Rightarrow\ a=۶/۵$$

**روش دوم:** بین نقاط موجود روی یک خط تناسب خطی برقرار است؛ یعنی به ازای تغییرات مقدار مشخصی از x (ورودی تابع) مقدار مشخصی از y (خروجی یا مقدار تابع) تغییر می‌کند، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{array}{ccccc} & \text{ورودی} & & \text{خروجی} & \\ & ۱ & \to & -۴ & \\ -۲ & & & & +۷ \\ & -۱ & \to & ۳ & \\ -۱ & & & & k \\ & -۲ & \to & a & \end{array}$$

حالا بین تغییرات (افزایشی یا کاهشی) تناسب می‌بندیم و مقدار k را می‌یابیم:

$$k=\frac{(-۱)\times(+۷)}{-۲}=\frac{۷}{۲}$$

حالا برای مقدار a داریم:

$$a=۳+k=۳+۳/۵=۶/۵$$

**تست** در یک تابع خطی $f(۱)=۵$، $f(۳)=-۹$ است. اگر $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,۰\le x\le ۵\}$ دامنهٔ تابع f باشد، برد این تابع کدام است؟

۱) $-۴۷\le y\le ۷$ ۲) $-۲۳\le y\le ۷$ (خارج ۱۴۰۱)

۳) $-۴۷\le y\le ۱۲$ ۴) $-۲۳\le y\le ۱۲$

**پاسخ** **گزینهٔ ۴** با توجه به صورت سؤال تابع از نقاط $(۱,۵)$ و $(۳,-۹)$ عبور می‌کند. شیب را به دست آورده و با جای‌گذاری یکی از

نقاط، ضابطهٔ تابع خطی را به دست می‌آوریم:

$$m=\frac{-۹-۵}{۳-۱}=\frac{-۱۴}{۲}=-۷$$

$$y=mx+n \xrightarrow{m=-۷} y=-۷x+n$$

$$\xrightarrow{(۱,۵)} ۵=-۷(۱)+n \Rightarrow n=۱۲ \Rightarrow y=-۷x+۱۲$$

در تابع خطی می‌توان دو سر بازهٔ مربوط به دامنه $(x=۵, x=۰)$ را به تابع داده و دو سر بازهٔ مربوط به برد را به دست آورد:

$$\begin{cases} x=۰ \Rightarrow y=-۷(۰)+۱۲=۱۲ \\ x=۵ \Rightarrow y=-۷(۵)+۱۲=-۲۳ \end{cases} \Rightarrow \underbrace{-۲۳}_{\text{عدد کوچک‌تر}} \le y \le \underbrace{۱۲}_{\text{عدد بزرگ‌تر}}$$

**تست** **اگر دمای تهران در طی تابستان ۱۵ درجهٔ سانتی‌گراد افزایش یابد، میزان افزایش برحسب فارنهایت چند درجه بوده است؟**
$\left(F=\frac{۹}{۵}C+۳۲\right)$

۱) ۱۵ ۲) ۲۷ ۳) ۳۲ ۴) ۲۲

**پاسخ** **گزینهٔ ۲** روش اول: فرض می‌کنیم دمای اولیه $C_۱=۰\ ^\circ C$ سانتی‌گراد بوده و پس از ۱۵ درجه افزایش به $C_۲=۱۵\ ^\circ C$ رسیده است. (توجه کنید دمای اولیه را هر درجه‌ای می‌توانید فرض کنید چون صرفاً تغییرات دما اهمیت دارد)؛ بنابراین:

$$F_۱=\frac{۹}{۵}C_۱+۳۲ \xrightarrow{C_۱=۰} F_۱=\frac{۹}{۵}(۰)+۳۲=۳۲$$

$$F_۲=\frac{۹}{۵}C_۲+۳۲ \xrightarrow{C_۲=۱۵} F_۲=\frac{۹}{۵}(۱۵)+۳۲=۵۹$$

میزان تغییرات دما برحسب فارنهایت برابر $F_۲-F_۱=۲۷$ است.

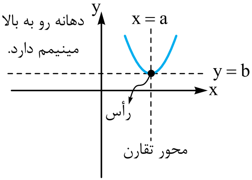
روش دوم: اگر دما به اندازهٔ C درجهٔ سانتی‌گراد تغییر کند، میزان تغییرات دما برحسب فارنهایت از رابطهٔ $F=\frac{۹}{۵}C$ به دست می‌آید. بنابراین:

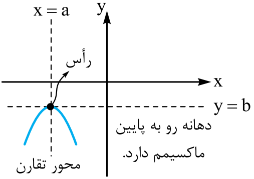
$$F=\frac{۹}{۵}\times ۱۵=۲۷$$

## ۱۶ تابع درجه‌دوم (سهمی)

| ۱. فرم‌های مختلف نمایش تابع درجه‌دوم (سهمی) | |
|---|---|
| فرم | $y = ax^2 + bx + c$ (فرم اول)<br>$y = a(x-k)^2 + h$ (فرم دوم) |
| نقاط خاص | عرض از مبدأ: $c$<br>رأس سهمی: $S$ |
| مختصات رأس | $S(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$<br>$S(k,h)$ |
| معادلهٔ محور تقارن | $x = \frac{-b}{2a}$<br>$x = k$ |
| وضعیت دهانه | دهانه رو به بالا: $a > 0$<br>دهانه رو به پایین: $a < 0$ |

شکل کلی تابع درجه‌دوم به صورت زیر است. نقاط ماکسیمم (بیشترین مقدار) و مینیمم (کم‌ترین مقدار) سهمی همان رأس سهمی هستند.




با توجه به شکل‌های بالا اگر $x = a$ محور تقارن سهمی و $y = b$ خط افقی باشد که از رأس سهمی می‌گذرد (بر سهمی مماس است)، مختصات رأس سهی به صورت $S(a,b)$ است.

**تست** خط $x=-۱$ محور تقارن سهمی $y=ax^۲+۳x+c$ است. اگر رأس سهمی روی خط $y=۱$ قرار داشته باشد، مقدار ac کدام است؟ (خارج ۱۴۰۱)

۱) ۵/۷۵ ۲) ۳/۷۵ ۳) ۳/۲۵- ۴) ۵/۲۵-

**پاسخ** گزینهٔ ۲ مختصات رأس سهمی به صورت $S(-۱,۱)$ است؛

بنابراین: $\text{طول رأس} = \frac{-b}{۲a} = -۱ \Rightarrow \frac{-۳}{۲a} = -۱ \Rightarrow ۲a = ۳ \Rightarrow a = \frac{۳}{۲}$

مختصات رأس سهمی در خود تابع صدق می‌کند:

$$y=ax^۲+۳x+c \xrightarrow[a=\frac{۳}{۲}]{x=-۱,y=۱} ۱=\frac{۳}{۲}(-۱)^۲+۳(-۱)+c$$

$$\Rightarrow ۱=\frac{۳}{۲}-۳+c \Rightarrow c=\frac{۵}{۲}$$

در نهایت داریم: $ac=\frac{۳}{۲}\times\frac{۵}{۲}=\frac{۱۵}{۴}=۳/۷۵$

## ۲. نمودار سهمی

| الف) رسم سهمی | ب) نوشتن ضابطهٔ سهمی از روی نمودار آن |
|---|---|
| به ترتیب مراحل را طی می‌کنیم:<br>۱ محاسبهٔ مختصات رأس سهمی<br>۲ استفاده از نقاط کمکی، یکی سمت راست رأس و دیگری سمت چپ با فاصلهٔ یکسان از رأس<br>۳ تعیین محل نقاط در دستگاه مختصات و رسم سهمی<br>اگر ضابطهٔ سهمی را برابر صفر قرار دهیم، یک معادلهٔ درجه‌دوم ساخته می‌شود که ریشه‌های آن (در صورت وجود) طول نقاط برخورد نمودار سهمی با محور xها است. | ابتدا فرم مورد استفاده را تشخیص می‌دهیم، اگر مختصات رأس سهمی و یک نقطهٔ دیگر داده شده باشد، فرم دوم در غیر این صورت، فرم اول را انتخاب می‌کنیم و به صورت زیر عمل می‌کنیم:<br>فرم اول: مختصات سه نقطه از سهمی را در ضابطهٔ آن جای‌گذاری کرده و با حل معادلات، مقادیر a، b و c را می‌یابیم.<br>فرم دوم: اگر مختصات رأس سهمی $S(k,h)$ باشد، با جای‌گذاری مقادیر k و h، معادلهٔ سهمی را می‌نویسیم و با جای‌گذاری نقطهٔ دیگر، مقدار a را محاسبه می‌کنیم. |

**تست** نمودار $y = x^2 + 6x + 5$ را حداقل چند واحد به سمت راست حرکت دهیم تا طول دو نقطهٔ مشترک آن با نمودار $y = |x|$، نامنفی باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵ (سراسری ۱۴۰۱)

**پاسخ** گزینهٔ ۴ برای رسم سهمی مختصات رأس آن را به دست می‌آوریم: (دهانهٔ سهمی رو به بالا است.)

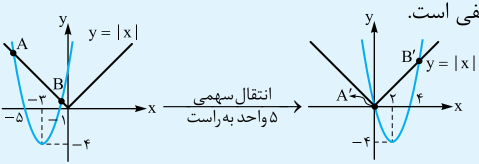
$$\text{طول رأس} = -\frac{b}{2a} = \frac{-6}{2\times 1} = -3$$

$$\text{عرض رأس} = y = (-3)^2 + 6(-3) + 5 = 9 - 18 + 5 = -4$$

نقاط برخورد نمودار سهمی با محور xها را به دست می‌آوریم:

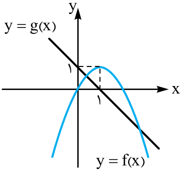
$$x^2 + 6x + 5 = 0 \xrightarrow{a+c=b} x = -1, -5$$

پس از رسم، دو تابع همدیگر را در نقاط A و B قطع می‌کنند که طول هر دو منفی است.




اگر نمودار سهمی را ۵ واحد به سمت راست انتقال دهیم، دو تابع همدیگر را در یک نقطه با طول صفر $(A')$ و نقطهٔ دیگری با طول مثبت $(B')$ قطع می‌کنند که هر دو، نامنفی هستند.

**تست** نمودار تابع با ضابطه‌های سهمی $y = f(x)$ و خط راست $y = g(x)$ در صفحهٔ مختصات، مطابق شکل مقابل داده شده است. مجموع جواب‌های معادلهٔ $f(x) = g^2(x)$، کدام است؟ (سراسری ۱۴۰۰)




۱) $-2$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۲

**پاسخ گزینهٔ ۴** ضابطهٔ سهمی $(f(x))$: با توجه به شکل، مختصات رأس سهمی $S(1,1)$ و نقطهٔ دیگر $A(0,0)$ است؛ بنابراین از فرم دوم استفاده می‌کنیم:

$$y=a(x-k)^2+h \xrightarrow[h=1]{k=1} y=a(x-1)^2+1$$

$$\xrightarrow{A(0,0)} 0=a(0-1)^2+1 \Rightarrow a=-1$$

$$\Rightarrow f(x)=-(x-1)^2+1=-x^2+2x$$

ضابطهٔ خط $(g(x))$: شیب خط گذرا از نقاط $(0,1)$ و $(1,0)$ را به دست آورده و ضابطهٔ آن را می‌نویسیم:

$$m=\frac{0-1}{1-0}=-1$$

$$g(x)=mx+n \xrightarrow{m=-1} g(x)=-x+n$$

$$\xrightarrow{(0,1)} 1=0+n \Rightarrow n=1 \Rightarrow g(x)=-x+1$$

معادلهٔ $f(x)=g^2(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$-x^2+2x=(-x+1)^2 \Rightarrow -x^2+2x=x^2-2x+1$$

$$\Rightarrow 2x^2-4x+1=0 \Rightarrow S=-\frac{b}{a}=\frac{-(-4)}{2}=2$$

## ۳. کاربرد تابع درجه‌دوم در بهینه‌سازی

| | |
|---|---|
| **روش اول:** اگر $x+y=k$ $(k\in\mathbb{R})$ باشد و بخواهیم $p=xy$ ماکسیمم شود باید از معادلهٔ اول، $x$ را برحسب $y$ ($y$ را برحسب $x$) به دست آوریم و در عبارت $p$ به جای $x$ ($y$) جایگزین کنیم تا عبارت $p$ به یک تابع درجه‌دوم برحسب $y$ ($x$) تبدیل شود. در نهایت در تابع درجه‌دوم نهایی مقدار طول رأس، $y$ ($x$) و عرض رأس ماکسیمم $p$ را نشان می‌دهد. | **روش دوم:** اگر $x+y=k$ $(k\in\mathbb{R})$ باشد، ماکسیمم $p=xy$ زمانی رخ می‌دهد که $x=y=\frac{k}{2}$ باشد. |

**تعریف بهینه‌سازی** طراحی فرایندی، برای به دست آوردن بیشترین سود، با صرف کم‌ترین هزینه را بهینه‌سازی می‌گوییم. در این بخش به دنبال ماکسیمم یا مینیمم کردن هدفی هستیم که به صورت تابع درجهٔ دوم تعریف شده است.

مسائل سود و زیان که در فصل اول (معادلهٔ درجه‌دوم) توضیح داده شد، از مسائل مربوط به بخش بهینه‌سازی است.

**تست** **محیط مستطیلی ۳۰ متر است. ماکسیمم مساحت این مستطیل چه‌قدر است؟** (سراسری ۱۴۰۱)

۱) ۲۲۵ ۲) ۲۰۹ ۳) ۵۶/۲۵ ۴) ۱۱/۲۵

**پاسخ** **گزینهٔ ۳** روش اول: طول و عرض مستطیل را به ترتیب x و y در نظر می‌گیریم. محیط مستطیل برابر است با:

$$\text{محیط} = ۲(x+y)=۳۰ \Rightarrow x+y=۱۵ \Rightarrow y=۱۵-x$$

در رابطهٔ مساحت به جای y، $۱۵-x$ قرار می‌دهیم:

$$\text{مساحت} = S = xy \qquad S=x(۱۵-x)=۱۵x-x^{۲}$$

طول رأس تابع S، طول مستطیل و عرض رأس آن، ماکسیمم مساحت را نشان می‌دهد.

$$\text{ماکسیمم مساحت} = \frac{-\Delta}{۴a} = -\frac{(۱۵)^{۲}-۴(-۱)(۰)}{۴\times(-۱)} = -\frac{۲۲۵}{-۴} = ۵۶/۲۵$$

روش دوم: $x+y=۱۵$ است؛ پس ماکسیمم $S=xy$ زمانی اتفاق می‌افتد که $x=y=\frac{۱۵}{۲}$ باشد، در نتیجه:

$$x=y=۷/۵ \Rightarrow S=xy=۷/۵\times۷/۵=۵۶/۲۵$$

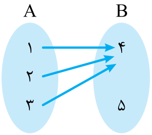
## ۱۷ تابع ثابت

تابعی است به فرم $f(x)=k \ (k\in\mathbb{R})$ که برد آن برابر $\mathbb{R}=\{k\}$ می‌باشد. دامنهٔ تابع ثابت می‌تواند به هر شکلی باشد.

### نمایش تابع ثابت در شکل‌های مختلف

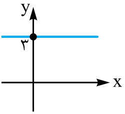
**الف** ← زوج مرتب ← زوج مرتب‌هایی که دارای مؤلفهٔ اول متغیر و مؤلفهٔ دوم ثابت (یکسان) هستند: $f=\{(۱,۲),(۳,۲),(۵,۲)\}$

**ب** ← نمودار پیکانی ← در مجموعهٔ A از همهٔ اعضا پیکان خارج می‌شود، اما فقط به یکی از اعضای مجموعهٔ B پیکان وارد می‌شود.

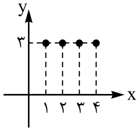



**پ** ← نمودار مختصاتی ← با توجه به دامنهٔ تابع، به صورت یک خط افقی یا مجموعه نقاطی با عرض یکسان است.

$$\begin{cases} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(x)=۳ \end{cases}$$




$$\begin{cases} f:\mathbb{N}\to\mathbb{R} \\ f(x)=۳ \end{cases}$$




**تست** رابطهٔ $f=\{(m+۳n,۲t^۲),(-۲,n^۲+۲n),(۱-۳m,۸)\}$ یک تابع ثابت با دامنهٔ دوعضوی است. اگر m و n عضوی از اعداد طبیعی باشند، مجموع دو عضو دامنه چه‌قدر است؟ (خارج ۱۴۰۱)

۱) ۲۳ ۲) ۲۱ ۳) ۵ ۴) ۳

**پاسخ** گزینهٔ ۳ در تابع ثابت مؤلفه‌های دوم زوج مرتب‌ها با یکدیگر برابر هستند، بنابراین:

$$۲t^۲=n^۲+۲n=۸ \Rightarrow \begin{cases} ۲t^۲=۸ \Rightarrow t^۲=۴ \\ n^۲+۲n=۸ \Rightarrow n^۲+۲n-۸=۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow (n+۴)(n-۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} n+۴=۰ \Rightarrow n=-۴ \ \times \\ n-۲=۰ \Rightarrow n=۲ \ \checkmark(\text{طبیعی } n) \end{cases}$$

مقدار n و $t^۲$ را در تابع جای‌گذاری کرده و دامنهٔ آن را می‌نویسیم:

$D=\{m+۶,-۲,۱-۳m\}$