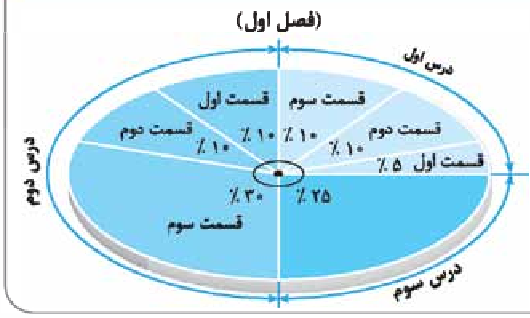
فهرست مطالب

فصل ۱ آمار و احتمال

مشاوره

فصل اول کتاب ریاضی و آمار (۳) با عنوان آمار و احتمال شامل سه درس است که در امتحانات نوبت اول شامل ۱۵ نمره و در امتحانات نهایی خرداد ۵ نمره و در شهریور و دی ۸ نمره می‌باشد. در این فصل هر کدام از درس‌های ۱ و ۲ را به سه قسمت تقسیم کرده‌ایم تا دسته‌بندی مطالب برای شما راحت‌تر شود اما درس سوم به دلیل این‌که شامل تعاریف است در یک قسمت ارائه شده است. اهمیت هر قسمت در امتحانات نهایی را در نمودار مقابل می‌بینید.



درس ۱ قسمت اول: اصل جمع و اصل ضرب

صفحه ۲ تا ۴ کتاب درسی

درس‌نامه ۱ ـ قسمت اول را در صفحه ۲۹ ببینید.

جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

۱- اگر عملی طی دو مرحلهٔ اول و دوم انجام شود، به طوری که در مرحلهٔ اول به m طریق و در مرحلهٔ دوم هر کدام از این m طریق به n روش انجام‌پذیر باشند، در کل آن عمل به .... طریق انجام‌پذیر است. (خرداد ۱۴۰۰)

۲- اگر عمل A به m طریق و عمل B به n طریق انجام‌پذیر باشند و این دو عمل را نتوان با هم انجام داد، در این صورت به .... طریق می‌توان عمل A یا عمل B را انجام داد. (مشابه خرداد ۱۴۰۰)

۳- از بین ۴ کتاب فارسی مختلف، ۳ کتاب ریاضی متفاوت و ۵ کتاب فلسفهٔ متفاوت به چند طریق می‌توان یک کتاب انتخاب کرد؟

۴- می‌خواهیم از بین ۶ دانش‌آموز کلاس دهم، ۷ دانش‌آموز کلاس یازدهم و ۵ دانش‌آموز کلاس دوازدهم یک دانش‌آموز انتخاب کنیم. به چند طریق می‌توانیم این دانش‌آموز را انتخاب کنیم؟

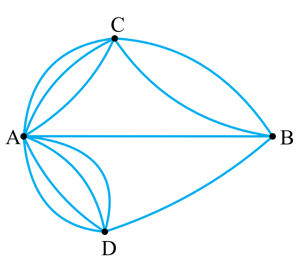
۵- می‌خواهیم از بین ۲ سیب، ۳ کیوی و ۴ نارنگی یک میوه انتخاب کنیم. به چند طریق می‌توانیم این میوه را انتخاب کنیم؟ (دی ۱۴۰۰)

۶- مهدی از بین ۳ کتاب ریاضی متمایز، ۲ کتاب عربی متمایز و ۴ کتاب ادبیات متمایز به چند طریق می‌تواند یک کتاب ریاضی، یک کتاب عربی و یک کتاب ادبیات انتخاب کند؟ (دی ۹۹ ـ شهریور ۱۴۰۰)

۷- می‌خواهیم از بین ۱۰ خودروی سواری، ۱۲ خودروی وانت و ۶ خودروی کامیون یک خودرو انتخاب کنیم. به چند طریق می‌توانیم این خودرو را انتخاب کنیم؟ (شهریور ۹۹)

۸- یک کارخانهٔ تولید تلفن همراه، گوشی جدید خود را در ۳ سایز متفاوت، ۵ رنگ مختلف و ۳ ظرفیت حافظهٔ مختلف تولید کرده است. خریدار برای خرید یک گوشی جدید از محصولات این کارخانه چند انتخاب دارد؟

۹- بین چهار شهر A، B، C و D مطابق شکل مقابل راه‌هایی وجود دارد. مشخص کنید به چند طریق می‌توان از شهر C و بدون عبور از شهر B به شهر D مسافرت کرد؟ (خرداد ۱۴۰۰)



۱۰- مدیرعامل یک شرکت برای تصمیم‌گیری دربارهٔ توسعهٔ شرکت، ۱۲ نفر از سهامداران را به دو گروه ۵نفرهٔ A و ۷نفرهٔ B دسته‌بندی کرد. اعضای گروه A باید دربارهٔ نتایج مساعد احتمالی و اعضای گروه B دربارهٔ نتایج نامساعد احتمالی تحقیق کنند.

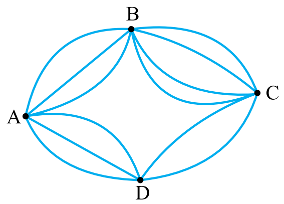
الف) مدیرعامل به چند طریق می‌تواند فقط با یک نفر از این ۱۲ نفر مشورت کند؟

ب) اگر مدیرعامل بخواهد از هر گروه یک نفر را جهت مشورت انتخاب کند، به چند طریق می‌توند این کار را انجام دهد؟

۱۱- در منوی یک رستوران ۴ نوع غذا، ۵ نوع نوشابه و ۳ نوع پیش‌غذا وجود دارد. به چند طریق می‌توان: (خرداد ۱۴۰۰ خارج)

الف) یک نوع غذا یا یک نوع نوشابه سفارش داد؟

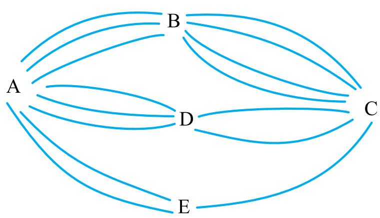
ب) یک نوع پیش‌غذا و یک نوع نوشابه سفارش داد؟



۱۲- مطابق شکل مقابل چهار شهر A، B، C و D با راه‌های دوطرفه با هم ارتباط دارند. به چند طریق می‌توان: (کار در کلاس کتاب درسی)

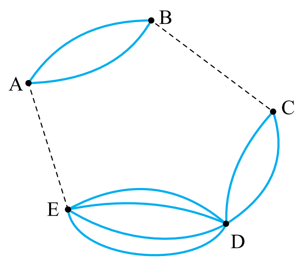
الف) از شهر A به شهر C و از طریق شهر B سفر کرد؟

ب) از شهر B به شهر D سفر کرد؟



۱۳- بین پنج شهر A، B، C، D و E مطابق شکل مقابل راه‌هایی وجود دارد که همه دوطرفه‌اند. به چند طریق می‌توان از شهر D بدون عبور از شهر E به شهر A مسافرت کرد؟ (خرداد ۱۴۰۰ خارج ـ تمرین کتاب درسی)

۱۴- مسئله‌ای طرح کنید که پاسخ آن به صورت $(۲^{۲}+۳^{۲}+۳\times ۴)$ باشد.



۱۵- تعداد راه‌ها از شهر B به C و از شهر A به E را طوری تعریف کنید که با توجه به شکل مقابل بتوان به ۲۰ طریق از شهر A به شهر D سفر کرد. (تمرین کتاب درسی)

درس ۱ قسمت دوم: فاکتوریل و جایگشت

صفحه ۵ تا ۷ کتاب درسی

درس‌نامه ۱ ـ قسمت دوم را در صفحه ۳۰ ببینید.

■ درستی یا نادرستی هر یک از عبارات زیر را مشخص کنید.

۱۶- برای اعداد صفر و یک، فاکتوریل را به صورت $۰! = ۱$ و $۱! = ۱$ تعریف می‌کنیم. (شهریور ۹۹ و ۱۴۰۰ ـ خرداد ۱۴۰۰)

۱۷- ساده‌شدهٔ عبارت $۲! \div ۶!$ برابر $۳!$ است. (خرداد ۹۹ خارج ـ خرداد ۱۴۰۱ ـ خرداد ۱۴۰۱ خارج ـ خرداد ۹۹)

۱۸- حاصل عبارت $۴! - ۷!$ برابر $۳!$ است. (خرداد ۱۴۰۱ خارج)

۱۹- حاصل $۴! - ۵!$ برابر ۹۶ است.

۲۰- حاصل $\frac{۷!}{۳!}$ برابر ۱۲۰ است.

۲۱- تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر nتاست. (دی ۹۹ خارج)

۲۲- تعداد جایگشت‌های حروف کلمهٔ «SABZ» برابر ۲۴تاست.

■ جاهای خالی را با پاسخ درست کامل کنید.

۲۳- مقدار $۰! \times (۱! + ۴!)$ برابر .... است. (خرداد ۱۴۰۱ خارج)

۲۴- تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر .... است. (خرداد ۱۴۰۱ خارج و ۹۹ ـ خرداد ۱۴۰۰ ـ شهریور ۹۸ ـ دی ۹۹)

۲۵- هر حالت از کنار هم قرارگرفتن n شیء متمایز را یک .... nتایی از آن شیء می‌نامیم. (دی ۹۹ خارج)

۲۶- هر حالت از کنار هم قرارگرفتن ۷ شیء متمایز را یک جایگشت .... از آن ۷ شیء می‌نامیم. (دی ۱۴۰۰)

۲۷- هر حالت از کنار هم قرارگرفتن ۵ شیء متمایز را یک .... از آن ۵ شیء می‌نامیم. (شهریور ۱۴۰۰ ـ مشابه دی ۱۴۰۰)

■ گزینهٔ صحیح را انتخاب کنید.

۲۸- حاصل $\frac{۶!}{۳!}$ کدام است؟ (خرداد ۱۴۰۰)

۱) ۲۰ ۲) ۳۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۳۵

۲۹- حاصل $\frac{۷! \times ۰!}{۵! \times ۲!}$ کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۴۲ ۳) ۳۶ ۴) ۲۱

۳۰- تعداد جایگشت‌های حروف a، b و c کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) ۶ ۴) ۱۲

حاصل هر یک را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

۳۱- $\frac{۸! \times ۳!}{۴! \times ۵! \times ۰!}$

۳۲- $(۲! + ۳!) \times ۴!$

۳۳- $\frac{۱۱!}{۴! \times ۷!}$

۳۴- ثابت کنید تعداد جایگشت‌های nتایی از n شیء متمایز برابر $n!$ است.

۳۵- با حروف کلمهٔ «ریاست» و بدون تکرار حروف (بامعنی و یا بی‌معنی)، چند کلمهٔ پنج‌حرفی می‌توان نوشت که با «ر» شروع و به «س» ختم شود؟ (خرداد ۱۴۰۰ خارج)

۳۶- با حروف کلمهٔ «شارمین» و بدون تکرار حروف چند کلمهٔ شش‌حرفی بامعنی و یا بی‌معنی می‌توان نوشت به طوری که:

الف) هیچ شرطی نداشته باشد.

ب) با حرف «ش» شروع و به حرف «ن» ختم شود.

پ) با حرف نقطه‌دار شروع شود.

۳۷- با ارقام ۵,۴,۳,۲,۱ چند عدد ۵رقمی و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت به طوری که:

الف) هیچ شرطی نداشته باشد.

ب) زوج باشد.

پ) مضرب ۵ باشد.

۳۸- پنج نفر به نام‌های A، B، C، D و E به یک همایش جهت سخنرانی دعوت شده‌اند.

الف) چند ترتیب سخنرانی برای آن‌ها وجود دارد؟

ب) به چند طریق می‌توانند سخنرانی کنند به طوری که A نفر آخر باشد؟

پ) به چند طریق می‌توانند سخنرانی کنند به طوری که B نفر اول نباشد؟

ت) به چند طریق می‌توانند سخنرانی کنند به طوری که تعداد نفرات قبل و بعد از D برابر باشند؟

درس ۱ قسمت سوم: تبدیل و ترکیب

صفحهٔ ۷ تا ۱۱ کتاب درسی

درس‌نامهٔ ۱ ـ قسمت سوم را در صفحهٔ ۳۱ ببینید.

جاهای خالی را با عبارات مناسب تکمیل کنید.

۳۹- در .... انتخاب r شیء از بین n شیء، جابه‌جایی اشیا اهمیت ندارد. (شهریور ۱۴۰۰)

۴۰- تعداد انتخاب r شیء از بین n شیء که جابه‌جایی یا ترتیب انتخاب مهم باشد را با نماد $P(n,r)$ نشان می‌دهیم و به صورت .... محاسبه می‌شود.

۴۱- حاصل عبارت $P(۸,۳)$ برابر .... است.

۴۲- حاصل عبارت $\binom{۹}{۶}$ برابر .... می‌باشد. (شهریور ۹۸ ـ دی ۹۹ خارج)

۴۳- با ارقام ۱,۲,۳,۴,۵ به تعداد .... عدد سه‌رقمی و بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت.

۴۴- به .... طریق می‌توانیم ۳ کتاب را از بین ۵ کتاب انتخاب و در یک قفسه بچینیم. (خرداد ۹۹ خارج)

۴۵- به .... طریق می‌توانیم ۳ نفر از بین ۱۰ کارمند یک اداره را برای اعزام به مأموریت انتخاب کنیم.

۴۶- مجموعهٔ $A = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ دارای .... زیرمجموعهٔ ۳عضوی است. (خرداد ۹۹ خارج)

گزینهٔ درست را انتخاب کنید.

۴۷- حاصل عبارت $P(۱۰,۲)$ کدام است؟ (خرداد ۱۴۰۱ خارج)

۱) ۵۵ ۲) ۴۵ ۳) ۱۲۰ ۴) ۹۰

۴۸- حاصل عبارت $P(2,2)$ کدام است؟ (خرداد ۱۴۰۰)

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) ۴

۴۹- با ۸ نقطهٔ متمایز واقع بر محیط دایره چند مثلث می‌توان تشکیل داد؟ (خرداد ۱۴۰۰)

۱) ۴۲ ۲) ۱۵ ۳) ۲۰ ۴) ۵۶

۵۰- با ۱۰ نقطهٔ متمایز واقع بر محیط دایره چند وتر می‌توان تشکیل داد؟

۱) ۳۶ ۲) ۱۲۰ ۳) ۴۵ ۴) ۷۲

۵۱- حاصل عبارت $\binom{7}{2}+\binom{7}{3}$ کدام است؟

۱) ۵۶ ۲) ۴۵ ۳) ۳۶ ۴) ۵۲

۵۲- تعداد زیرمجموعه‌های ۵عضوی مجموعهٔ $A=\{1,2,3,\dots,8\}$ کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۴۵ ۳) ۵۶ ۴) ۶۰

۵۳- با حروف کلمهٔ «مهرسان» و بدون تکرار حروف (بامعنی یا بی‌معنی): (دی ۱۴۰۰)

الف) چند کلمهٔ ۳حرفی می‌توان نوشت؟

ب) چند کلمهٔ ۳حرفی می‌توان نوشت که با «م» شروع شوند؟

۵۴- با حروف کلمهٔ «رهنما» و بدون تکرار حروف (بامعنی یا بدون معنی): (خرداد ۱۴۰۱ خارج ـ شهریور ۹۹)

الف) چند کلمهٔ سه‌حرفی می‌توان نوشت؟

ب) چند کلمهٔ چهارحرفی می‌توان نوشت که با «م» شروع و به «ن» ختم شوند؟

۵۵- به چند طریق می‌توان با ارقام ۱ تا ۷ عددی چهاررقمی ساخت؟ (تکرار مجاز نیست.) (شهریور ۹۸ و ۱۴۰۰ ـ خرداد ۹۹ ـ دی ۹۹)

۵۶- با ارقام ۱,۲,۴,۶,۸,۹ چند عدد ۵رقمی و بزرگ‌تر از ۸۰۰۰۰ با ارقام متمایز می‌توان ساخت؟

۵۷- با توجه به ارقام ۱,۳,۵,۷,۶,۲ و بدون تکرار ارقام به سؤالات زیر پاسخ دهید: (خرداد ۱۴۰۰ خارج)

الف) چند عدد ۳رقمی می‌توان نوشت؟

ب) چند عدد ۳رقمی فرد می‌توان نوشت؟

پ) چند عدد ۳رقمی که رقم یکان آن فقط رقم ۶ باشد می‌توان نوشت؟

۵۸- مجموعهٔ $A=\{1,2,4,6,8,9\}$ مفروض است. با ارقام موجود در این مجموعه چند عدد پنج‌رقمی زوج (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟ (دی ۹۷ خارج)

۵۹- ارقام ۱ تا ۹ مفروض‌اند: (بدون تکرار ارقام) (دی ۹۷ ـ خرداد ۱۴۰۱ خارج)

الف) چند عدد ۵رقمی می‌توان نوشت؟

ب) چند عدد ۴رقمی زوج می‌توان نوشت؟

۶۰- ارقام ۵,۴,۳,۲,۱,۰ مفروض‌اند. با این ارقام:

الف) چند عدد سه‌رقمی و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

ب) چند عدد سه‌رقمی فرد و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

پ) چند عدد سه‌رقمی زوج و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

۶۱- با ارقام ۵,۴,۳,۲,۱,۰ چند عدد ۴رقمی و مضرب ۵ بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

۶۲- با ارقام ۵,۴,۳,۲,۱,۰ چند عدد ۴رقمی زوج و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت به طوری که مضرب ۵ نباشند؟

۶۳- به چند طریق می‌توان ۳ کتاب را از بین ۱۰ کتاب انتخاب کرده و در یک ردیف از کتابخانه بچینیم؟ (دی ۹۹ خارج)

۶۴- یک دورهٔ بازی فوتبال، با شرکت ۸ تیم و به صورت رفت و برگشت انجام می‌شود. اگر همهٔ تیم‌ها با هم بازی داشته باشند، در پایان دوره چند بازی انجام شده است؟

۶۵- به چند طریق می‌توان ۴ کتاب را از بین ۹ کتاب انتخاب کرد؟ (خرداد۹۹ ـ شهریور ۹۸)

۶۶- به چند طریق می‌توان ۳ توپ هم‌رنگ را از بین ۵ توپ قرمز و ۴ توپ آبی انتخاب کرد؟ (خرداد ۹۹)

۶۷- به چند طریق می‌توانیم ۳ کتاب را از بین ۷ کتاب متمایز، انتخاب کنم و به دوستمان هدیه بدهیم؟ (خرداد ۹۹)

۶۸- می‌خواهیم از بین ۵ دانش‌آموز تجربی و ۶ دانش‌آموز انسانی یک تیم ۶نفره انتخاب کنیم. به چند طریق می‌توان این تیم را تشکیل داد به طوری که کاپیتان تیم فرد مشخصی از دانش‌آموزان انسانی باشد؟

۶۹- می‌خواهیم از بین ۵ اقتصاددان و ۶ حقوق‌دان یک گروه ۴نفره تشکیل دهیم. این کار به چند طریق امکان‌پذیر است به طوری که:

الف) تعداد حقوق‌دانان بیشتر باشد.

ب) تعداد حقوق‌دان‌ها و اقتصاددان‌ها برابر باشد.

پ) حداکثر ۲ حقوق‌دان در گروه باشد.

ت) حداقل ۳ حقوق‌دان در گروه باشد.

ث) همگی یک تخصص داشته باشند.

۷۰- مجموعهٔ ۸عضوی $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ چند زیرمجموعهٔ ۳عضوی دارد؟ (شهریور ۹۹ ـ خرداد ۹۸ ـ دی ۹۸)

۷۱- مجموعهٔ $A=\{3,5,7,9,10\}$ چند زیرمجموعهٔ سه‌عضوی و شامل رقم ۷ دارد؟ (خرداد ۱۴۰۰ خارج ـ دی ۹۷ خارج)

۷۲- مجموعهٔ $A=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$ مفروض است.

الف) چند زیرمجموعهٔ ۴عضوی و فاقد a و b دارد؟

ب) چند زیرمجموعهٔ ۳عضوی و شامل a و فاقد b دارد؟

پ) چند زیرمجموعهٔ حداقل ۷عضوی دارد؟

ت) چند زیرمجموعهٔ حداکثر سه‌عضوی دارد؟

فصل ۱ درس ۱

قسمت اول: اصل جمع و اصل ضرب

صفحه ۲ تا ۴ کتاب درسی

اصل جمع

اصل جمع: اگر عمل A به m طریق و عمل B به n طریق انجام‌پذیر باشند و این دو عمل را نتوان با هم انجام داد، در این صورت به $m+n$ طریق می‌توان عمل A یا عمل B را انجام داد.

نکته اصل جمع معادل «یا» در زبان فارسی است. *(هر جا برای انجام‌دادن چند تا کار بینشون «یا» میاریم، می‌شه اصل جمع)*

نکته اصل جمع به بیش از دو عمل نیز قابل تعمیم است.

مثال **مهدی از بین ۳ کتاب ریاضی متمایز، ۲ کتاب عربی متمایز و ۴ کتاب ادبیات متمایز، به چند طریق می‌تواند یک کتاب برای مطالعه انتخاب کند؟** (دی ۹۹ ـ شهریور ۱۴۰۰ ـ مشابه فعالیت کتاب درسی)

پاسخ: مهدی باید کتاب ریاضی یا کتاب عربی یا کتاب ادبیات انتخاب کند، پس به $3+2+4=9$ طریق می‌تواند کتاب مورد نظر را انتخاب کند.

حواست هست که اصل جمع رو برای بیش از دو عمل تعمیم دادیم.

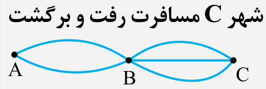
اصل ضرب

اصل ضرب: اگر عملی طی دو مرحلهٔ اول و دوم انجام پذیرد به طوری که در مرحلهٔ اول به m طریق و در مرحلهٔ دوم هر کدام از این m طریق به n روش انجام پذیر باشند، در کل آن عمل به $m\times n$ طریق انجام‌پذیر است.

نکته اصل ضرب معادل «و» در زبان فارسی است. *(وقتی برای انجام‌دادن چند تا کار از «و» استفاده کردیم، باید بریم سراغ اصل ضرب)*

نکته اصل ضرب به بیش از دو عمل نیز قابل تعمیم است.

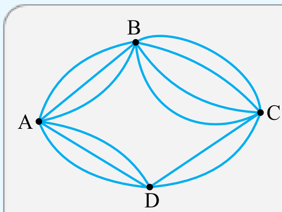
مثال **سه شهر A، B و C مطابق شکل زیر با راه‌های دوطرفه با هم ارتباط دارند. به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر C مسافرت رفت و برگشت انجام داد؟** (تمرین کتاب درسی)



پاسخ: از شهر A به شهر B دو راه و از شهر B به شهر C سه راه وجود دارد، پس به $2\times 3=6$ طریق می‌توان از A به C رفت. حال از هر کدام از ۶ طریق به شهر C برویم، برای برگشت ۶ انتخاب وجود دارد، پس در کل به $6\times 6=36$ طریق می‌توان مسافرت رفت و برگشت انجام داد.

نکته در بعضی مسائل مجبوریم هم از اصل ضرب و هم از اصل جمع استفاده کنیم.

مثال **مطابق شکل مقابل چهار شهر A، B، C و D با راه‌های دوطرفه با هم ارتباط دارند. به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر C سفر کرد؟** (کار در کلاس کتاب درسی ـ خرداد خارج ۱۴۰۰)



پاسخ: برای سفر از A به C می‌توان یکی از دو مسیر $A\to B\to C$ یا $A\to D\to C$ را انتخاب کرد *(تا اینجا می‌شه اصل جمع)* اما مسیر $A\to B\to C$ به $3\times 4=12$ طریق و مسیر $A\to D\to C$ به $3\times 2=6$ طریق امکان‌پذیر است *(تو هر کدوم از اینا از اصل ضرب استفاده کردیم)*.

پس تعداد راه‌های سفر از A به C برابر است با: $3\times 4+3\times 2=18$

پاسخ سؤالات

۱. $m\times n$

۲. $m+n$

۳. کتاب انتخابی، فارسی یا ریاضی یا فلسفه است *(به «یا» توجه کن)*، پس طبق اصل جمع داریم: تعداد انتخاب‌ها $=5+3+4=12$

۴. دانش‌آموز انتخابی کلاس دهم یا کلاس یازدهم یا کلاس دوازدهم است. پس طبق اصل جمع به $6+7+5=18$ طریق می‌توانیم یک دانش‌آموز را انتخاب کنیم.

۵. میوهٔ انتخابی، سیب یا کیوی یا نارنگی است. سیب را به ۲ طریق، کیوی را به ۳ طریق و نارنگی را به ۴ طریق می‌توانیم انتخاب کنیم. پس این کار به $2+3+4=9$ طریق انجام‌پذیر است.

۶. مهدی کتاب ریاضی را به ۳ طریق و کتاب عربی را به ۲ طریق و کتاب ادبیات را به ۴ طریق می‌تواند انتخاب کند، پس در کل طبق اصل ضرب این کار به $3\times 2\times 4=24$ طریق انجام‌پذیر است.

۷. خودروی انتخابی سواری یا وانت یا کامیون است، پس طبق اصل جمع تعداد حالاتی که می‌توان یک خودرو انتخاب کرد برابر است با: $10+12+6=28$

۸. کارخانه $3\times 5\times 3=45$ گوشی مختلف تولید می‌کند. بنابراین خریدار برای خرید یک گوشی جدید ۴۵ انتخاب دارد.

۹. باید از مسیر $C\to A\to D$ استفاده کنیم. از C به A سه راه و از A به D چهار راه وجود دارد، پس می‌توان به $3\times 4=12$ طریق از شهر C و بدون عبور از شهر B به شهر D مسافرت کرد.

۱۰. الف) مدیرعامل می‌تواند یک نفر از گروه A یا یک نفر از گروه B را انتخاب کند، پس طبق اصل جمع به $5+7=12$ طریق می‌تواند با یک نفر مشورت کند.

ب) مدیرعامل می‌تواند به ۵ طریق یک نفر از گروه A انتخاب کند و به ازای هر انتخاب از گروه A، به ۷ طریق می‌تواند یک نفر از گروه B انتخاب کند. بنابراین طبق اصل ضرب به $5\times 7=35$ طریق می‌تواند این کار را انجام دهد.

۱۱. الف) در منو ۴ نوع غذا و ۵ نوع نوشابه وجود دارد، پس طبق اصل جمع به $4+5=9$ طریق می‌توان یک نوع غذا **یا** یک نوع نوشابه سفارش داد.

ب) در منو ۳ نوع پیش‌غذا و ۵ نوع نوشابه وجود دارد، پس طبق اصل ضرب به $3\times 5=15$ طریق می‌توان یک نوع پیش‌غذا **و** یک نوع نوشابه سفارش داد.

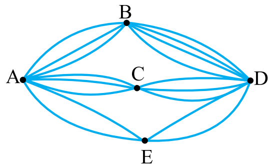
۱۲. الف) از شهر A به B، ۳ راه و از شهر B به C، ۴ راه وجود دارد، پس به $3\times 4=12$ طریق می‌توان از A به C از طریق شهر B سفر کرد.

ب) برای سفر از B به D می‌توان یکی از دو مسیر $B\to C\to D$ یا $B\to A\to D$ را انتخاب کرد. مسیر $B\to C\to D$ به $4\times 2=8$ طریق و مسیر $B\to A\to D$ به $3\times 3=9$ طریق امکان‌پذیر است.

پس تعداد راه‌های سفر از B به D برابر است با: $4\times 2+3\times 3=17$

۱۳. باید یکی از دو مسیر $A\to D$ یا $A\to B\to C\to D$ را طی کنیم. مسیر $A\to D$ به ۳ طریق و مسیر $A\to B\to C\to D$ به $۲\times۴\times۳=۲۴$ طریق امکان‌پذیر است. پس تعداد راه‌های سفر از شهر D به A بدون عبور از شهر E برابر است با: $۳+۲\times۴\times۳=۲۷$

۱۴. پنج شهر A، B، C، D و E مطابق شکل مقابل با راه‌های دوطرفه با هم ارتباط دارند. به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر D سفر کرد؟



۱۵. فرض می‌کنیم تعداد راه‌های مورد نیاز از شهر B به C برابر x و از شهر A به E برابر y باشد. برای سفر از شهر A به D باید مسیرهای $A\to E\to D$ یا $A\to B\to C\to D$ را طی کرد. مسیر $A\to E\to D$ به $y\times۴$ و مسیر $A\to B\to C\to D$ به $۲\times x\times۲$ طریق امکان‌پذیر است. پس تعداد کل راه‌هایی که می‌توان از A به D سفر کرد برابر $y\times۴+۲\times x\times۲$ است که باید مساوی ۲۰ باشد، پس:

$$y\times۴+۲\times x\times۲=۲۰ \Rightarrow ۴y+۴x=۲۰ \Rightarrow ۴(y+x)=۲۰$$

$$\Rightarrow y+x=\frac{۲۰}{۴}=۵$$

بنابراین حالت‌های زیر را داریم:

$$\begin{cases}x=۱\\y=۴\end{cases}\quad\begin{cases}x=۲\\y=۳\end{cases}\quad\begin{cases}x=۳\\y=۲\end{cases}\quad\begin{cases}x=۴\\y=۱\end{cases}$$

فصل ۱ درس ۱

قسمت دوم: فاکتوریل و جایگشت

صفحه ۵ تا ۷ کتاب درسی

فاکتوریل

نماد فاکتوریل: اگر n یک عدد طبیعی و بزرگ‌تر از ۱ باشد، آن‌گاه $n\times(n-۱)\times\cdots\times۳\times۲\times۱$ *(یعنی ضرب n در تمام اعداد طبیعی کوچک‌تر از خودش)* را با $n!$ *(بخونین n فاکتوریل)* نشان می‌دهیم:

$$n!=n\times(n-۱)\times\cdots\times۳\times۲\times۱$$

مثلاً $۵!=۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۱۲۰$ است.

قرارداد برای اعداد صفر و یک، $۰!=۱$ و $۱!=۱$ تعریف می‌کنیم.

نکته در حالت کلی فاکتوریل روی جمع، تفریق، ضرب و تقسیم پخش نمی‌شود.

$$(m \begin{smallmatrix}+\\-\\\times\\\div\end{smallmatrix} n)!\neq m! \begin{smallmatrix}+\\-\\\times\\\div\end{smallmatrix} n!$$

مثلاً $\frac{۸!}{۴!}$ برابر $۲!$ نیست یا $۴!+۳!$ برابر $۷!$ نمی‌باشد.

نکته $n!$ را می‌توان به صورت‌های زیر نوشت:

$$n!=n\times\overbrace{(n-۱)\times\cdots\times۳\times۲\times۱}^{(n-۱)!}=n\times(n-۱)!$$

$$n!=n\times(n-۱)\times\overbrace{(n-۲)\times\cdots\times۳\times۲\times۱}^{(n-۲)!}=n\times(n-۱)\times(n-۲)!$$

$\vdots$

$$n!=n\times(n-۱)\times(n-۲)\times\cdots\times\overbrace{۳\times۲\times۱}^{۳!}=n\times(n-۱)\times\cdots\times۳!$$

$\vdots$

کاربرد نمایش‌های بالا برای $n!$ در ساده‌کردن عبارات کسری است.

مثال حاصل $\frac{۳!\times۵!\times۰!}{۸!\times۱!}$ را به ساده‌ترین صورت بنویسید. (مثال کتاب درسی)

پاسخ:

$$\frac{۳!\times۵!\times۰!}{۸!\times۱!}=\frac{\cancel{۳}\times\cancel{۲}\times۱\times\cancel{۵!}\times۱}{۸\times۷\times\cancel{۶}\times\cancel{۵!}\times۱}=\frac{۱}{۵۶}$$

جایگشت

جایگشت: هر حالت از کنار هم قرارگرفتن n شیء متمایز را یک جایگشت nتایی از آن شیء می‌نامیم. مثلاً جایگشت‌های سه حرف a، b و c به صورت مقابل است: abc، acb، bac، bca، cab، cba

نکته تعداد کل جایگشت‌های nتایی از n شیء متمایز برابر است با $n!$. مثلاً همان‌طور که دیدید تعداد جایگشت‌های سه حرف a، b و c برابر $۳!=۶$ بود.

اثبات: اگر برای هر کدام از اشیا یک مکان در نظر بگیریم، برای مکان اول از چپ (یا راست) n انتخاب داریم و برای مکان بعدی $n-۱$ انتخاب داریم و ... و برای مکان آخر یک انتخاب وجود دارد. بنابر اصل ضرب کل حالت‌ها برابر $n\times(n-۱)\times\cdots\times۳\times۲\times۱=n!$ می‌باشد.

$$\underline{n}\times\underline{n-۱}\times\underline{n-۲}\times\cdots\times\underline{۲}\times\underline{۱}=n!$$

اثبات فوق فعالیت کتاب درسیه.

مثال با ارقام ۷،۶،۵،۴،۳ چند عدد ۵رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟ (فعالیت کتاب درسی)

پاسخ: به کمک اصل ضرب داریم:

$$\underline{۵}\times\underline{۴}\times\underline{۳}\times\underline{۲}\times\underline{۱}=۵!=۱۲۰$$

توجه کنید که چون ۵ رقم داریم و تعداد اعداد ۵رقمی را می‌خواهیم می‌توانیم مستقیماً بگوییم $۵!=۱۲۰$ عدد می‌توان نوشت.

نکته برای به دست آوردن تعداد جایگشت‌ها، اگر یک یا چند مکان خاص داشتیم *(مکان خاص اونیه که یه شرطی داره)* ابتدا باید تعداد حالات ممکن آن مکان‌ها را تعیین کنیم، سپس سراغ پرکردن بقیهٔ مکان‌ها برویم. *(در مواردی که مکان خاص وجود داره حتماً باید از اصل ضرب کمک بگیریم و $n!$ دیگه به کارمون نمیاد.)*

مثال **با حروف کلمهٔ «مساحت» و بدون تکرار حروف:** (تمرین کتاب درسی)

الف) چند کلمهٔ ۵حرفی بامعنی یا بی‌معنی می‌توان نوشت؟

ب) چند کلمهٔ ۵حرفی بامعنی یا بی‌معنی می‌توان نوشت که با «م» شروع و به «ح» ختم شوند؟

پاسخ: الف) به کمک اصل ضرب داریم:

$$\underline{۵}\times\underline{۴}\times\underline{۳}\times\underline{۲}\times\underline{۱}=۵!=۱۲۰$$

ب) مکان سمت راست باید با «م» پر شود، پس ۱ حالت و مکان سمت چپ هم باید با «ح» پر شود، پس آن هم ۱ حالت خواهد داشت:

$$\underset{ح}{\underline{۱}}\times\underline{۳}\times\underline{۲}\times\underline{۱}\times\underset{م}{\underline{۱}}=۶$$

(توجه کن که تو قسمت (الف) مستقیماً می‌تونستی بگی $۵!=۱۲۰$ اما تو قسمت (ب) حتماً باید از اصل ضرب بری.)

پاسخ سؤالات

۱۶. درست

۱۷. نادرست

۱۸. نادرست

۱۹. درست. $۵!-۴!=۵\times۴\times۳\times۲\times۱-۴\times۳\times۲\times۱=۱۲۰-۲۴=۹۶$

۲۰. نادرست $\frac{۷!}{۳!}=\frac{۷\times۶\times۵\times۴\times\cancel{۳!}}{\cancel{۳!}}=۸۴۰$

۲۱. نادرست. تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر n! است.

۲۲. درست. $\underline{۴}\times\underline{۳}\times\underline{۲}\times\underline{۱}=۴!=۲۴$

۲۳. ۲۵ $(۴!+۱!)\times۰!=(۴\times۳\times۲\times۱+۱)\times۱=۲۵$

۲۴. n!

۲۵. جایگشت

۲۶. ۷تایی

۲۷. جایگشت ۵تایی

۲۸. گزینهٔ «۳» $\frac{۶!}{۳!}=\frac{۶\times۵\times۴\times۳!}{۳!}=۱۲۰$

۲۹. گزینهٔ «۴» $\frac{۷!\times۰!}{۵!\times۲!}=\frac{۷\times\cancel{۶}^{۳}\times\cancel{۵!}\times۱}{\cancel{۵!}\times\cancel{۲}\times۱}=۲۱$

۳۰. گزینهٔ «۳» $\underline{۳}\times\underline{۲}\times\underline{۱}=۳!=۶$

۳۱. $\frac{۸!\times۳!}{۴!\times۵!\times۰!}=\frac{\cancel{۸}^{۲}\times۷\times۶\times\cancel{۵!}\times\cancel{۳!}}{\cancel{۴}\times\cancel{۳!}\times\cancel{۵!}\times۱}=۲\times۷\times۶=۸۴$

۳۲. $(۲!+۳!)\times۴!=(۲\times۱+۳\times۲\times۱)\times(۴\times۳\times۲\times۱)$
$=(۲+۶)\times۲۴=۸\times۲۴=۱۹۲$

۳۳. $\frac{۱۱!}{۴!\times۷!}=\frac{۱۱\times۱۰\times\cancel{۹}^{۳}\times\cancel{۸}\times\cancel{۷!}}{\cancel{۴}\times\cancel{۳}\times\cancel{۲}\times۱\times\cancel{۷!}}=۱۱\times۱۰\times۳=۳۳۰$

۳۴. اثبات در متن درس آمده است.

۳۵. دو مکان خاص وجود دارد، به کمک اصل ضرب داریم:

$\underset{\text{س}}{\underline{۱}}\times\underline{۳}\times\underline{۲}\times\underline{۱}\times\underset{\text{ر}}{\underline{۱}}=۶$

۳۶. الف) کلمهٔ «شارمین» شش حرف دارد و چون کلمهٔ شش‌حرفی می‌خواهیم تعداد آن‌ها *(هدف تعداد جایگشت‌های ۶تایی از ۶ حرف می‌شه)* برابر است با:

$۶!=۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۷۲۰$

ب) دو مکان خاص داریم، پس: $\underset{\text{ن}}{\underline{۱}}\times\underline{۴}\times\underline{۳}\times\underline{۲}\times\underline{۱}\times\underset{\text{ش}}{\underline{۱}}=۲۴$

پ) یک مکان خاص داریم: $\underline{۱}\times\underline{۲}\times\underline{۳}\times\underline{۴}\times\underline{۵}\times\underset{\{\text{ش، ی، ن}\}}{\underline{۳}}=۳۶۰$

۳۷. الف) ۵ رقم داریم و تعداد اعداد ۵رقمی را می‌خواهیم، پس تعداد آن‌ها برابر است با: $۵!=۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۱۲۰$

ب) یک مکان خاص داریم، چون اعداد زوج را می‌خواهیم باید رقم یکان ۲ یا ۴ باشد، پس: $\underline{۱}\times\underline{۲}\times\underline{۳}\times\underline{۴}\times\underset{\{۲,۴\}}{\underline{۲}}=۴۸$

پ) یک مکان خاص داریم، چون اعداد مضرب ۵ را می‌خواهیم و رقم یکان باید ۵ باشد. پس: $\underline{۱}\times\underline{۲}\times\underline{۳}\times\underline{۴}\times\underset{\{۵\}}{\underline{۱}}=۲۴$

۳۸. الف) جایگشت‌های ۵تایی از ۵ نفر را می‌خواهیم، پس:
$۵!=۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۱۲۰$

ب) یک مکان خاص داریم: $\underset{\text{نفر اول}}{\underset{\downarrow}{\underline{۴}}}\times\underset{\text{نفر دوم}}{\underset{\downarrow}{\underline{۳}}}\times\underset{\dots}{\underset{\downarrow}{\underline{۲}}}\times\underline{۱}\times\underset{\{A\}}{\underset{\downarrow}{\underline{۱}}}=۲۴$

پ) B نباید در مکان اول باشد، پس: $\underset{\{A,C,D,E\}}{\underset{\downarrow}{\underline{۴}}}\times\underline{۴}\times\underline{۳}\times\underline{۲}\times\underline{۱}=۹۶$

ت) واضح است که D باید نفر وسط باشد، پس:

$\underline{۴}\times\underline{۳}\times\underset{\{D\}}{\underset{\downarrow}{\underline{۱}}}\times\underline{۲}\times\underline{۱}=۲۴$

فصل ۱ درس ۱

قسمت سوم: تبدیل و ترکیب

صفحه ۷ تا ۱۱ کتاب درسی

در این قسمت می‌خواهیم r شیء از n شیء، انتخاب کنیم. اگر بعد از انتخاب r شیء از بین n شیء، جابه‌جایی اشیای انتخاب‌شده اهمیت داشته باشد، تبدیل r شیء از n شیء است و اگر جابه‌جایی اشیای انتخاب‌شده اهمیت نداشته باشد، ترکیب r شئ از n شیء است. *(یه بار دیگه بخون، فرق تبدیل و ترکیب رو کامل بفهمی)*

تبدیل r شیء از n شیء

تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n شیء که جابه‌جایی یا ترتیب انتخاب مهم باشد را با نماد $P(n,r)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال با حروف کلمهٔ «شهسواری» چند کلمهٔ ۴حرفی بامعنی و بی‌معنی و بدون تکرار حروف می‌توان نوشت؟

پاسخ: باید ۴ حرف از ۷ حرف کلمهٔ «شهسواری» انتخاب کنیم و چون جابه‌جایی آن‌ها پس از انتخاب کلمهٔ جدیدی می‌سازد و اهمیت دارد، داریم:

$$P(۷,۴)=\frac{۷!}{(۷-۴)!}=\frac{۷!}{۳!}=\frac{۷\times۶\times۵\times۴\times\cancel{۳!}}{\cancel{۳!}}=۸۴۰$$

نکته تبدیل r شیء از n شیء را می‌توانیم به کمک اصل ضرب هم به دست آوریم. مثلاً برای حل مثال بالا، ۴ مکان در نظر می‌گیریم و داریم:

$\underline{۷}\times\underline{۶}\times\underline{۵}\times\underline{۴}=۸۴۰$

مثال با ارقام ۷،۶،۵،۴،۲،۱ چند عدد سه‌رقمی و بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت؟

پاسخ: **روش اول:** باید ۳ رقم از ۶ رقم داده‌شده انتخاب کنیم که چون جابه‌جایی آن‌ها پس از انتخاب عدد جدیدی می‌سازد، پس:

$$P(۶,۳)=\frac{۶!}{(۶-۳)!}=\frac{۶!}{۳!}=\frac{۶\times۵\times۴\times\cancel{۳!}}{\cancel{۳!}}=۱۲۰$$

روش دوم: به کمک اصل ضرب داریم: $\underline{۶}\times\underline{۵}\times\underline{۴}=۱۲۰$

نکته اگر در جایگشت r شیء از n شیء، مکان یا مکان‌های خاص داشتیم، حتماً باید از اصل ضرب استفاده کنیم. *(به مثال زیر توجه کن، همهٔ حالت‌ها رو بررسی کردم.)*

مثال **ارقام ۶,۵,۴,۳,۲,۱,۰ مفروض‌اند. با این ارقام:**

الف) چند عدد چهاررقمی و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

ب) چند عدد چهاررقمی فرد و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

پ) چند عدد چهاررقمی زوج و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

پاسخ الف) می‌دانیم رقم سمت چپ عدد نمی‌تواند صفر باشد، پس مکان سمت چپ مکان خاص است و سراغ اصل ضرب می‌رویم:

$$\underset{\text{1,2,3,4,5,6}}{\underline{6}} \times \underline{6} \times \underline{5} \times \underline{4} = 720$$

۱یا۲یا۳یا ۴یا۵یا۶ — یکی مصرف‌شد اما صفربرگشت.

ب) دو مکان خاص داریم، یکی مکان سمت چپ که نباید صفر در آن قرار بگیرد و دیگری سمت راست که باید ارقام فرد یعنی ۱ یا ۳ یا ۵ در آن قرار بگیرند، پس:

$$\underset{\text{1,2,3,4,5,6}}{\underline{\quad}} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underset{\text{1,3,5}}{\underline{\quad}}$$

(۱یا۲یا۳یا۴یا۵یا۶ — ۱یا۳یا۵)

چون امکانات مکان سمت راست (یکان) کم‌تر است، ابتدا باید تعداد حالات آن را معلوم کنیم:

$$\underline{5} \times \underline{5} \times \underline{4} \times \underline{3} = 300$$

از امکانات این مکان یکی کم‌می‌شود، چون در مکان سمت‌راست مصرف شده — صفربرگشت — از بین ۱یا۳یا۵ یکی مصرف شده

پ) دو مکان خاص داریم یکی مکان سمت چپ که نباید صفر در آن قرار گیرد و دیگری مکان سمت راست که باید ارقام ۰ یا ۲ یا ۴ یا ۶ در آن باشد، پس:

$$\underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad}$$

(۱یا۲یا۳یا۴یا۵یا۶ — ۰یا۲یا۴یا۶)

چون امکانات مکان سمت راست (یکان) کم‌تر است، ابتدا باید تعداد حالات آن را معلوم کنیم: $\underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{4}$

اما نمی‌توانیم تعداد حالات مکان سمت چپ را معلوم کنیم، چون نمی‌دانیم در مکان یکان صفر مصرف‌شده یا ارقام غیر صفر، چون اگر صفر مصرف شود، از تمام ارقام ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵ یا ۶ می‌توانیم در مکان سمت چپ استفاده کنیم، پس مجبوریم صفر را جدا کنیم:

۱) یکان صفر باشد:

$$\underset{\text{1,2,3,4,5,6}}{\underline{6}} \times \underline{5} \times \underline{4} \times \underset{0}{\underline{1}} = 120$$

۲) یکان صفر نباشد:

$$\underset{\text{1,2,3,4,5,6}}{\underline{5}} \times \underset{\text{صفر برگشت}}{\underline{5}} \times \underline{4} \times \underset{\text{2,4,6}}{\underline{3}} = 300$$

حال طبق اصل جمع داریم:

تعداد اعداد چهاررقمی زوج $= 120 + 300 = 420$

توجه کن که ۷۲۰ عدد چهاررقمی داشتیم که ۳۰۰تای آن‌ها فرد و ۴۲۰تای آن‌ها زوج است.

ترکیب r شیء از n شیء

تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n شیء که جابه‌جایی اشیای انتخاب‌شده پس از انتخاب، حالت جدید تولید نکرده و ترتیب انتخاب اهمیت نداشته باشد را با نماد $C^n_r=\binom{n}{r}$ نشان می‌دهیم و بنابر دستور زیر محاسبه می‌کنیم:

$$C^n_r=\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

از تعریف‌ها به صورت جاخالی یا درست و نادرست سؤال میاد. با دقت بخون.

نکته C^n_r یا $\binom{n}{r}$ همان $P(n,r)$ است که تقسیم بر $r!$ شده است.

$$C^n_r=\binom{n}{r}=\frac{P(n,r)}{r!}$$

مثال **به چند طریق می‌توان از بین ۹ نفر یک تیم والیبال ۶نفره تشکیل داد؟**

پاسخ در ساختن تیم با جابه‌جایی افراد انتخاب‌شده تیم جدیدی تولید نمی‌شود. بنابراین از ترکیب استفاده می‌کنیم:

تعداد تیم‌های ۶نفره $=\binom{9}{6}=\frac{9!}{6!\times 3!}=\frac{9\times 8\times 7\times \cancel{6!}}{\cancel{6!}\times 3\times 2\times 1}=84$

نکته تعداد زیرمجموعه‌های rعضوی یک مجموعهٔ nعضوی برابر $\binom{n}{r}$ است.

(می‌دونیم در مجموعه‌ها جابه‌جایی اعضا اهمیت نداره، پس هر rعضوی که از یک مجموعهٔ nعضوی انتخاب کنیم یک زیرمجموعهٔ rعضوی می‌سازه.)

مثال **مجموعهٔ $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ مفروض است.**

الف) چند زیرمجموعهٔ سه‌عضوی دارد؟

ب) چند زیرمجموعهٔ چهارعضوی دارد که شامل عضو ۵ باشند؟

پاسخ الف) کافی است ۳ عضو از ۸ عضو انتخاب کنیم:

$$\binom{8}{3}=\frac{8!}{3!\times 5!}=\frac{8\times 7\times 6\times \cancel{5!}}{3\times 2\times 1\times \cancel{5!}}=56$$

ب) عضو ۵ باید در زیرمجموعه باشد $\{5,\_,\_,\_\}$، بنابراین باید ۳ عضو از ۷ عضو باقی‌مانده انتخاب کنیم.

$$\binom{7}{3}=\frac{7!}{3!\times 4!}=\frac{7\times 6\times 5\times \cancel{4!}}{3\times 2\times 1\times \cancel{4!}}=35$$

پاسخ سؤالات

۳۹. ترکیب

۴۰. $P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$

۴۱. ۳۳۶ ـ زیرا: $P(8,3)=\frac{8!}{(8-3)!}=\frac{8!}{5!}=\frac{8\times 7\times 6\times \cancel{5!}}{\cancel{5!}}=336$

۴۲. ۸۴ ـ زیرا:

با توجه به فرمول ترکیب که به صورت $\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!\times(n-r)!}$ است، داریم:

$$\binom{9}{6}=\frac{9!}{6!\times(9-6)!}=\frac{9!}{6!\times 3!}=\frac{9\times 8\times 7\times \cancel{6!}}{\cancel{6!}\times 3\times 2\times 1}=84$$

۴۳. ۶۰ ـ زیرا: **روش اول**: کافی است ۳ رقم از ۵ رقم داده‌شده انتخاب کنیم و چون جابه‌جایی ارقام، عدد جدید می‌سازد به کمک تبدیل داریم:

$$P(5,3)=\frac{5!}{(5-3)!}=\frac{5!}{2!}=\frac{5\times 4\times 3\times \cancel{2!}}{\cancel{2!}}=60$$

روش دوم: می‌توانیم از اصل ضرب استفاده کنیم: $\underline{5}\times\underline{4}\times\underline{3}=60$

۴۴. ۶۰ ـ زیرا: چون بعد از انتخاب ۳ کتاب، جابه‌جایی آن‌ها در قفسه مهم است، پس:

$$P(۵,۳)=\frac{۵!}{(۵-۳)!}=\frac{۵!}{۲!}=\frac{۵\times۴\times۳\times\cancel{۲!}}{\cancel{۲!}}=۶۰$$

۴۵. ۱۲۰ ـ زیرا: چون بعد از انتخاب ۳ نفر، جایگشت‌های آن‌ها مهم نیست، پس:

$$\binom{۱۰}{۳}=\frac{۱۰!}{۳!(۱۰-۳)!}=\frac{۱۰!}{۳!۷!}=\frac{۱۰\times۹\times۸\times\cancel{۷!}}{۳\times۲\times۱\times\cancel{۷!}}=۱۲۰$$

۴۶. ۲۰ ـ زیرا: می‌دانیم تعداد زیرمجموعه‌های ۳عضوی یک مجموعهٔ ۶عضوی برابر $\binom{۶}{۳}$ است، پس:

$$\binom{۶}{۳}=\frac{۶!}{۳!\times۳!}=\frac{۶\times۵\times۴\times\cancel{۳!}}{۳\times۲\times۱\times\cancel{۳!}}=۲۰$$

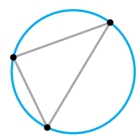
۴۷. گزینهٔ «۴»، می‌دانیم $P(n,r)$ برابر $\frac{n!}{(n-r)!}$ می‌باشد، پس:

$$P(۱۰,۲)=\frac{۱۰!}{(۱۰-۲)!}=\frac{۱۰!}{۸!}=\frac{۱۰\times۹\times\cancel{۸!}}{\cancel{۸!}}=۹۰$$

۴۸. گزینهٔ «۳»

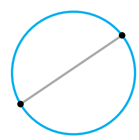
$$P(۲,۲)=\frac{۲!}{(۲-۲)!}=\frac{۲!}{۰!}=\frac{۲\times۱}{۱}=۲$$

۴۹. گزینهٔ «۴»، باید ۳ نقطه از ۸ نقطه را انتخاب کنید، زیرا هر مثلث سه رأس دارد:



$$\binom{۸}{۳}=\frac{۸!}{۳!(۸-۳)!}=\frac{۸!}{۳!۵!}=\frac{۸\times۷\times۶\times\cancel{۵!}}{۳\times۲\times۱\times\cancel{۵!}}=۵۶$$

۵۰. گزینهٔ «۳»، باید ۲ نقطه از ۱۰ نقطه را انتخاب کرد، زیرا وتر پاره‌خطی است که دو سر آن روی دایره است:



$$\binom{۱۰}{۲}=\frac{۱۰!}{۲!\times(۱۰-۲)!}=\frac{۱۰!}{۲!\times۸!}=\frac{۱۰\times۹\times۸!}{۲\times۱\times۸!}=۴۵$$

۵۱. گزینهٔ «۱»، می‌دانیم $\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!\times(n-r)!}$ است، پس:

$$\binom{۷}{۳}+\binom{۷}{۲}=\frac{۷!}{۳!\times(۷-۳)!}+\frac{۷!}{۲!\times(۷-۲)!}=\frac{۷!}{۳!\times۴!}+\frac{۷!}{۲!\times۵!}$$

$$=\frac{۷\times۶\times۵\times\cancel{۴!}}{۳\times۲\times۱\times\cancel{۴!}}+\frac{۷\times۶\times\cancel{۵!}}{۲\times۱\times\cancel{۵!}}=۳۵+۲۱=۵۶$$

۵۲. گزینهٔ «۳»، می‌دانیم تعداد زیرمجموعه‌های ۵عضوی یک مجموعهٔ ۸عضوی برابر $\binom{۸}{۵}$ است، پس:

$$\binom{۸}{۵}=\frac{۸!}{۵!\times(۸-۵)!}=\frac{۸!}{۵!\times۳!}=\frac{۸\times۷\times۶\times\cancel{۵!}}{\cancel{۵!}\times۳\times۲\times۱}=۵۶$$

۵۳. الف) **روش اول**: باید ۳ حرف از ۶ حرف کلمهٔ «مهرسان» را انتخاب کنیم، واضح است که جابه‌جایی حروف مهم است؛ پس:

$$P(۶,۳)=\frac{۶!}{(۶-۳)!}=\frac{۶!}{۳!}=\frac{۶\times۵\times۴\times۳!}{۳!}=۱۲۰$$

روش دوم: به کمک اصل ضرب داریم:

$$\underline{۶}\times\underline{۵}\times\underline{۴}=۱۲۰$$

ب) یک مکان خاص داریم، پس سراغ اصل ضرب می‌رویم. ابتدا هم باید وضعیت مکان خاص را معلوم کنیم:

$$\underline{۴}\times\underline{۵}\times\underset{\{م\}}{\underline{۱}}=۲۰$$

۵۴. الف) **روش اول**: باید ۳ حرف از ۵ حرف کلمهٔ «رهنما» انتخاب کنیم و چون جابه‌جایی آن‌ها مهم است داریم:

$$P(۵,۳)=\frac{۵!}{(۵-۳)!}=\frac{۵!}{۲!}=\frac{۵\times۴\times۳\times\cancel{۲!}}{\cancel{۲!}}=۶۰$$

روش دوم: به کمک اصل ضرب داریم:

$$\underline{۵}\times\underline{۴}\times\underline{۳}=۶۰$$

ب) دو مکان خاص داریم، پس ابتدا وضعیت آن‌ها را معلوم می‌کنیم و سپس سراغ بقیهٔ مکان‌ها می‌رویم:

$$\underset{\{ن\}}{\underline{۱}}\times\underline{۲}\times\underline{۳}\times\underset{\{م\}}{\underline{۱}}=۶$$

۵۵. **روش اول**: باید ۴ رقم از ۷ رقم داده‌شده انتخاب کنیم و چون می‌خواهیم عدد بسازیم، جابه‌جایی آن‌ها مهم است:

$$P(۷,۴)=\frac{۷!}{(۷-۴)!}=\frac{۷!}{۳!}=\frac{۷\times۶\times۵\times۴\times\cancel{۳!}}{\cancel{۳!}}=۸۴۰$$

روش دوم: به کمک اصل ضرب داریم:

$$\underline{۷}\times\underline{۶}\times\underline{۵}\times\underline{۴}=۸۴۰$$

۵۶. یک مکان خاص داریم. مکان سمت چپ فقط می‌تواند ۸ و ۹ باشد، پس:

$$\underset{\{۸,۹\}}{\underline{۲}}\times\underline{۵}\times\underline{۴}\times\underline{۳}\times\underline{۲}=۲۴۰$$

۵۷. الف) **روش اول**: سه رقم از ۶ رقم انتخاب می‌کنیم و چون می‌خواهیم عدد بسازیم جابه‌جایی آن‌ها مهم است:

$$P(۶,۳)=\frac{۶!}{(۶-۳)!}=\frac{۶!}{۳!}=\frac{۶\times۵\times۴\times\cancel{۳!}}{\cancel{۳!}}=۱۲۰$$

روش دوم: به کمک اصل ضرب داریم:

$$\underline{۶}\times\underline{۵}\times\underline{۴}=۱۲۰$$

ب) یک مکان خاص داریم، مکان سمت راست باید فرد باشد، پس:

$$\underline{۴}\times\underline{۵}\times\underset{\{۱,۳,۵,۷\}}{\underline{۴}}=۸۰$$

پ) یک مکان خاص داریم، آن هم مکان سمت راست که مربوط به یکان عدد است می‌باشد:

$$\underline{۴}\times\underline{۵}\times\underset{\{۶\}}{\underline{۱}}=۲۰$$

۵۸. یک مکان خاص داریم، رقم یکان باید زوج باشد، پس:

$$\underline{۲}\times\underline{۳}\times\underline{۴}\times\underline{۵}\times\underset{\{۲,۴,۶,۸\}}{\underline{۴}}=۴۸۰$$

۵۹. الف) **روش اول**: ۵ رقم از ۹ رقم داده‌شده انتخاب می‌کنیم و چون جابه‌جایی آن‌ها مهم است، پس:

$$P(۹,۵)=\frac{۹!}{(۹-۵)!}=\frac{۹!}{۴!}=\frac{۹\times۸\times۷\times۶\times۵\times\cancel{۴!}}{\cancel{۴!}}=۱۵۱۲۰$$

روش دوم: به کمک اصل ضرب داریم:

$$\underline{۹}\times\underline{۸}\times\underline{۷}\times\underline{۶}\times\underline{۵}=۱۵۱۲۰$$

ب) یک مکان خاص داریم؛ رقم یکان باید زوج باشد، پس:

$$\underline{۶}\times\underline{۷}\times\underline{۸}\times\underset{\{۲,۴,۶,۸\}}{\underline{۴}}=۱۳۴۴$$

۶۰. الف) یک مکان خاص داریم، رقم سمت چپ نباید صفر باشد، پس:

$$\underset{\{۱,۲,۳,۴,۵\}}{\underset{\downarrow}{\underline{۵}}}\times\underline{۵}\times\underline{۴}=۱۰۰$$

ب) دو مکان خاص داریم، از آن مکانی که امکاناتش کم‌تر است شروع می‌کنیم:

$$\underset{\{۱,۲,۳,۴,۵\}}{\underline{۴}}\times\underset{\text{صفر برگشت}}{\underline{۴}}\times\underset{\{۱,۳,۵\}}{\underline{۳}}=۴۸$$

پ) دو مکان خاص داریم اما امکانات در مکان طوری است که باید مسئله را در دو حالت بررسی کنیم:

$$\underset{\{۱,۲,۳,۴,۵\}}{\underline{\quad}}\times\underline{\quad}\times\underset{\{۰,۲,۴\}}{\underline{\quad}}\Rightarrow\begin{cases}\underline{۵}\times\underline{۴}\times\underset{\{۰\}}{\underline{۱}}=۲۰\\ \underline{۴}\times\underline{۴}\times\underset{\{۲,۴\}}{\underline{۲}}=۳۲\end{cases}\Rightarrow ۲۰+۳۲=۵۲$$

۶۱. رقم یکان عدد مضرب ۵ می‌تواند صفر یا ۵ باشد، پس:

$$\underset{\text{۱یا۲یا۳یا۴یا۵}}{\underline{\qquad}}\times\underline{\quad}\times\underline{\quad}\times\underset{\text{۰یا۵}}{\underline{\quad}}$$

چون امکانات مکان سمت راست کم‌تر است، ابتدا باید از آن شروع کنیم. اما چون بعد از آن نمی‌توانیم تعداد حالات مکان سمت چپ را تعیین کنیم باید صفر را در مکان سمت راست جدا کنیم:

$$\underset{\text{۱یا۲یا۳یا۴یا۵}}{5}\times 4\times 3\times \underset{0}{1}=60$$

$$\Rightarrow\ 60+48=108$$

$$\underset{\text{۱یا۲یا۳یا۴یا۵}}{4}\times 4\times 3\times \underset{5}{1}=48$$

۶۲. رقم یکان عدد زوج باید صفر یا ۲ یا ۴ باشد. از آن‌جایی که اگر رقم یکان صفر باشد، عدد، مضرب ۵ هم می‌شود، پس فقط در رقم یکان ۲ یا ۴ قرار می‌گیرد، بنابراین داریم:

$$\underset{\text{۱یا۲یا۳یا۴یا۵}}{4}\times 4\times 3\times \underset{\text{۲یا۴}}{2}=96$$

۶۳. بعد از انتخاب ۳ کتاب جابه‌جایی آن‌ها مهم است، پس:

$$P(10,3)=\frac{10!}{(10-3)!}=\frac{10!}{7!}=\frac{10\times 9\times 8\times \cancel{7!}}{\cancel{7!}}=720$$

۶۴. چون بازی‌ها به طور رفت و برگشت برگزار می‌شود، پس بعد از انتخاب ۲ تیم جابه‌جایی آن‌ها مهم است. مثلاً ab یعنی تیم a میزبان است و ba یعنی تیم b میزبان می‌باشد، پس:

$$P(8,2)=\frac{8!}{(8-2)!}=\frac{8!}{6!}=\frac{8\times 7\times \cancel{6!}}{\cancel{6!}}=56$$

۶۵. باید ۴ کتاب از ۹ کتاب انتخاب کنیم:

$$\binom{9}{4}=\frac{9!}{4!\times(9-4)!}=\frac{9!}{4!\times 5!}=\frac{9\times 8\times 7\times 6\times 5!}{4\times 3\times 2\times 1\times 5!}=126$$

۶۶. باید ۳ توپ قرمز یا ۳ توپ آبی انتخاب کنیم:

$$\binom{5}{3}+\binom{4}{3}=\frac{5!}{3!\times(5-3)!}+\frac{4!}{3!\times(4-3)!}=\frac{5!}{3!\times 2!}+\frac{4!}{3!\times 1!}$$

$$=\frac{5\times 4\times \cancel{3!}}{\cancel{3!}\times 2\times 1}+\frac{4\times \cancel{3!}}{\cancel{3!}\times 1}=10+4=14$$

۶۷. در هدیه‌دادن سه کتاب، جابه‌جایی مهم نیست، پس:

$$\binom{7}{3}=\frac{7!}{3!\times(7-3)!}=\frac{7!}{3!\times 4!}=\frac{7\times 6\times 5\times \cancel{4!}}{3\times 2\times 1\times \cancel{4!}}=35$$

۶۸. کاپیتان تیم، فرد مشخصی از دانش‌آموزان انسانی است. پس او انتخاب شده است. می‌ماند ۵ نفر دیگر که باید از بین ۱۰ دانش‌آموز باقی‌مانده انتخاب کنیم:

$$\binom{10}{5}=\frac{10!}{5!\times(10-5)!}=\frac{10!}{5!\times 5!}=\frac{10\times 9\times 8\times 7\times 6\times \cancel{5!}}{5\times 4\times 3\times 2\times \cancel{5!}}=252$$

۶۹. الف) باید ۳ حقوق‌دان و ۱ اقتصاددان یا ۴ حقوق‌دان در گروه باشند:

$$\binom{6}{3}\binom{5}{1}+\binom{6}{4}=\frac{6!}{3!\times(6-3)!}\times\frac{5!}{1!\times(5-1)!}+\frac{6!}{4!\times(6-4)!}$$

$$=\frac{6!}{3!\times 3!}\times\frac{5!}{1!\times 4!}+\frac{6!}{4!\times 2!}$$

$$=\frac{6\times 5\times 4\times \cancel{3!}}{3\times 2\times 1\times \cancel{3!}}\times\frac{5\times \cancel{4!}}{1\times \cancel{4!}}+\frac{6\times 5\times \cancel{4!}}{\cancel{4!}\times 2\times 1}=20\times 5+15=115$$

ب) باید ۲ حقوق‌دان و ۲ اقتصاددان در گروه باشند:

$$\binom{5}{2}\times\binom{6}{2}=\frac{5!}{2!\times(5-2)!}\times\frac{6!}{2!\times(6-2)!}=\frac{5!}{2!\times 3!}\times\frac{6!}{2!\times 4!}$$

$$=\frac{5\times 4\times \cancel{3!}}{2\times 1\times \cancel{3!}}\times\frac{6\times 5\times \cancel{4!}}{2\times 1\times \cancel{4!}}=10\times 15=150$$

پ) باید ۲ حقوق‌دان و ۲ اقتصاددان یا ۱ حقوق‌دان و ۳ اقتصاددان یا ۴ اقتصاددان در گروه باشند، پس:

$$\binom{6}{2}\times\binom{5}{2}+\binom{6}{1}\times\binom{5}{3}+\binom{5}{4}$$

$$=\frac{6!}{2!\times(6-2)!}\times\frac{5!}{2!\times(5-2)!}+\frac{6!}{1!\times(6-1)!}\times\frac{5!}{3!\times(5-3)!}$$

$$+\frac{5!}{4!\times(5-4)!}=\frac{6!}{2!\times 4!}\times\frac{5!}{2!\times 3!}+\frac{6!}{1!\times 5!}\times\frac{5!}{3!\times 2!}+\frac{5!}{4!\times 1!}$$

$$=\frac{6\times 5\times \cancel{4!}}{2\times 1\times \cancel{4!}}\times\frac{5\times 4\times \cancel{3!}}{2\times 1\times \cancel{3!}}+\frac{6\times \cancel{5!}}{1\times \cancel{5!}}\times\frac{5\times 4\times \cancel{3!}}{\cancel{3!}\times 2\times 1}+\frac{5\times \cancel{4!}}{\cancel{4!}\times 1}$$

$$=15\times 10+6\times 10+5=150+60+5=215$$

ت) باید ۳ حقوق‌دان و ۱ اقتصاددان یا ۴ حقوق‌دان در گروه باشند:

$$\binom{6}{3}\times\binom{5}{1}+\binom{6}{4}=\frac{6!}{3!\times(6-3)!}\times\frac{5!}{1!\times(5-1)!}+\frac{6!}{4!\times(6-4)!}$$

$$=\frac{6!}{3!\times 3!}\times\frac{5!}{1!\times 4!}+\frac{6!}{4!\times 2!}$$

$$=\frac{6\times 5\times 4\times \cancel{3!}}{3\times 2\times 1\times \cancel{3!}}\times\frac{5\times \cancel{4!}}{1\times \cancel{4!}}+\frac{6\times 5\times \cancel{4!}}{\cancel{4!}\times 2\times 1}$$

$$=20\times 5+15=100+15=115$$

ث) باید ۴ حقوق‌دان یا ۴ اقتصاددان در گروه باشند:

$$\binom{6}{4}+\binom{5}{4}=\frac{6!}{4!\times(6-4)!}+\frac{5!}{4!\times(5-4)!}=\frac{6!}{4!\times 2!}+\frac{5!}{4!\times 1!}$$

$$=\frac{6\times 5\times \cancel{4!}}{\cancel{4!}\times 2\times 1}+\frac{5\times \cancel{4!}}{\cancel{4!}\times 1}=15+5=20$$

۷۰.

$$\binom{8}{3}=\frac{8!}{3!\times(8-3)!}=\frac{8!}{3!\times 5!}=\frac{8\times 7\times 6\times \cancel{5!}}{3\times 2\times 1\times \cancel{5!}}=56$$

۷۱. رقم ۷ که باید باشد، پس دو رقم دیگر را باید از بین ارقام ۳، ۵، ۹ و ۱۰ انتخاب کنیم.

$$\binom{4}{2}=\frac{4!}{2!\times(4-2)!}=\frac{4!}{2!\times 2!}=\frac{4\times 3\times 2!}{2\times 1\times 2!}=6$$

۷۲. الف) باید ۴ عضو از h,g,f,e,d,c انتخاب کنیم. پس:

$$\binom{6}{4}=\frac{6!}{4!\times(6-4)!}=\frac{6!}{4!\times 2!}=\frac{6\times 5\times \cancel{4!}}{\cancel{4!}\times 2\times 1}=15$$

ب) باید ۳ عضو انتخاب کنیم اما a انتخاب شده است، پس فقط ۲ عضو دیگر از h,g,f,e,d,c می‌خواهیم. دقت کنید b نباید در زیرمجموعه باشد:

$$\binom{6}{2}=\frac{6!}{2!\times(6-2)!}=\frac{6!}{2!\times 4!}=\frac{6\times 5\times 4!}{2\times 1\times 4!}=15$$

پ) تعداد زیرمجموعه‌های ۷عضوی یا ۸عضوی را می‌خواهیم. پس:

$$\binom{8}{7}+\binom{8}{8}=\frac{8!}{7!\times(8-7)!}+\frac{8!}{8!\times(8-8)!}=\frac{8!}{7!\times 1!}+\frac{8!}{8!\times 0!}$$

$$=\frac{8\times 7!}{7!\times 1}+\frac{8!}{8!\times 1}=8+1=9$$

ت) تعداد زیرمجموعه‌های ۳عضوی یا ۲عضوی یا ۱عضوی یا صفرعضوی را می‌خواهیم:

$$\binom{8}{3}+\binom{8}{2}+\binom{8}{1}+\binom{8}{0}$$

$$=\frac{8!}{3!\times(8-3)!}+\frac{8!}{2!\times(8-2)!}+\frac{8!}{1!\times(8-1)!}+\frac{8!}{0!\times(8-0)!}$$

$$=\frac{8!}{3!\times 5!}+\frac{8!}{2!\times 6!}+\frac{8!}{1!\times 7!}+\frac{8!}{0!\times 8!}$$