• «هر انسانی لبخندی از خداست.
تقدیم به تو که زیباترین لبخند خدایی»

مقدمه مولّف

سلام عزیزان، امیدوارم همیشه شاد و تندرست باشید و ایام به کامتون باشه.

خردادماه ۱۴۰۱ مسئولین، زحمت یه مصوبه‌ای را کشیدن که کمی کنکور رو از ریل یکنواخت قدیمی جداش کرد و نقش سوابق تحصیلی رو تو کنکور پررنگ کرد. مصوبه می‌گه که نمرهٔ سوابق تحصیلی واسه سنجش و پذیرش تو رشته‌های پرمتقاضی دانشگاه‌ها قرار به صورت جدول زیر اجرا بشه:

سال تحصیلی دوازدهم	پایهٔ تحصیلی	میزان تأثیر
۱۴۰۱-۱۴۰۲	فقط دوازدهم	۴۰ درصد قطعی
۱۴۰۲-۱۴۰۳	فقط دوازدهم	۵۰ درصد قطعی
۱۴۰۳-۱۴۰۴	یازدهم و دوازدهم	۶۰ درصد قطعی
۱۴۰۴-۱۴۰۵ و بعد از آن	دهم، یازدهم و دوازدهم	۶۰ درصد قطعی

با این حساب سوابق تحصیلی یا همون نمرات امتحانای نهایی می‌تونه تو نتیجهٔ کنکور مؤثر واقع بشه. یعنی اگه نمرهٔ نهایی خوب باشه، نمرهٔ کنکور رو بالا می‌بره و اگه بد باشه، نمرهٔ کنکور رو پایین میاره.

یه مثالی واستون می‌زنم تا بهتر متوجه موضوع بشید:

فرض کنین ترازتون تو کنکور ۶۵۰۰ باشه و نمرهٔ امتحاناتتون تو نهایی خیلی خوب باشه و بعد از تبدیل به تراز، ترازش ۷۵۰۰ بشه. اون‌وقت تراز امتحانتون تو کنکور با احتساب ۴۰ درصد قطعی، به صورت زیر محاسبه می‌شه:

$$۶۵۰۰ \times \frac{۶۰}{۱۰۰} + ۷۵۰۰ \times \frac{۴۰}{۱۰۰} = ۳۹۰۰ + ۳۰۰۰ = ۶۹۰۰$$

یعنی نمرهٔ نهایی تونسته، ۴۰۰تا ترازتون رو بالا بکشه!

با این اوضاع می‌بایست هر دو جنبهٔ نهایی و کنکور رو تقویت کنین.

هدف ما هم از نگارش این کتاب دقیقاً همینه که بتونه شما رو به طور عالی واسه نهایی آماده کنه.

ویژگی‌های این کتاب:

۱ پوشش کامل سؤالای نهایی داخل و خارج از دی ۹۷ تا الان

۲ پوشش کامل مثالا، تمرینا، کار در کلاسا و حتی متن کتاب درسی

۳ ارائهٔ یه درس‌نامهٔ توپ و کامل و روان، اما مختصر و مفید

۴ پاسخ‌های تشریحی با رویکرد آموزشی

۵ ارائهٔ چند دوره امتحان نهایی به همراه پاسخ و بارم‌بندی نمونهٔ نهایی واسه آماده‌سازی بهتر شما

۶ ارائهٔ تحلیل آماری از سؤالات نهایی که وزن و سهم هر فصل و هر قسمت رو تو نهایی نشون می‌ده

۷ حذف سؤالای تکراری و ادغام سؤالات خیلی مشابه

لازمه تشکر و قدردانی کنم از:

۱ آقایان دکتر ابوذر نصری و دکتر کمیل نصری

۲ تیم خوب تولید خیلی‌سبز که زحمت کتاب رو دوش اون‌ها بود.

۳ ویراستاران خوب کتاب خانم‌ها نرجس تیمناک و مریم بیوک‌زاده

۴ سرکار خانم لولاو مرادی که مسئولیت هماهنگی کتاب را بر عهده داشتند.

با احترام

ابوالقاسم شعبانی

فهرست مطالب

درس ۲ قسمت دوم: تبدیل نمودار توابع

صفحهٔ ۱۵ تا ۲۳ کتاب درسی

درس‌نامهٔ ۲ ـ قسمت دوم را در صفحهٔ ۴۹ ببینید.

درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

۶۴- دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y=kf(x)$ همان دامنهٔ تابع $y=f(x)$ است. (دی ۹۹ و شهریور ۹۹)

۶۵- دامنهٔ تابع با ضابطه $y=-kf(\frac{x}{2})$ همان دامنهٔ تابع $y=-kf(x)$ می‌باشد. (خرداد ۹۹ خارج)

۶۶- برد تابع با ضابطهٔ $y=kf(x)$ همان برد تابع $y=f(x)$ است. (دی ۹۸)

۶۷- برد تابع $y=f(kx)$ با برد تابع $y=f(x)$ برابر است. (خرداد ۹۸ خارج)

۶۸- نمودار تابع $y=-\sqrt{x}$ همان نمودار تابع $y=\sqrt{-x}$ است. (دی ۹۸ خارج)

۶۹- اگر $f(x)=x^3$ و $g(x)=(x-3)^3$، نمودار g را می‌توان از نمودار f با انتقال سه واحد به سمت راست به دست آورد. (دی ۹۸ خارج)

۷۰- نقطهٔ $A\Big|_{-2}^{3}$ در تابع $y=f(x)$ متناظر با نقطهٔ $A'\Big|_{-2}^{9}$ در تابع $y=f(\frac{1}{3}x)$ است. (دی ۹۹ خارج)

۷۱- اگر $k>1$، آن‌گاه نمودار $y=f(kx)$ از انبساط افقی نمودار $y=f(x)$ به دست می‌آید. (متن کتاب درسی)

۷۲- اگر $0<k<1$، آن‌گاه نمودار $y=kf(x)$ از انقباض عمودی نمودار $y=f(x)$ به دست می‌آید. (متن کتاب درسی)

۷۳- اگر برد تابع f بازهٔ $[-3,1)$ باشد، برد تابع $y=-2f(3x-1)+3$ برابر $(1,9]$ است.

جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

۷۴- اگر دامنهٔ $f(x)$ برابر $[1,4]$ باشد، آن‌گاه دامنهٔ $2f(\frac{1}{2}x)$ برابر است با .... (خرداد ۹۸ خارج)

۷۵- اگر دامنهٔ تابع $f(x)=x+3$ بازهٔ $[-2,0]$ باشد، آن‌گاه دامنهٔ تابع $y=f(2x)$ برابر بازهٔ .... است. (شهریور ۱۴۰۰ خارج)

۷۶- اگر برد تابع f برابر $[-1,4]$ باشد، آن‌گاه برد تابع $y=2f(x)$ برابر با .... است. (خرداد ۹۹ خارج)

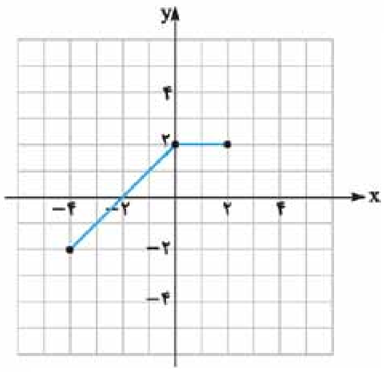
۷۷- برد تابع $y=-\sqrt{-x}$ برابر با .... می‌باشد. (شهریور ۹۸ خارج)

۷۸- برد تابع $f(3x)$ و تابع $f(\frac{1}{3}x)$ با یکدیگر .... است. (شهریور ۹۸ خارج)

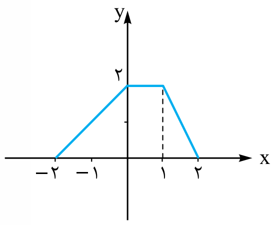
۷۹- نقطهٔ نظیر $(4,0)$ در تابع $f(x)$، در تابع $\frac{1}{2}f(2x)$ .... خواهد بود. (شهریور ۹۸ خارج)

۸۰- برد تابع $f(x)=\sqrt{-x}$ برابر است با .... (دی ۹۹ خارج)

۸۱- با توجه به نمودار تابع $y=f(x)$، نمودار تابع $y=f(-x)+2$ را رسم کنید. (خرداد ۱۴۰۰)



شکل مقابل، نمودار تابع $y=f(x)$ است. به کمک آن نمودار توابع زیر را رسم کنید.

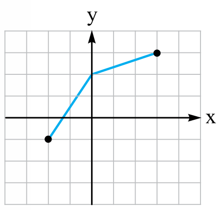


۸۲- $y=\frac{1}{2}f(2x)+1$

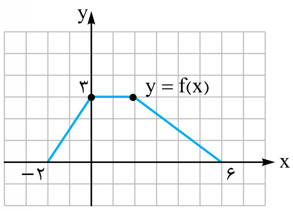
۸۳- $y=-f(-x)-1$

۸۴- $y=2f(x+1)-2$ (مشابه تمرین کتاب درسی)

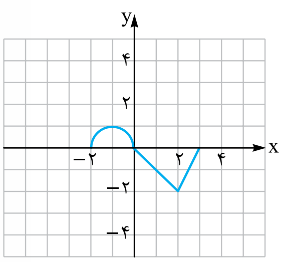
۸۵- با استفاده از نمودار تابع f نمودار تابع $y=f(\frac{x}{2})-2$ را رسم کنید. (دی ۹۷)



۸۶- نمودار تابع $y=f(x)$ در شکل روبه‌رو رسم شده است. نمودار تابع $y=\frac{1}{3}f(2x)$ را رسم کنید.
(شهریور ۹۹ و مشابه خرداد ۹۸)



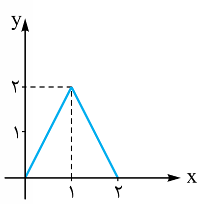
۸۷- نمودار تابع $y=f(x)$ در شکل روبه‌رو رسم شده است. (خرداد ۹۹)



الف) نمودار تابع $y=3f(\frac{1}{2}x)$ را رسم کنید.

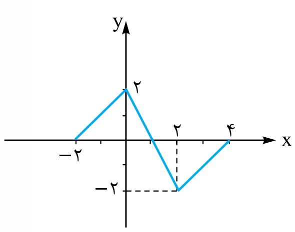
ب) دامنهٔ تابع $y=3f(\frac{1}{2}x)$ را تعیین کنید.

۸۸- نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت روبه‌رو است. با استفاده از آن نمودار $y=-2f(\frac{1}{3}x)$ را رسم کنید.
(شهریور ۹۸ و مشابه دی ۹۷ خارج)



۸۹- اگر دامنهٔ تابع f، $[-4,4]$ باشد، دامنهٔ تابع $y=f(\frac{x}{2})$ را به دست آورید. (خرداد ۱۴۰۰ خارج)

۹۰- شکل مقابل نمودار تابع $y=f(x)$ است. دامنه و برد تابع $g(x)=-\frac{1}{2}f(3x+1)-1$ را به دست آورید.



■ با استفاده از نمودار $y=\sqrt{x}$، نمودار توابع زیر را رسم کنید. (مشابه کار در کلاس کتاب درسی)

۹۱- $y=\sqrt{-x}$

۹۲- $y=-\sqrt{x}$

۹۳- $y=-\sqrt{-x}$

۹۴- $y=\sqrt{x-1}+1$

۹۵- $y=\sqrt{2-x}$

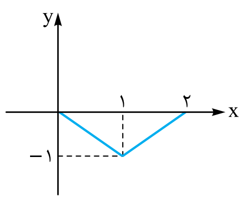
■ با استفاده از نمودار $y=|x+2|$ در بازهٔ $[-4,1]$، نمودار توابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن‌ها را بیابید. (مشابه کار در کلاس کتاب درسی)

۹۶- $y=-\frac{1}{2}|x+2|$

۹۷- $y=2|x+2|-3$

۹۸- نمودار تابع $g(x)=\frac{-1}{3}|2-x|$ را با استفاده از نمودار تابع $f(x)=|x-2|$ در بازهٔ $[1,3]$ رسم کنید. (دی ۹۹ خارج و کار در کلاس کتاب درسی)

۹۹- با استفاده از نمودار تابع f نمودار $y=|f(x)|-1$ را رسم کنید. (دی ۱۴۰۰ خارج)



۱۰۰- با استفاده از نمودار $y=\sqrt{x}$، نمودار $y=|\sqrt{x+1}-1|$ را رسم کنید.

۱۰۱- با استفاده از نمودار $y=\cos x$، نمودار $y=-2\cos 2x$ را رسم کنید. (مشابه تمرین کتاب درسی)

■ به کمک نمودار $y=\sin x$، نمودار توابع زیر را در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ رسم کنید. (مشابه تمرین کتاب درسی)

۱۰۲- $y=2\sin(-\frac{1}{2}x)$

۱۰۳- $y=-\sin(2x)+1$

۱۰۴- با استفاده از نمودار $f(x)=\cos x$ نمودار تابع $y=-\frac{1}{2}\cos(-\frac{1}{2}x)$ را رسم کنید. (شهریور ۱۴۰۰ خارج)

۱۰۵- نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^2-2x+1$ را ابتدا دو واحد به سمت پایین، سپس یک واحد به سمت چپ و در مرحلهٔ آخر نسبت به محورxها قرینه می‌کنیم. ضابطهٔ نمودار تابع را در هر مرحله بنویسید. (شهریور ۱۴۰۰)

۱۰۶- نمودار تابع $y=-x^2+2x$ را ابتدا یک واحد به سمت راست و سپس دو واحد به پایین منتقل کرده و در نهایت نمودار حاصل را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم. ضابطهٔ تابع را در هر مرحله بنویسید. (مشابه شهریور ۱۴۰۰)

درس ۳ تـابـع وارون

صفحهٔ ۲۴ تا ۲۹ کتاب درسی

درس‌نامهٔ ۳ را در صفحهٔ ۵۷ ببینید.

■ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

۱۰۷- دو تابع با ضابطه‌های $f(x)=x^3$ و $g(x)=\sqrt[3]{x}$ وارون یکدیگرند. (شهریور ۱۴۰۰)

۱۰۸- دوتابع $f(x)=-\frac{7}{2}x-3$ و $g(x)=-\frac{2x+7}{6}$ وارون یکدیگرند. (دی ۱۴۰۰ و خرداد ۹۸)

۱۰۹- همواره $(f^{-1}of)(x)=(fof^{-1})(x)$

۱۱۰- تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^2+2x-6$ در بازهٔ $(-\infty,-1]$ وارون‌پذیر است.

۱۱۱- اگر $f(x)=3x^3-1$، آن‌گاه $f^{-1}(25)=2$.

۱۱۲- وارون تابع $f(x)=x^2$ $(x\leq 0)$، به صورت $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$ است.

جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

۱۱۳- اگر $f=\{(۲,۳),(۳,۵)\}$ باشد، حاصل $f^{-۱}(۳)$ برابر .... است. (خرداد ۱۴۰۱)

۱۱۴- وارون تابع $g(x)=(x^۳+۱)$ به صورت .... می‌باشد. (دی ۱۴۰۰ خارج)

۱۱۵- اگر $f(x)=۷x-۳$، آن‌گاه $f^{-۱}(-۱۷)$ برابر .... است.

۱۱۶- اگر $f(x)=۵x-۳$ و $g(x)=x^۳+۱$، آن‌گاه حاصل $f^{-۱}og^{-۱}(۹)$ برابر .... است.

۱۱۷- وارون تابع $f(x)=x^۲+۴$ در بازهٔ $(-\infty,۰]$ به صورت .... است.

۱۱۸- ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=-\frac{۷}{۲}x-۳$ را به دست آورید. (شهریور ۹۹)

۱۱۹- ضابطهٔ وارون تابع $g(x)=-۵-\sqrt{۳x+۱}$ را به دست آورید. (دی ۹۹، خرداد ۹۸ خارج و دی ۹۷ خارج)

۱۲۰- اگر $f(x)=\sqrt{x+۳}$ باشد، وارون تابع f و دامنه و برد f و $f^{-۱}$ را به دست آورید. (خرداد ۱۴۰۰ خارج و مشابه خرداد ۹۹ خارج)

۱۲۱- تابع $g(x)=۱+\sqrt{x-۲}$ در نظر بگیرید. (شهریور ۱۴۰۰ خارج)

الف) ضابطهٔ وارون تابع g را به دست آورید.

ب) تابع g و وارون آن را در یک صفحه رسم کنید.

۱۲۲- با محدودکردن دامنهٔ تابع $f(x)=|x-۲|$، تابعی وارون‌پذیر بسازید و سپس ضابطهٔ وارون آن را به دست آورید. (مشابه تمرین کتاب درسی)

۱۲۳- با محدودکردن دامنهٔ تابع $h(x)=x^۲-۲x+۲$، یک تابع یک‌به‌یک به دست آورید و دامنه و برد تابع f و ضابطهٔ وارون آن را بنویسید. (خرداد ۱۴۰۰ خارج، مشابه دی ۹۹ خارج و خرداد ۹۹ خارج)

۱۲۴- نشان دهید توابع $f(x)=۳x-۴$ و $g(x)=\frac{x+۴}{۳}$ وارون یکدیگرند. (دی ۹۸، مشابه خرداد ۹۹ خارج و مثال کتاب درسی)

۱۲۵- نشان دهید دو تابع $f(x)=-\sqrt{x-۸}$ و $g(x)=۸+x^۲(x\leq ۰)$ وارون یکدیگرند. (دی ۹۸ خارج و تمرین کتاب درسی)

۱۲۶- اگر $f=\{(۱,۵),(۲,۴),(۳,-۱)\}$ باشد، توابع $fof^{-۱}$ و $f^{-۱}of$ را به دست آورید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ (مشابه مثال کتاب درسی)

۱۲۷- اگر $f(x)=\frac{۱}{۸}x-۳$ و $g(x)=x^۳$ باشد، مقدار $(g^{-۱}of^{-۱})(۵)$ را به دست آورید. (شهریور ۹۸، خرداد ۹۸، دی ۹۷ و تمرین کتاب درسی)

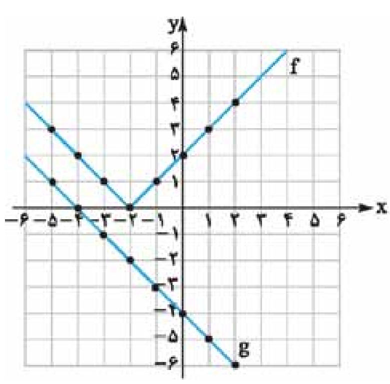
۱۲۸- اگر $f(x)=\frac{۱}{۵}x-۳$ و $g(x)=\sqrt{x+۱۷}$ باشد، حاصل $(f^{-۱}og^{-۱})(۳)$ را به دست آورید. (دی ۱۴۰۰ خارج)

۱۲۹- الف) با توجه به نمودار توابع f و g، مقادیر زیر را در صورت وجود به دست آورید. (دی ۱۴۰۰)

۱) $(gof)(-۱)$

۲) $(g^{-۱}of^{-۱})(۲)$

ب) نمودار تابع $f(x-۲)-۳$ را رسم کنید.



۱۳۰- اگر $f(x)=\frac{۱}{۲۵}x-۴$ و $g(x)=x^۳$، مقدار $(fog)^{-۱}(۱)$ را به دست آورید. (مشابه تمرین کتاب درسی)

فصل ۱ درس ۲

قسمت دوم:
تبدیل نمودار توابع
صفحه ۱۵ تا ۲۳ کتاب درسی

سخن دبیر

تبدیل نمودار که خیلیا اونو با انتقال می‌شناسن، مبحثیه که از سال دهم تا حالا باهاش خاطره داریم. مبحث بسیار جذابی که اگه بهش مسلط بشی خیلی از نمودارها رو می‌تونی تو سه سوت رسمش کنی. از این مبحث همیشه تو نهایی سؤال اومده.

تبدیل نمودار توابع

تبدیل نمودارها در دو راستا صورت می‌گیرد:

۱ در راستای محور xها که به صورت چپ و راست انجام می‌شود.

۲ در راستای محور yها که به صورت بالا و پایین انجام می‌شود.

نکته در تبدیل نمودار توابع دانستن مطالب زیر ضروری و کارگشا است:

۱ در تبدیلات مربوط به محور yها، همه‌چیز و از جمله ترتیب ۴ عمل اصلی، **مستقیم** عمل می‌کند.

۲ در تبدیلات مربوط به محور xها، همه‌چیز و حتی ترتیب ۴ عمل اصلی به صورت **وارونه** عمل می‌کند.

۳ در تبدیلات ترکیبی، اولویت با تبدیلات مربوط به محور xها است. یعنی ابتدا تبدیلات مربوط به محور xها را انجام می‌دهیم و سپس تبدیلات مربوط به محور yها را.

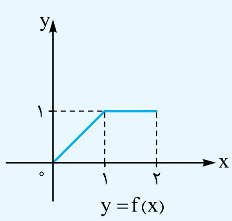
تبدیل نمودار توابع در یک نگاه

فرض کنیم نمودار یا ضابطهٔ تابع $y=f(x)$ را در اختیار داشته باشیم و $k>0$ عدد حقیقی باشد، در این صورت تمام تبدیلات نمودار تابع $y=f(x)$، از قوانینی که در ادامه آمده است، تبعیت می‌کنند:

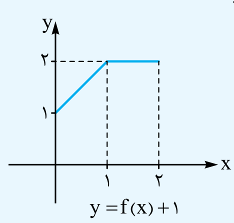
تبدیلات مربوط به محور yها

۱ $y=f(x)+k$: نمودار $y=f(x)$، k واحد به بالا منتقل می‌شود.

به طور مثال:

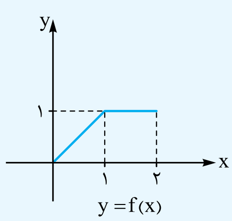


$\Rightarrow$

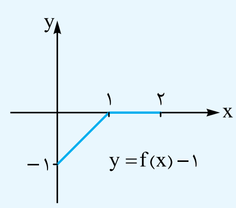


۲ $y=f(x)-k$: نمودار $y=f(x)$، k واحد به پایین منتقل می‌شود.

به طور مثال:

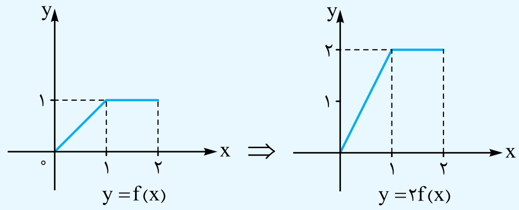


$\Rightarrow$



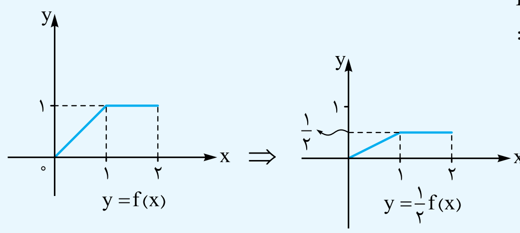
۳) $y = kf(x)$: در نمودار $y = f(x)$، yها k برابر می‌شود.

به طور مثال:



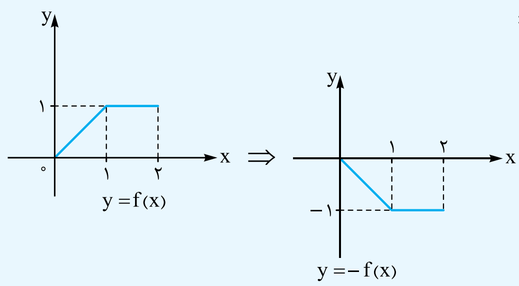
۴) $y = \frac{1}{k}f(x)$: در نمودار $y = f(x)$، yها بر k تقسیم می‌شود.

به طور مثال:



۵) $y = -f(x)$: نمودار $y = f(x)$ نسبت به محور xها قرینه می‌شود.

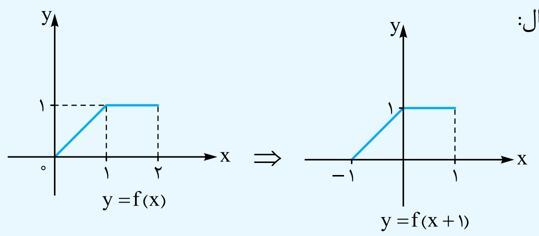
به طور مثال:



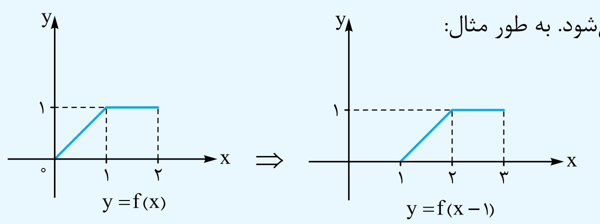
تبدیلات مربوط به محور xها

۱) $y = f(x+k)$: نمودار $y = f(x)$، k واحد به چپ منتقل می‌شود.

به طور مثال:

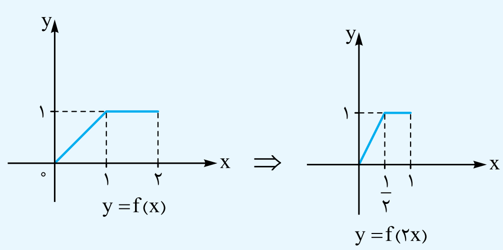


۲) $y = f(x-k)$: نمودار $y = f(x)$، k واحد به راست منتقل می‌شود. به طور مثال:



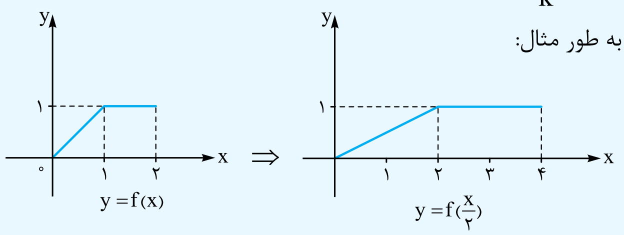
۳) $y = f(kx)$: در نمودار $y = f(x)$، xها بر k تقسیم می‌شود.

به طور مثال:



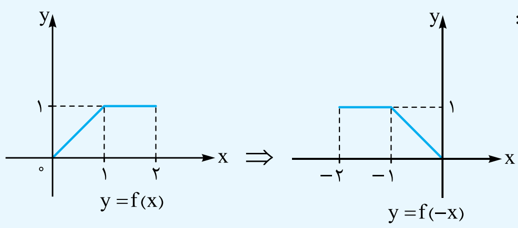
۴) $y = f(\frac{1}{k}x)$: در نمودار $y = f(x)$، xها در k ضرب می‌شود.

به طور مثال:

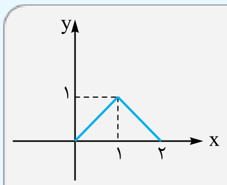


۵) $y = f(-x)$: نمودار $y = f(x)$ نسبت به محور yها قرینه می‌شود.

به طور مثال:



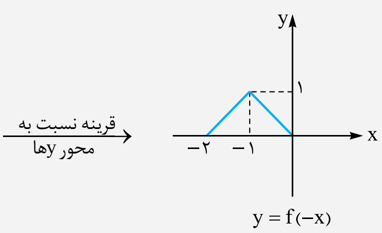
مثال **نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل است.**

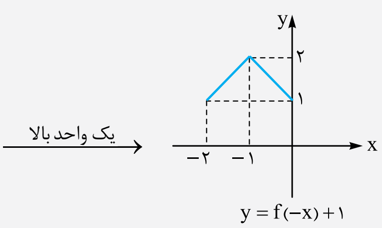


نمودار توابع زیر را رسم کنید.

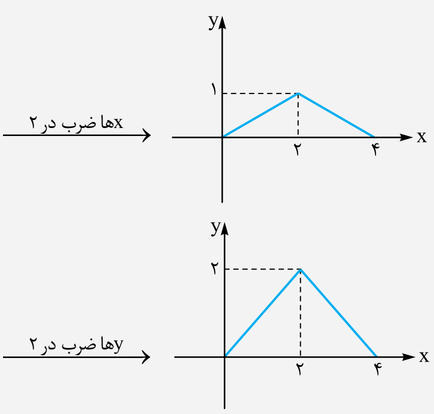
الف) $y = f(-x) + 1$ **ب) $y = 2f(\frac{x}{2})$**

✔ پاسخ: الف)





ب)



چند نکته

۱ با توجه به مطالب گفته‌شده، می‌توان گفت:

الف) دامنهٔ توابع $y=f(x)$ و $y=kf(x)$ یکی است. همچنین برد $y=kf(x)$، k برابر برد $y=f(x)$ است.

ب) برد توابع $y=f(x)$ و $y=f(kx)$ یکسان است. همچنین دامنهٔ $y=f(kx)$، $\frac{1}{k}$ برابر دامنهٔ $y=f(x)$ است.

۲ نمودار $y=kf(x)$، از انبساط یا انقباض عمودی نمودار $y=f(x)$ در راستای محور yها به دست می‌آید. در واقع اگر $k>1$، انبساط عمودی با ضریب k و اگر $0<k<1$، انقباض عمودی با ضریب k خواهیم داشت و چنان‌چه $k<0$، در این صورت ابتدا نمودار $y=f(x)$ را نسبت به محور xها قرینه نموده و در این حالت اگر $k<-1$، انبساط عمودی با ضریب $|k|$ و اگر $-1<k<0$، انقباض عمودی با ضریب $|k|$ خواهیم داشت.

۳ نمودار $y=f(kx)$، از انبساط یا انقباض افقی نمودار $y=f(x)$ در راستای محور xها به دست می‌آید. در واقع اگر $k>1$، انقباض افقی با ضریب $\frac{1}{k}$ و اگر $0<k<1$، انبساط افقی با ضریب $\frac{1}{k}$ خواهیم داشت و چنان‌چه $k<0$، در این صورت ابتدا نمودار $y=f(x)$ را نسبت به محور yها قرینه نموده و در این حالت اگر $k<-1$، انقباض افقی با ضریب $|\frac{1}{k}|$ و اگر $-1<k<0$، انبساط افقی با ضریب $|\frac{1}{k}|$ خواهیم داشت.

مثال **درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید.**

الف) دامنهٔ $y=f(x)$ با دامنهٔ $y=f(2x)$ یکسان است.

ب) برد تابع $y=f(x)$ و برد تابع $y=f(\frac{1}{3}x)$ برابر است.

پ) نمودار $y=2f(x)$ از انبساط عمودی نمودار $y=f(x)$ به دست می‌آید.

ت) نمودار $y=f(3x)$ از انبساط افقی نمودار $y=f(x)$ به دست می‌آید.

پاسخ:

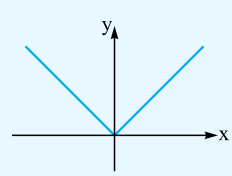
الف) نادرست. برد این دو تابع یکسان و دامنهٔ آن‌ها متفاوت است.

ب) درست

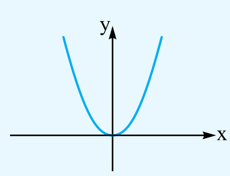
پ) درست

ت) نادرست. از انقباض افقی به دست می‌آید نه انبساط.

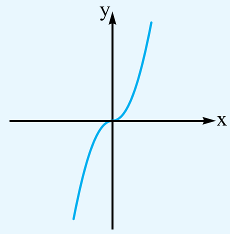
نکته نمودار توابع مهمی که در تبدیل نمودارها به آن‌ها نیازمندیم به صورت زیر است:



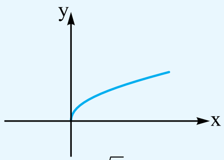
$y=|x|$



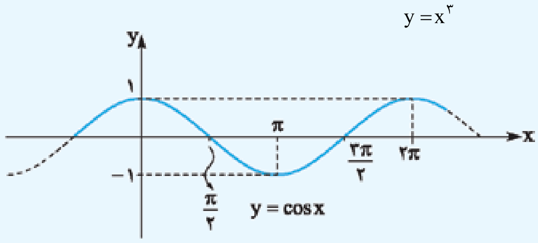
$y=x^2$

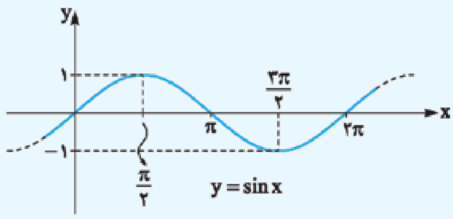


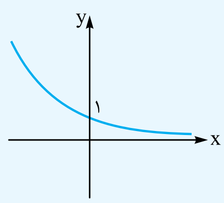
$y=x^3$



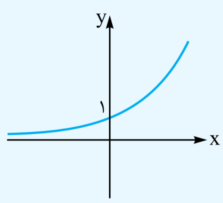
$y=\sqrt{x}$



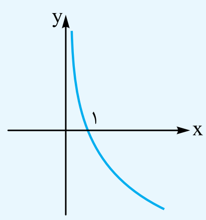




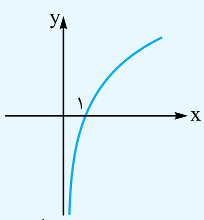
$y=a^x\ ,\ (0<a<1)$



$y=a^x\ ,\ (a>1)$



$y=\log_a x\ ,\ (0<a<1)$



$y=\log_a x\ ,\ (a>1)$

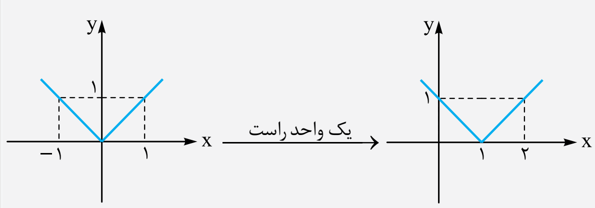
مثال **نمودار توابع زیر را با استفاده از نمودارهای نکتهٔ قبل رسم کنید.**

الف) $y=-2|x-1|$

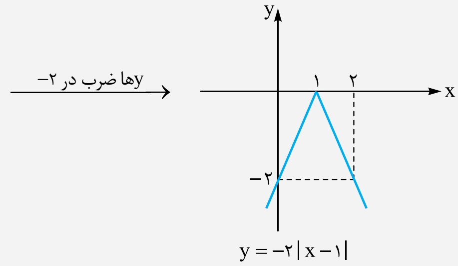
ب) $y=-\sqrt{-x}$

پ) $y=-2\sin(\frac{x}{2})$

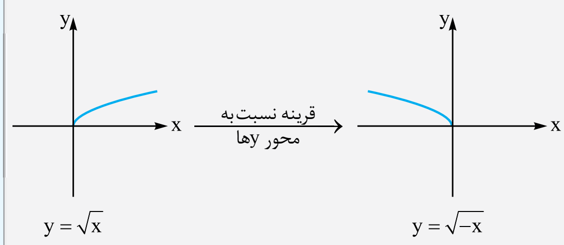
پاسخ: الف)

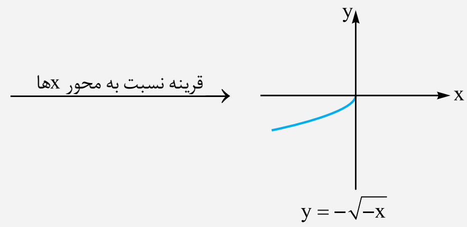


$y=|x|$ $\qquad$ $y=|x-1|$

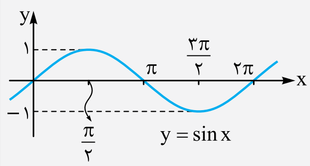


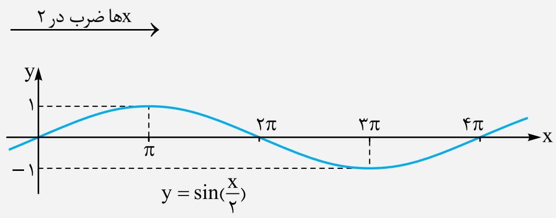
ب)

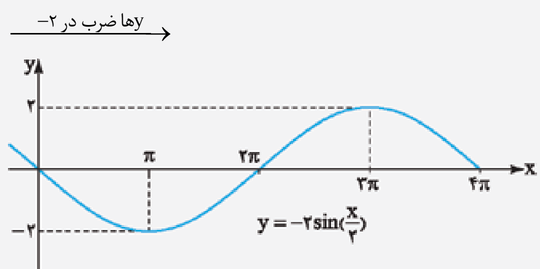




پ)





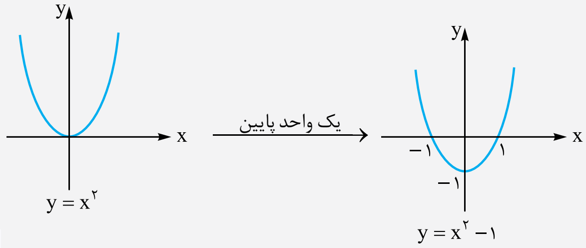


رسم نمودار $y=|f(x)|$

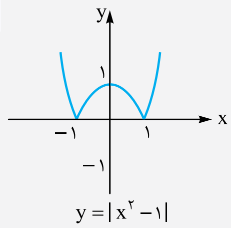
برای رسم نمودار $y=|f(x)|$، ابتدا نمودار $y=f(x)$ را رسم کرده و سپس بخش‌هایی از نمودار $y=f(x)$ که زیر محور xها قرار دارد را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.

مثال نمودار تابع $y=|x^۲-۱|$ را رسم کنید.

✔ **پاسخ:** ابتدا نمودار $y=x^۲-۱$ را رسم می‌کنیم. برای این منظور کافی است نمودار $y=x^۲$ را یک واحد به پایین منتقل کنیم:



حال بخش‌هایی از نمودار $y=x^۲-۱$ که زیر محور xها قرار دارد را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم:



پاسخ سؤالات

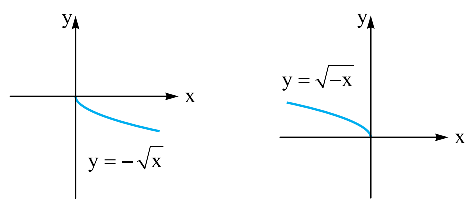
۶۴. درست

۶۵. نادرست

۶۶. نادرست. برد $y=kf(x)$، k برابر برد $y=f(x)$ است.

۶۷. درست

۶۸. نادرست. نمودار توابع $y=\sqrt{-x}$ و $y=-\sqrt{x}$ به صورت زیر هستند:



۶۹. درست

۷۰. درست. زیرا همان‌طور که نمودار $y=f(\frac{۱}{۳}x)$ از سه برابر کردن طول نقاط نمودار $y=f(x)$ به دست می‌آید، نقطهٔ A' نیز از سه برابر کردن طول نقطهٔ A به دست می‌آید.

۷۱. نادرست

۷۲. درست

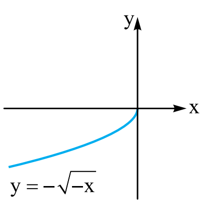
۷۳. درست. زیرا کافی است نقاط بازهٔ $(-۳,۱]$ را در -۲ ضرب کرده و با ۳ جمع کنیم.

۷۴. $[۲,۸]$. بازه دو برابر می‌شود.

۷۵. $[-۱,۰]$

۷۶. $[-۲,۸]$

۷۷. $(-\infty,۰]$. زیرا نمودار این تابع به صورت مقابل است:



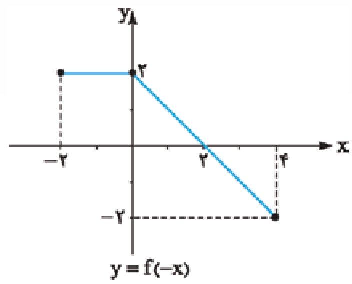
۷۸. برابر

۷۹. $(۲,۰)$

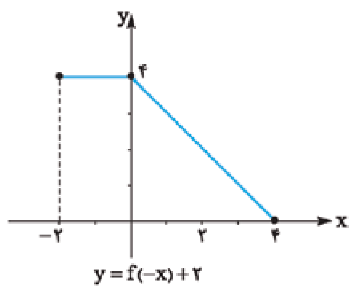
۸۰. $[۰,+\infty)$

۸۱.

قرینه نسبت‌به محور yها

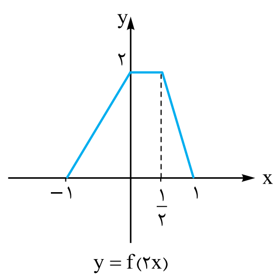


۲ واحد بالا

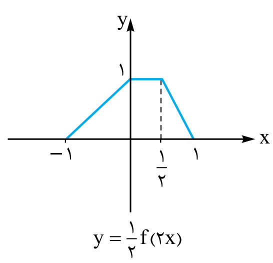


۸۲.

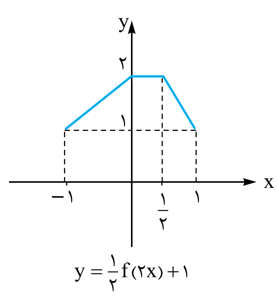
xها تقسیم بر ۲



yها تقسیم بر ۲

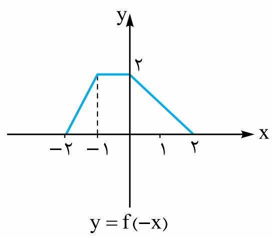


یک واحد بالا

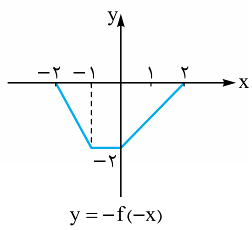


۸۳.

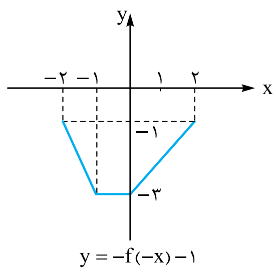
قرینه نسبت‌به محور yها



قرینه نسبت‌به محور xها

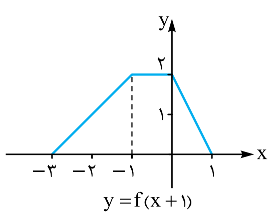


یک واحد پایین

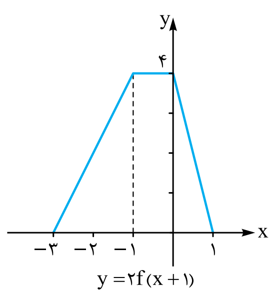


۸۴.

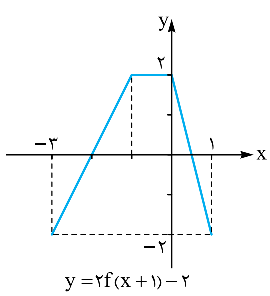
یک واحد چپ



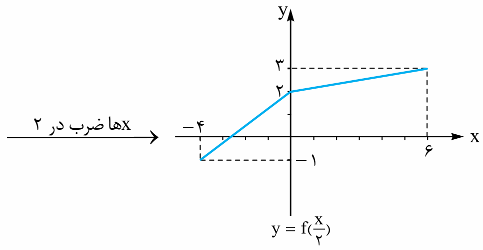
yها ضرب در ۲

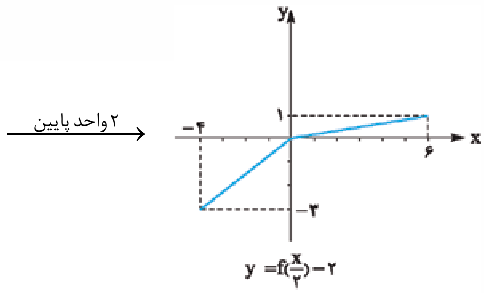


۲ واحد پایین

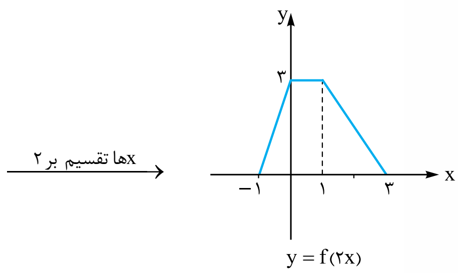


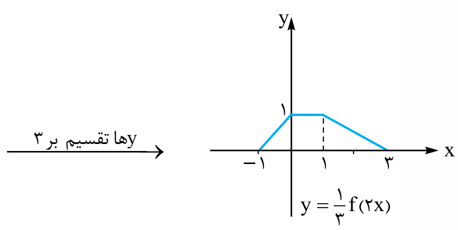
۸۵.



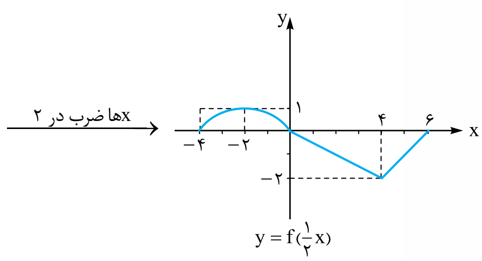


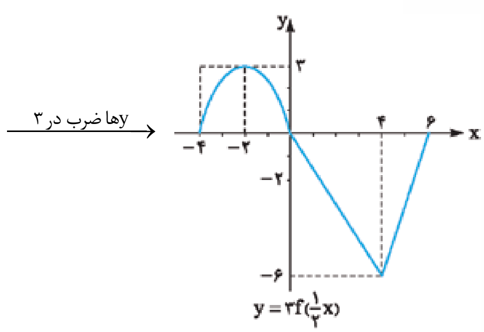
۸۶.





۸۷. الف)

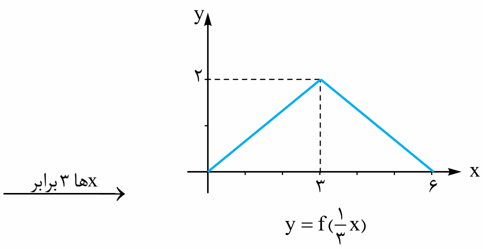


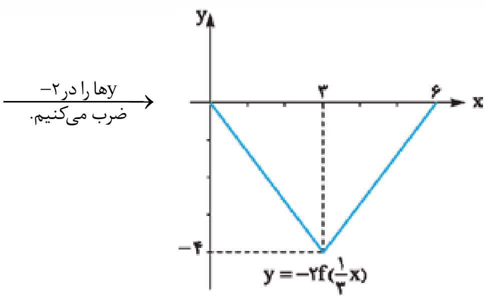


ب) با توجه به نمودار، داریم:

$D_y = [-۴,۶]$

۸۸.





۸۹. $\frac{x}{۲} \in [-۴,۴] \Rightarrow -۴ \leq \frac{x}{۲} \leq ۴ \Rightarrow -۸ \leq x \leq ۸$

بنابراین دامنهٔ $y = f(\frac{x}{۲})$ برابر $[-۸,۸]$ است.

۹۰. با توجه به نمودار، داریم $D_f = [-۲,۴]$ و $R_f = [-۲,۲]$.

برای یافتن دامنهٔ تابع g، می‌توان نوشت:

$$-۲ \leq ۳x+۱ \leq ۴ \xrightarrow{-۱} -۳ \leq ۳x \leq ۳$$

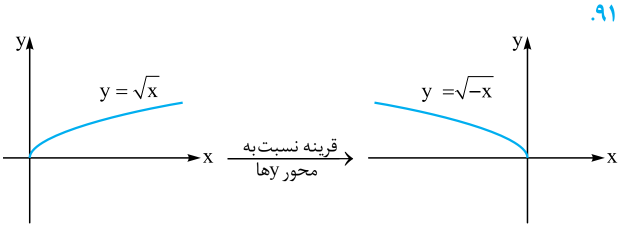
$$\xrightarrow{\div ۳} -۱ \leq x \leq ۱ \Rightarrow D_g = [-۱,۱]$$

هم‌چنین برای محاسبهٔ برد تابع g، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

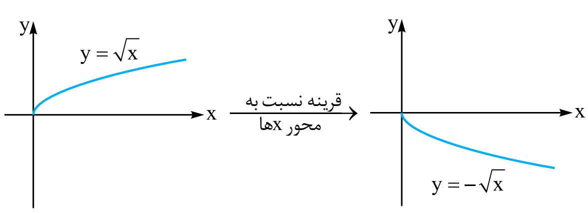
$$-۲ \leq f(۳x+۱) \leq ۲ \xrightarrow{\times(-\frac{۱}{۲})} ۱ \geq -\frac{۱}{۲}f(۳x+۱) \geq -۱$$

$$\xrightarrow{-۱} ۰ \geq -\frac{۱}{۲}f(۳x+۱)-۱ \geq -۲ \Rightarrow R_g = [-۲,۰]$$

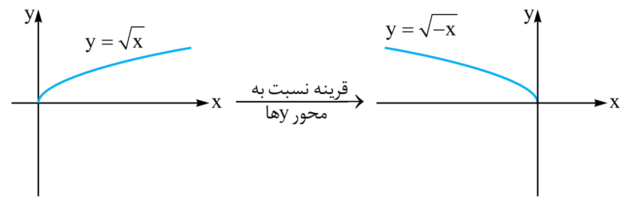
۹۱.

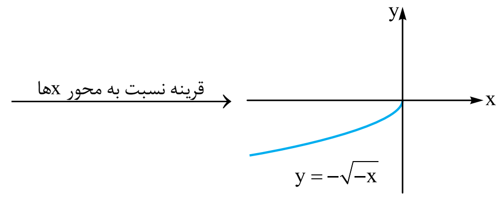


۹۲.

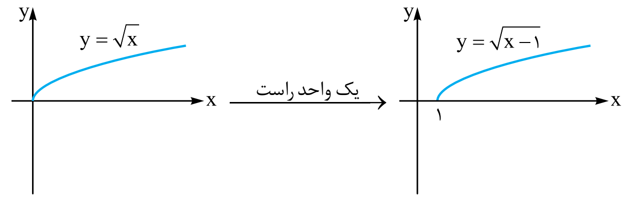


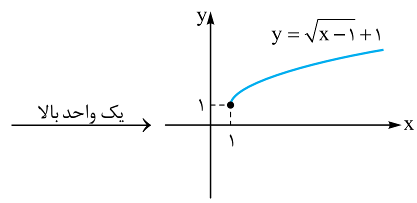
۹۳.



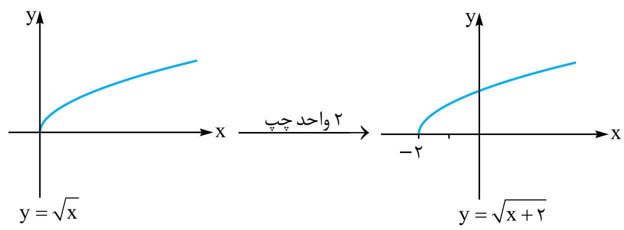


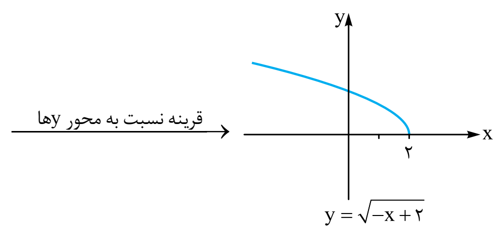
۹۴.



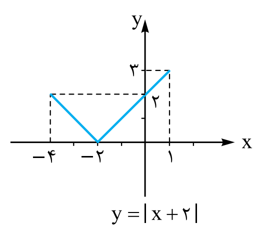


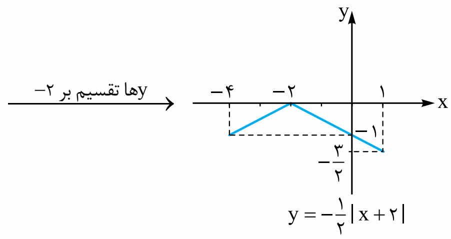
۹۵.





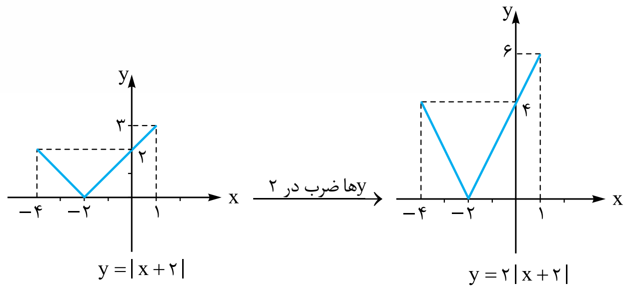
۹۶. نمودار $y=|x+2|$ در بازهٔ $[-4,1]$ به صورت زیر است:

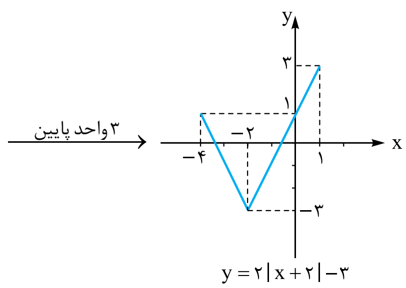




با توجه به شکل، $D_y=[-4,1]$ و $R_y=[-\frac{3}{2},0]$

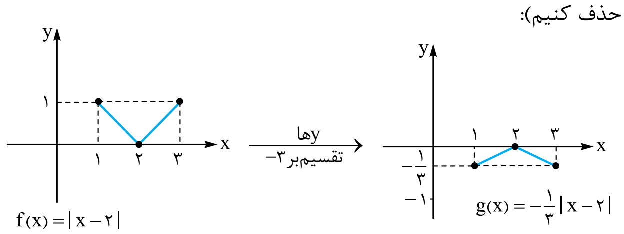
۹۷.



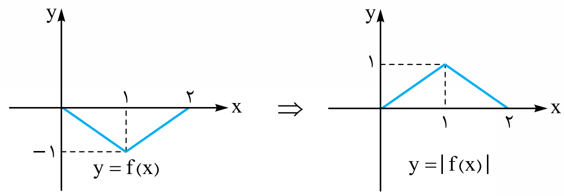


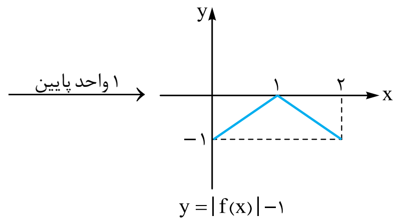
با توجه به شکل، داریم: $D_y=[-4,1]$ و $R_y=[-3,3]$

۹۸. می‌دانیم $|-u|=|u|$، پس $|2-x|=|x-2|$. بنابراین باید به کمک نمودار $f(x)=|x-2|$، نمودار $g(x)=-\frac{1}{3}|x-2|$ را رسم کنیم. برای این منظور کافی است نمودار $f(x)=|x-2|$ را در بازهٔ $[1,3]$ رسم نموده و در نمودار حاصل، yها را بر -3 تقسیم کنیم. (توجه کنید که برای رسم $y=|x-2|$ در بازهٔ $[1,3]$، کافی است نمودار $y=|x|$ را دو واحد به راست منتقل کنیم و قسمتی که در بازهٔ $[1,3]$ قرار می‌گیرد را نگه داشته و بقیه را حذف کنیم):

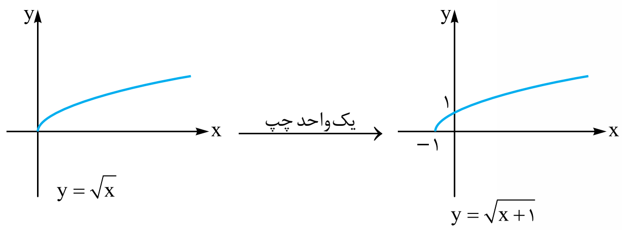


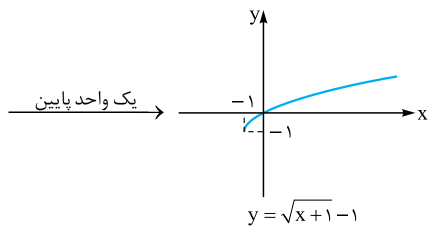
۹۹. برای رسم نمودار $y=|f(x)|-1$، ابتدا بخش‌هایی از نمودار $y=f(x)$ که زیر محور xها قرار دارد را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم تا نمودار $y=|f(x)|$ به دست آید. سپس نمودار حاصل را یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم.



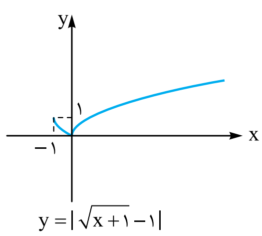


.۱۰۰

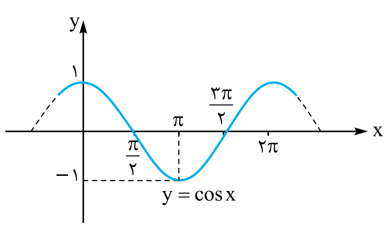


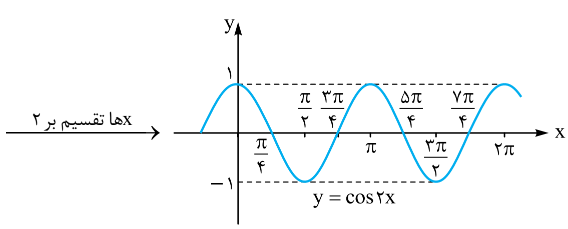


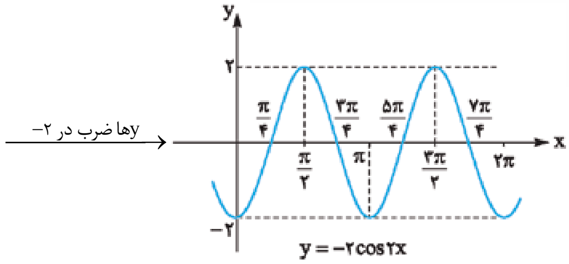
حال باید قرینهٔ بخش‌هایی از نمودار که زیر محور xها قرار دارد را نسبت به محور xها رسم کنیم تا نمودار $y=|\sqrt{x+1}-1|$ به دست آید. بنابراین نمودار $y=|\sqrt{x+1}-1|$ به صورت مقابل در می‌آید:



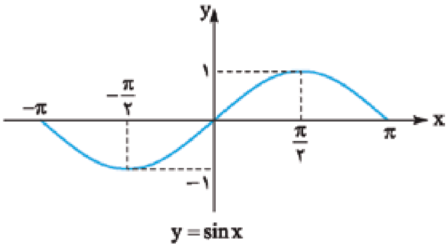
.۱۰۱

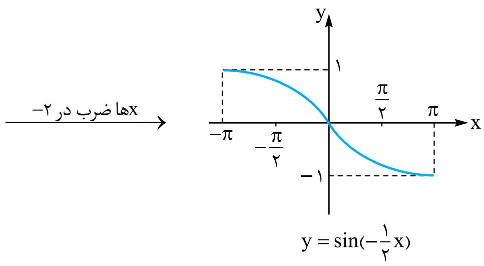


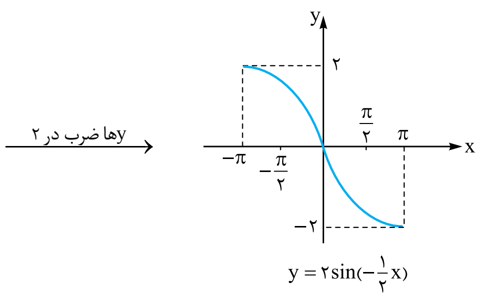




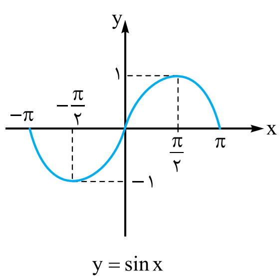
.۱۰۲

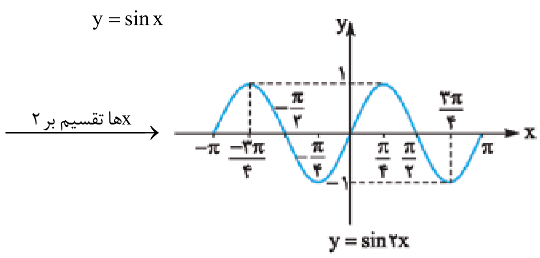


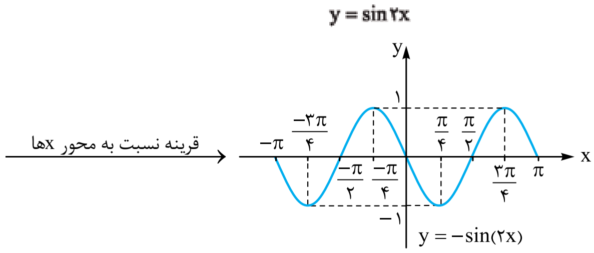




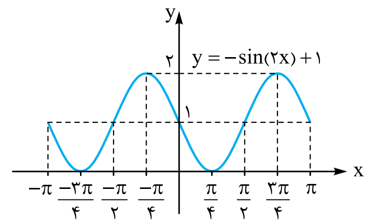
.۱۰۳



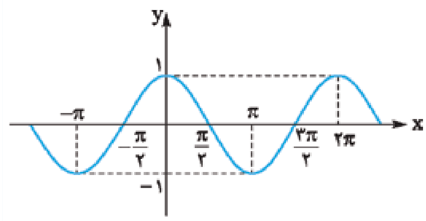




یک واحد بالا

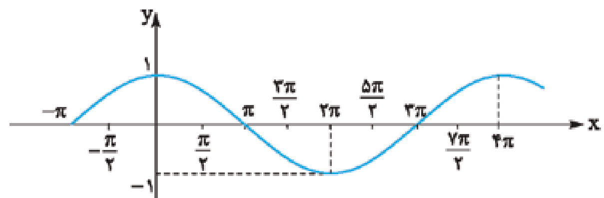


۱۰۴.



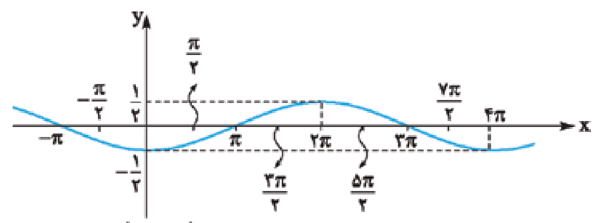
$y = \cos x$

xها ضرب در ۲−



$y = \cos(-\frac{۱}{۲}x)$

yها تقسیم بر ۲−



$y = -\frac{۱}{۲}\cos(-\frac{۱}{۲}x)$

توجه کنید که $\cos(-\frac{۱}{۲}x)$ با $\cos(\frac{۱}{۲}x)$ برابر است. در واقع کسینوس منفی را می‌خورد.

۱۰۵. ضابطهٔ تابع f را می‌توان به صورت $f(x) = x^۲ - ۲x + ۱ = (x-۱)^۲$ نوشت. حال می‌توان نوشت:

$$f(x) = (x-۱)^۲ \xrightarrow{\text{۲ واحد پایین}} y = (x-۱)^۲ - ۲$$

$$\xrightarrow[x \to x+۱]{\text{۱ واحد چپ}} y = ((x+۱)-۱)^۲ - ۲ = x^۲ - ۲$$

$$\xrightarrow[\text{محور xها}]{\text{قرینه نسبت به}} y = -(x^۲ - ۲)$$

بنابراین ضابطهٔ نمودار حاصل در نهایت به صورت $y = -x^۲ + ۲$ درمی‌آید.

۱۰۶.

$$y = -x^۲ + ۲x \xrightarrow[x \to x-۱]{\text{یک واحد راست}} y = -(x-۱)^۲ + ۲(x-۱)$$

$$= -x^۲ + ۲x - ۱ + ۲x - ۲ \Rightarrow y = -x^۲ + ۴x - ۳$$

$$\xrightarrow{\text{دو واحد پایین}} y = (-x^۲ + ۴x - ۳) - ۲$$

$$\Rightarrow y = -x^۲ + ۴x - ۵$$

$$\xrightarrow[x \to -x]{\text{قرینه نسبت به محور yها}} y = -(-x)^۲ + ۴(-x) - ۵$$

$$\Rightarrow y = -x^۲ - ۴x - ۵$$

فصل ۱ درس ۳

تابع وارون

صفحهٔ ۲۴ تا ۲۹ کتاب درسی

سخن دبیر

مبحث یک‌به‌یک و وارون رو سال گذشته تو ریاضی ۲ فوندید. مباحث مهمی که تو کتاب ریاضی ۳ مطرح می‌شه، یکی پیداکردن ضابطهٔ تابع وارون، دومی شرط وارون هم بودن دو تابع، سومی محدودکردن دامنهٔ تابع واسهٔ وارون‌پذیربودن و آخری هم یافتن مقدار تابع وارون یا تابع مرکب وارون تو یه نقطه هست. در اغلب موارد تو نهایی از این مبحث سؤال طرح می‌شه.

رابطهٔ تابع یک‌به‌یک و وارون‌پذیری

از سال گذشته به خاطر دارید که هر تابع یک‌به‌یک، وارون‌پذیر است و بالعکس.

وارون تابع f را معمولاً با نماد $f^{-۱}$ نمایش می‌دهیم.

روش محاسبهٔ ضابطهٔ تابع وارون

اگر تابع f یک‌به‌یک باشد، در معادلهٔ $y = f(x)$، x را بر حسب y به دست می‌آوریم و سپس جای x و y را عوض می‌کنیم.

مثال **ضابطهٔ وارون توابع زیر را به دست آورید.**

الف) $f(x) = ۳ - \sqrt{۲x - ۷}$ **ب)** $g(x) = x^۲ - ۴x \,;\, x \le ۲$

پاسخ الف) به جای $f(x)$، y قرار می‌دهیم. پس:

$$y = ۳ - \sqrt{۲x - ۷} \Rightarrow \sqrt{۲x - ۷} = ۳ - y$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} ۲x - ۷ = (۳ - y)^۲ \Rightarrow ۲x = (۳ - y)^۲ + ۷$$

$$\Rightarrow x = \frac{۱}{۲}((۳ - y)^۲ + ۷)$$

با تعویض جای x و y داریم:

$$y = \frac{۱}{۲}((۳ - x)^۲ + ۷) \text{ یا } f^{-۱}(x) = \frac{۱}{۲}((۳ - x)^۲ + ۷)$$

ب) به جای $g(x)$ قرار می‌دهیم y. پس:

$$y = x^۲ - ۴x \xrightarrow{+۴} y + ۴ = x^۲ - ۴x + ۴$$

$$\Rightarrow y + ۴ = (x - ۲)^۲ \xrightarrow{\sqrt{}} \sqrt{y + ۴} = |x - ۲|$$

$$\xrightarrow{\text{طبق فرض: } x \le ۲} \sqrt{y + ۴} = -(x - ۲) = -x + ۲$$

$$\Rightarrow x = ۲ - \sqrt{y + ۴} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = ۲ - \sqrt{x + ۴}$$

$$\text{یا } g^{-۱}(x) = ۲ - \sqrt{x + ۴}$$

نکته اگر f تابعی یک‌به‌یک و $f^{-۱}$ وارون آن باشد، آن‌گاه:

$$(fof^{-۱})(x) = x \;;\; x \in D_{f^{-۱}}$$

$$(f^{-۱}of)(x) = x \;;\; x \in D_f$$

شرط وارون یکدیگر بودن دو تابع

براساس نکتهٔ قبل، شرط آن‌که دو تابع f و g وارون یکدیگر باشند، آن است که:

$$(fog)(x) = x \,;\, x \in D_g \quad \text{و} \quad (gof)(x) = x \,;\, x \in D_f$$

یعنی باید ترکیب دو تابع، برابر تابع همانی شود.

مثال نشان دهید دو تابع $f(x)=2x^3-5$ و $g(x)=\sqrt[3]{\frac{x+5}{2}}$ وارون یکدیگر هستند.

✓ **پاسخ:** باید نشان دهیم ترکیب این دو تابع، برابر تابع همانی است:

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(\sqrt[3]{\frac{x+5}{2}})=2(\sqrt[3]{\frac{x+5}{2}})^3-5$$

$$=\cancel{2}(\frac{x+5}{\cancel{2}})-5=x$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(2x^3-5)=\sqrt[3]{\frac{(2x^3-5)+5}{2}}$$

$$=\sqrt[3]{\frac{2x^3}{2}}=\sqrt[3]{x^3}=x$$

پس f و g وارون یکدیگرند.

محدودکردن دامنهٔ تابع

گاهی اوقات یک تابع به دلیل یک‌به‌یک نبودن، وارون‌پذیر نیست. در این‌گونه توابع می‌توان دامنهٔ تابع را طوری محدود کرد که به یک تابع یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیر تبدیل شود. به طور مثال تابع $y=x^2$ یک‌به‌یک نیست ولی اگر دامنهٔ تابع را به بازهٔ $[0,+\infty)$ یا $(-\infty,0]$ یا هر زیرمجموعه‌ای از آن‌ها محدود کنیم، یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیر خواهد شد.

نکته اگر دامنهٔ تابع درجه‌دوم $y=ax^2+bx+c$ به یکی از بازه‌های $[-\frac{b}{2a},+\infty)$ یا $(-\infty,-\frac{b}{2a}]$ یا هر زیرمجموعه‌ای از این بازه‌ها محدود شود، تابع حاصل یک‌به‌یک می‌شود. برای سهولت کافی است دامنهٔ تابع را به بازهٔ $[-\frac{b}{2a},+\infty)$ محدود کنیم.

مثال دامنهٔ تابع $f(x)=x^2-2x+5$ را به گونه‌ای محدود کنید که تابع حاصل یک‌به‌یک باشد و سپس ضابطهٔ وارون آن را به دست آورید.

✓ **پاسخ:** طبق نکتهٔ قبل، کافی است دامنهٔ تابع را به بازهٔ $[-\frac{b}{2a},+\infty)$ محدود کنیم تا تابع f در این بازه یک‌به‌یک شود:

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{2\times1} \Rightarrow x=1$$

بنابراین دامنهٔ تابع را به بازهٔ $[1,+\infty)$ محدود می‌کنیم. داریم:

$$f(x)=x^2-2x+5=(x^2-2x+1)+4=(x-1)^2+4$$

$$\Rightarrow f(x)=(x-1)^2+4\,,\ x\geq1$$

به جای $f(x)$، y قرار داده و ضابطهٔ وارون آن را می‌یابیم:

$$y=(x-1)^2+4 \Rightarrow (x-1)^2=y-4$$

$$\xrightarrow{\sqrt{\ }} |x-1|=\sqrt{y-4}$$

$$\xrightarrow{x\geq1} x-1=\sqrt{y-4} \Rightarrow x=1+\sqrt{y-4}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=1+\sqrt{x-4}$$

نکته اگر f تابعی وارون‌پذیر و f^{-1} وارون آن باشد، آن‌گاه:

۱) نمودارهای f و f^{-1} نسبت به نیمساز ربع اول و سوم $(y=x)$ قرینهٔ یکدیگرند.

۲) $D_f=R_{f^{-1}}$ و $R_f=D_{f^{-1}}$

۳) $f(a)=b \Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$

مثال اگر $f(x)=3x-1$ و $g(x)=2x^3+1$ باشد، مطلوب است محاسبهٔ:

الف) $f^{-1}(5)$

ب) $(f^{-1}og^{-1})(17)$

✓ **پاسخ:** می‌دانیم اگر $f^{-1}(b)=a$، آن‌گاه $f(a)=b$. پس:

الف) $f^{-1}(5)=x \Rightarrow f(x)=5 \Rightarrow 3x-1=5 \Rightarrow 3x=6$

$$\Rightarrow x=2 \Rightarrow f^{-1}(5)=2$$

ب) می‌دانیم $(f^{-1}og^{-1})(17)=f^{-1}(g^{-1}(17))$، پس داریم:

$$g^{-1}(17)=x \Rightarrow g(x)=17 \Rightarrow 2x^3+1=17 \Rightarrow 2x^3=16$$

$$\Rightarrow x^3=8 \Rightarrow x=2 \Rightarrow g^{-1}(17)=2$$

$$f^{-1}og^{-1}(17)=f^{-1}(g^{-1}(17))=f^{-1}(2)=x \Rightarrow f(x)=2$$

$$\Rightarrow 3x-1=2 \Rightarrow 3x=3 \Rightarrow x=1 \Rightarrow f^{-1}(2)=1$$

$$\Rightarrow f^{-1}og^{-1}(17)=1$$

پاسخ سؤالات

۱۰۷. درست

۱۰۸. نادرست. زیرا:

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(-\frac{2x+7}{6})=-\frac{7}{2}(-\frac{2x+7}{6})-3\neq x$$

۱۰۹. نادرست. زیرا به طور مثال اگر $f=\{(1,2)\}$، آن‌گاه $f^{-1}=\{(2,1)\}$، $f^{-1}of=\{(1,1)\}$ و $fof^{-1}=\{(2,2)\}$ در نتیجه $fof^{-1}\neq f^{-1}of$.

۱۱۰. درست

۱۱۱. نادرست. زیرا باید داشته باشیم: $f^{-1}(25)=2 \Rightarrow f(2)=25$ اما $f(2)=23$ است.

۱۱۲. نادرست

$$y=x^2 \xrightarrow{\sqrt{\ }} \sqrt{y}=|x| \xrightarrow{x\leq0} \sqrt{y}=-x$$

$$\Rightarrow x=-\sqrt{y} \Rightarrow f^{-1}(x)=-\sqrt{x}$$

۱۱۳. ۲

۱۱۴. $g^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-1}$ زیرا:

$$y=x^3+1 \Rightarrow x^3=y-1 \xrightarrow{\sqrt[3]{\ }} x=\sqrt[3]{y-1}$$

$$\Rightarrow g^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-1}$$

۱۱۵. ۲−، زیرا:

$$f^{-1}(-17)=x \Rightarrow f(x)=-17 \Rightarrow 7x-3=-17$$

$$\Rightarrow 7x=-14 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow f^{-1}(-17)=-2$$

۱۱۶. ۱، زیرا:

$$g^{-1}(9)=x \Rightarrow g(x)=9 \Rightarrow x^3+1=9 \Rightarrow x^3=8 \Rightarrow x=2$$

$$f^{-1}(g^{-1}(9))=f^{-1}(2)=x \Rightarrow f(x)=2 \Rightarrow 5x-3=2$$

$$\Rightarrow 5x=5 \Rightarrow x=1$$

۱۱۷. $f(x)=-\sqrt{x-4}$ زیرا:

$$y=x^2+4 \Rightarrow y-4=x^2 \xrightarrow{\sqrt{\ }} \sqrt{y-4}=|x|$$

$\xrightarrow{x\le ۰} \sqrt{y-۴}=-x \Rightarrow x=-\sqrt{y-۴}$

$\Rightarrow f^{-۱}(x)=-\sqrt{x-۴}$

۱۱۸. $y=-\frac{۷}{۲}x-۳ \Rightarrow y+۳=-\frac{۷}{۲}x$

$\xrightarrow{\times(-\frac{۲}{۷})} -\frac{۲}{۷}y-\frac{۶}{۷}=x \Rightarrow f^{-۱}(x)=-\frac{۲}{۷}x-\frac{۶}{۷}$

۱۱۹. $y=-۵-\sqrt{۳x+۱} \Rightarrow \sqrt{۳x+۱}=-۵-y$

$\xrightarrow{\text{توان ۲}} ۳x+۱=(-۵-y)^۲$

$\xrightarrow{(-u)^۲=u^۲} ۳x+۱=(y+۵)^۲ \Rightarrow ۳x=(y+۵)^۲-۱$

$\Rightarrow x=\frac{۱}{۳}((y+۵)^۲-۱) \Rightarrow g^{-۱}(x)=\frac{۱}{۳}((x+۵)^۲-۱)$

۱۲۰. $f(x)=\sqrt{x+۳} \Rightarrow x+۳\ge ۰ \Rightarrow x\ge -۳$

$\Rightarrow D_f=[-۳,+\infty)$

از طرفی همواره داریم $\sqrt{x+۳}\ge ۰$، پس $f(x)\ge ۰$ یعنی $R_f=[۰,+\infty)$.

حال وارون تابع f را می‌یابیم:

$y=\sqrt{x+۳} \xrightarrow{\text{توان ۲}} y^۲=x+۳ \Rightarrow x=y^۲-۳$

$\Rightarrow f^{-۱}(x)=x^۲-۳$

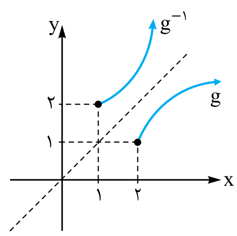
می‌دانیم $D_f=R_{f^{-۱}}$ و $R_f=D_{f^{-۱}}$، بنابراین $D_{f^{-۱}}=R_f=[۰,+\infty)$ و $R_{f^{-۱}}=D_f=[-۳,+\infty)$

۱۲۱. الف) $y=۱+\sqrt{x-۲} \Rightarrow y-۱=\sqrt{x-۲}$

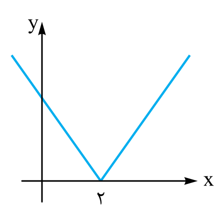
$\xrightarrow{\text{توان ۲}} (y-۱)^۲=x-۲ \Rightarrow x=(y-۱)^۲+۲$

$\Rightarrow g^{-۱}(x)=(x-۱)^۲+۲$

ب) برای رسم نمودار $g(x)=۱+\sqrt{x-۲}$، کافی است نمودار $y=\sqrt{x}$ را دو واحد به راست و یک واحد به بالا منتقل کنیم. این نمودار را رسم کرده و قرینهٔ آن را نسبت به نیمساز ربع اول و سوم رسم می‌کنیم تا نمودار وارون آن نیز به دست آید:



۱۲۲. نمودار تابع f به صورت مقابل است:

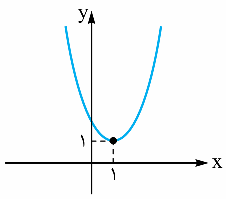


اگر دامنهٔ تابع را به یکی از بازه‌های $[۲,+\infty)$ یا $(-\infty,۲]$ یا زیرمجموعه‌های آن‌ها محدود کنیم، تبدیل به تابع یک‌به‌یک می‌شود. با فرض این‌که دامنه را به بازهٔ $[۲,+\infty)$ محدود کرده باشیم، داریم: $f(x)=|x-۲| \overset{x\ge ۲}{=} x-۲$

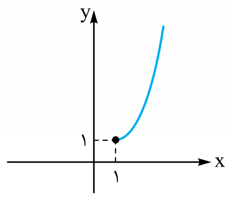
$y=x-۲ \Rightarrow x=y+۲ \Rightarrow f^{-۱}(x)=x+۲$

۱۲۳. $h(x)=x^۲-۲x+۲=(x^۲-۲x+۱)+۱=(x-۱)^۲+۱$

نمودار تابع h یک سهمی به صورت مقابل است:



با توجه به نمودار، برای این‌که تابع h یک‌به‌یک باشد، کافی است دامنهٔ تابع را به یکی از بازه‌های $[۱,+\infty)$ یا $(-\infty,۱]$ یا زیرمجموعه‌ای از آن‌ها محدود کنیم. برای راحتی کار، دامنه را به بازهٔ $[۱,+\infty)$ محدود می‌کنیم. در این حالت نمودار به صورت مقابل درمی‌آید:



با توجه به نمودار، داریم: $D_h=[۱,+\infty) , R_h=[۱,+\infty)$

ضابطهٔ وارون آن را می‌یابیم: $y=(x-۱)^۲+۱ \Rightarrow (x-۱)^۲=y-۱$

$\xrightarrow{\sqrt{\ }} |x-۱|=\sqrt{y-۱} \xrightarrow{x\ge ۱} x-۱=\sqrt{y-۱}$

$\Rightarrow x=\sqrt{y-۱}+۱ \Rightarrow h^{-۱}(x)=\sqrt{x-۱}+۱$

۱۲۴. می‌دانیم شرط آن‌که دو تابع f و g وارون یکدیگر باشند، آن است که $(fog)(x)=x$. بنابراین باید $(fog)(x)$ را تشکیل دهیم و نشان دهیم بعد از ساده‌شدن به x تبدیل می‌شود.

$f(x)=۳x-۴$ و $g(x)=\frac{x+۴}{۳}$

$\Rightarrow (fog)(x)=f(g(x))=f(\frac{x+۴}{۳})=۳(\frac{x+۴}{۳})-۴$

$=(x+۴)-۴=x$

بنابراین توابع f و g وارون یکدیگرند.

۱۲۵. باید نشان دهیم $(fog)(x)=x$.

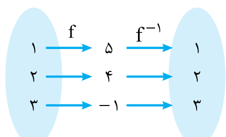
$(fog)(x)=f(g(x))=f(۸+x^۲)=-\sqrt{(۸+x^۲)-۸}=-\sqrt{x^۲}$

$=-|x| \overset{x\le ۰}{=} -(-x)=x$

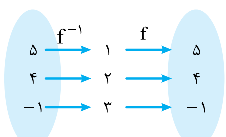
پس f و g وارون یکدیگر هستند.

۱۲۶.

$f=\{(۱,۵),(۲,۴),(۳,-۱)\} \Rightarrow f^{-۱}=\{(۵,۱),(۴,۲),(-۱,۳)\}$



$\Rightarrow f^{-۱}of=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳)\}$



$\Rightarrow fof^{-۱}=\{(۵,۵),(۴,۴),(-۱,-۱)\}$

اگرچه هر دو تابع $f^{-1}of$ و fof^{-1} همانی هستند ولی با همدیگر برابر نیستند.

در واقع داریم: $(f^{-1}of)(x)=x \;;\; x\in D_f$

$$(fof^{-1})(x)=x \;;\; x\in D_{f^{-1}}$$

۱۲۷. می‌دانیم $(g^{-1}of^{-1})(۵)=g^{-1}(f^{-1}(۵))$. بنابراین:

$$f^{-1}(۵)=x \Rightarrow f(x)=۵ \Rightarrow \frac{۱}{۸}x-۳=۵ \Rightarrow \frac{۱}{۸}x=۸$$

$$\Rightarrow x=۶۴ \Rightarrow f^{-1}(۵)=۶۴ \Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(۵))=g^{-1}(۶۴)$$

$$g^{-1}(۶۴)=x \Rightarrow g(x)=۶۴ \Rightarrow x^{۳}=۶۴ \Rightarrow x=۴$$

$$\Rightarrow (g^{-1}of^{-1})(۵)=۴$$

۱۲۸.

$$f^{-1}og^{-1}(۳)=f^{-1}(g^{-1}(۳))$$

$$g^{-1}(۳)=x \Rightarrow g(x)=۳ \Rightarrow \sqrt{x+۱۷}=۳ \Rightarrow x+۱۷=۹$$

$$\Rightarrow x=-۸ \Rightarrow g^{-1}(۳)=-۸$$

حال باید $f^{-1}(g^{-1}(۳))=f^{-1}(-۸)$ را بیابیم:

$$f^{-1}(-۸)=x \Rightarrow f(x)=-۸ \Rightarrow \frac{۱}{۵}x-۳=-۸ \Rightarrow \frac{۱}{۵}x=-۵$$

$$\Rightarrow x=-۲۵ \Rightarrow f^{-1}(۸)=-۲۵ \Rightarrow f^{-1}og^{-1}(۳)=-۲۵$$

۱۲۹. الف) ۱) با توجه به نمودار، معلوم می‌شود که $f(-۱)=۱$ و $g(۱)=-۵$.

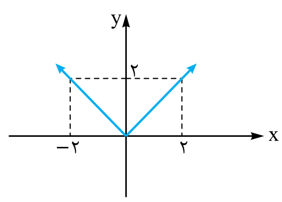
پس: $(gof)(-۱)=g(f(-۱))=g(۱)=-۵$

۲) با توجه به نمودار، $f(۰)=۲$، پس $f^{-1}(۲)=۰$ و همچنین $g(-۴)=۰$، پس $g^{-1}(۰)=-۴$.

بنابراین: $(g^{-1}of^{-1})(۲)=g^{-1}(f^{-1}(۲))=g^{-1}(۰)=-۴$

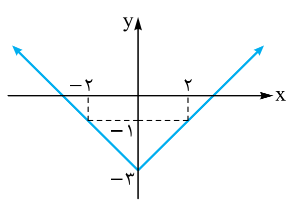
ب) برای رسم نمودار تابع $y=f(x-۲)-۳$، کافی است ابتدا نمودار $y=f(x)$ را دو واحد به راست و سپس ۳ واحد به پایین منتقل کنیم:

$\xrightarrow{\text{نمودار f، ۲ واحد راست}}$



$y=f(x-۲)$

$\xrightarrow{\text{۳ واحد پایین}}$



$y=f(x-۲)-۳$

۱۳۰.

$$(fog)^{-1}(۱)=x \Rightarrow (fog)(x)=۱ \Rightarrow f(g(x))=۱$$

$$\Rightarrow f(x^{۳})=۱ \Rightarrow \frac{۱}{۲۵}x^{۳}-۴=۱ \Rightarrow \frac{۱}{۲۵}x^{۳}=۵$$

$$\Rightarrow x^{۳}=۲۵\times۵ \Rightarrow x^{۳}=۱۲۵ \Rightarrow x=۵ \Rightarrow (fog)^{-1}(۱)=۵$$