مقدمه مولّف

در ابتدا و قبل از هر کلام، از خداوند مهربان سپاس‌گزارم که مرا یاری کرد تا از علم اندک خود بهره بگیرم و توانم را در جهت خدمت به دانش‌آموزان دوست‌داشتنی و پرتلاش سرزمین عزیزم صرف کنم.

نتیجهٔ این تلاش، کتاب حاضر است. کتاب «بانک نهایی حسابان» که با رویکرد جدید نسبت به امتحانات نهایی و ارزش‌یابی مفهومی و سنجش قدرتِ تحلیل و استنباط دانش‌آموزان، تألیف شده است.

امیدوارم، پس از مطالعهٔ درس‌نامه و حل سؤالات متنوع این کتاب، لذت‌بردن شما از درس حسابان چندین برابر شود و در نتیجهٔ آن با اعتماد به نفس واقعی، فقط به نمرهٔ بیست فکر کنید!

بعضی از ویژگی‌های این کتاب عبارت‌اند از:

۱ پوشش کامل فعالیت‌ها، مثال‌ها، کار در کلاس‌ها و تمرین‌های کتاب درسی

۲ درس‌نامهٔ مختصر اما بسیار مفید، کامل و قابل درک همراه با مثال

۳ پاسخ‌های کاملاً تشریحی و مطابق با راه حل‌های کتاب درسی

۴ طراحی سؤالات به سبک نهایی و کمی سطح بالاتر برای آمادگی بیشتر شما

۵ چیدمان سؤالات به ترتیب از ساده به دشوار برای تسلط بیشتر

۶ ارائهٔ چند دوره امتحان نهایی به همراه پاسخ کامل و توضیحات لازم

۷ ارائهٔ بارم‌بندی برای هر فصل و ریزبارم در پاسخ‌نامهٔ امتحانات

این ویژگی‌های خوب و منحصر به فرد نتیجهٔ کار با یک تیم توانمند است.

بنابراین تشکر و قدردانی می‌کنم از:

- جناب آقای کمیل نصری، مدیر محترم مجموعهٔ خیلی‌سبز
- جناب آقای احمد علی‌نژاد، مدیر تألیف پرتوان و مستعد انتشارات
- سرکار خانم مریم بیوک‌زاده و مرضیه رضایت که زحمت ویراستاری علمی و ادبی کتاب را کشیدند.

ایمان اردستانی

فهرست مطالب

	سؤال	درسنامه + پاسخ
فصل اول: جبر و معادله		
درس ۱ـ قسمت اول: مجموع جملات دنبالهٔ هندسی	۵	۴۵
درس ۱ـ قسمت دوم: مجموع جملات دنبالهٔ هندسی	۶	۴۶
درس ۲ـ قسمت اول: روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم	۶	۴۹
درس ۲ـ قسمت دوم: صفرهای تابع و روش هندسی حل معادلات	۷	۵۱
درس ۳ـ معادلات گویا و گنگ	۹	۵۶
درس ۴ـ قدرمطلق و ویژگی‌های آن	۱۰	۵۹
درس ۵ـ آشنایی با هندسهٔ تحلیلی	۱۲	۶۵
فصل دوم: تابع		
درس ۱ و ۲: آشنایی بیشتر با تابع و انواع آن	۱۴	۷۱
درس ۳: وارون تابع	۱۷	۷۹
درس ۴: اعمال روی توابع	۱۸	۸۳
فصل سوم: توابع نمایی و لگاریتمی		
درس ۱: تابع نمایی	۲۱	۸۸
درس ۲: تابع لگاریتمی و لگاریتم	۲۲	۹۲
درس ۳: ویژگی‌های لگاریتم و حل معادله‌های لگاریتمی	۲۴	۹۵
فصل چهارم: مثلثات		
درس ۱: رادیان	۲۶	۹۹
درس ۲: نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا	۲۸	۱۰۲
درس ۳: توابع مثلثاتی	۲۹	۱۰۶
درس ۴: روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا	۳۱	۱۱۲
فصل پنجم: حد و پیوستگی		
درس ۱: مفهوم حد و فرایندهای حدی	۳۳	۱۱۵
درس ۲: حدهای یک‌طرفه (حدهای چپ و راست)	۳۵	۱۱۹
درس ۳: قضایای حد	۳۷	۱۲۲
درس ۴: محاسبهٔ حد توابع کسری در حالت $\frac{0}{0}$ (صفرصفرم)	۳۹	۱۲۶
درس ۵: پیوستگی	۴۱	۱۳۰
ضمیمه: امتحانات شبیه‌ساز نهایی		
امتحان شمارهٔ ۱: نوبت اول (میان‌سال)	۱۳۸	۱۴۵
امتحان شمارهٔ ۲: نوبت اول (میان‌سال)	۱۳۹	۱۴۶
امتحان شمارهٔ ۳: نهایی خرداد ۱۴۰۲ (نوبت صبح)	۱۴۰	۱۴۷
امتحان شمارهٔ ۴: نهایی خرداد ۱۴۰۲ (نوبت عصر)	۱۴۱	۱۴۸
امتحان شمارهٔ ۵: نهایی خرداد ۱۴۰۲ (غایبین موجه)	۱۴۲	۱۵۰
امتحان شمارهٔ ۶: نهایی شهریور ۱۴۰۲	۱۴۳	۱۵۱

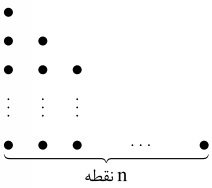
فصل ۱ جبر و معادله

درس ۱ قسمت اول: مجموع جملات دنبالهٔ حسابی

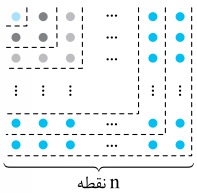
صفحه ۱ تا ۴ کتاب درسی

درس‌نامهٔ ۱ - قسمت اول را در صفحهٔ ۴۵ ببینید.

۱- مجموع اعداد طبیعی ۱ تا n را با توجه به شکل (بدون استفاده از فرمول S_n) به دست آورید. (فعالیت کتاب درسی)



۲- با استفاده از شکل مقابل حاصل عبارت زیر را به دست آورید. (تمرین کتاب درسی)



$$۱+۳+۵+\cdots+(۲n-۱)=?$$

۳- مجموع جملات دنبالهٔ حسابی $-۴,-۱,۲,\ldots,۲۹۳$ را به دست آورید.

۴- مجموع همهٔ اعداد طبیعی دورقمی مضرب ۳ را به دست آورید. (مشابه تمرین و کار در کلاس کتاب درسی)

۵- مجموع همهٔ اعداد طبیعی ۳رقمی که در تقسیم بر ۵ باقی‌ماندهٔ ۲ دارند را به دست آورید.

۶- مجموع اعداد فرد طبیعی بزرگ‌تر از ۵۱ و کوچک‌تر از ۵۰۱ که در تقسیم بر ۳ باقی‌ماندهٔ ۲ می‌دهند را به دست آورید.

۷- مجموع چهل جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول ۵، برابر ۲۵۴۰ است. قدرنسبت دنباله را به دست آورید.

۸- در دنبالهٔ حسابی $۳,۹,۱۵,\ldots$، حداقل چند جمله (با شروع از جملهٔ اول) را با هم جمع کنیم تا حاصل از ۶۰۰ بیشتر شود. (مشابه تمرین کتاب درسی)

۹- مجموع چند جمله (شروع از جملهٔ اول) از دنبالهٔ حسابی $-۲,۲,۶,\ldots$، از جملهٔ چهل و یکم آن دو واحد بیشتر است؟

۱۰- در یک دنبالهٔ حسابی جملهٔ سوم برابر ۱۵- و مجموع ۱۳ جملهٔ اول این دنباله برابر ۶۵ است. قدرنسبت دنباله را به دست آورید.

۱۱- در چهل جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی، مجموع جملات با شماره‌های فرد ۱۷۰ و مجموع جملات با شماره‌های زوج ۲۱۰ است، جملهٔ اول و قدرنسبت دنباله را مشخص کنید. (مشابه تمرین کتاب درسی)

۱۲- در یک دنبالهٔ حسابی مجموع ۶ جملهٔ اول، ۱/۵ برابر مجموع ۸ جملهٔ اول است. مجموع چند جملهٔ اول این دنباله برابر صفر است؟

۱۳- اگر $S_n=۲n^۲+n$، مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی باشد، مطلوبست:

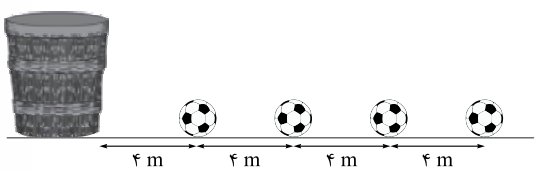
الف) قدرنسبت دنباله ب) مجموع جملات چهارم تا دهم دنباله

۱۴- ثابت کنید مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی از رابطهٔ $S_n=\frac{n}{۲}(۲a+(n-۱)d)$ به دست می‌آید. (فعالیت کتاب درسی)

۱۵- نشان دهید در یک دنبالهٔ حسابی اگر $a_۱$ و a_n به ترتیب جملات اول و آخر دنباله باشند، آن‌گاه: $S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)$.

۱۶- روی محیط دایره‌ای ۳۰ نقطهٔ متمایز قرار دارد. از هر نقطه به نقاط دیگر وصل می‌کنیم. تعداد کل وترهای تشکیل‌شده را به دست آورید.

۱۷- در یک مسابقه تعداد زیادی توپ روی یک خط مستقیم و هر یک به فاصلهٔ ۴ متر از هم قرار دارند. مطابق شکل فاصلهٔ توپ اول تا سبد نیز ۴ متر است. دونده‌ای از کنار سبد شروع به دویدن کرده و توپ اول را برمی‌دارد و تا سبد حمل می‌کند و آن را به سبد می‌اندازد و سپس برای توپ‌های بعدی نیز این کار را ادامه می‌دهد. اگر او در پایان مسابقه ۱۶۸۰ متر دویده باشد، او چند توپ به سبد انداخته است؟ (مشابه مثال کتاب درسی)



درس ۱ قسمت دوم: مجموع جملات دنبالهٔ هندسی

صفحه ۴ تا ۶ کتاب درسی

درس‌نامهٔ ۱ - قسمت دوم را در صفحهٔ ۴۶ ببینید.

مجموع ۱۰ جملهٔ اول دنباله‌های هندسی زیر را به دست آورید. (مشابه کار در کلاس کتاب درسی)

۱۸- $-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۴},-\frac{۱}{۸},\dots$

۱۹- $\frac{۱}{\sqrt{۲}},\sqrt{۲},\dots$

۲۰- اگر $a_n=۳^{n-۱}$، جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ هندسی باشد، مجموع چند جملهٔ اول این دنباله برابر ۱۲۱ است؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)

۲۱- مجموع چند جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی $\frac{۲}{۱۱},\frac{۴}{۱۱},\dots$ با مجموع ۵ جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی $۶,۱۲,\dots$ برابر است؟

۲۲- مجموع شش جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی ۶۵ برابر مجموع سه جملهٔ اول آن است. قدرنسبت دنباله را به دست آورید.

۲۳- در یک دنبالهٔ هندسی جملهٔ هفتم ۵ برابر جملهٔ سوم است. مجموع ۱۲ جملهٔ اول آن چند برابر مجموع ۸ جملهٔ اول آن است؟

۲۴- حداقل چند جمله از دنبالهٔ هندسی $\frac{۱}{۲۰},\frac{۱}{۵},\dots$ را با هم جمع کنیم تا حاصل از ۳۰ بیشتر شود؟

۲۵- در یک دنبالهٔ هندسی که ۲۰ جمله دارد، مجموع جملات با شماره‌های فرد $\frac{۱}{۵}$ مجموع همهٔ جملات است. قدرنسبت را به دست آورید.

۲۶- ثابت کنید مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $a_۱$ و قدرنسبت q از رابطهٔ $S_n=\frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q}$ به دست می‌آید. $(q\neq ۱)$ (فعالیت کتاب درسی)

۲۷- برای عدد حقیقی a $(a\neq ۱)$ و عدد طبیعی n؛ (تمرین کتاب درسی)

الف) حاصل عبارت مقابل را به دست آورید. $۱+a+a^۲+\dots+a^{n-۱}$

ب) با استفاده از قسمت (الف) نتیجه بگیرید که: $a^n-۱=(a-۱)(a^{n-۱}+\dots+a^۲+a+۱)$

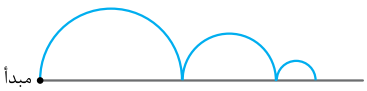
۲۸- شخصی در خانهٔ اول یک صفحهٔ شطرنجی ۴×۴، ۱ دانه گندم، در خانهٔ دوم، ۲ دانه گندم و به همین صورت در هر خانه، ۲ برابر خانهٔ قبلی گندم قرار می‌دهد. اگر وزن هر دانهٔ گندم یک گرم باشد، او در مجموع تقریباً چند کیلوگرم گندم دارد؟ (مشابه کار در کلاس کتاب درسی)

۲۹- توپی را از هر ارتفاعی رها کنیم، پس از برخورد با زمین، به اندازهٔ ۲۵ درصد ارتفاع قبلی خود بالا می‌رود. اگر این توپ را از زمین به هوا پرتاب کنیم تا به ارتفاع ۵۰متری برسد، این توپ در لحظهٔ پنجمین برخورد به زمین، در مجموع چه مسافتی را طی کرده است؟ (مشابه مثال کتاب درسی)

۳۰- طول ضلع مربعی یک متر است. ابتدا نیمی از مساحت مربع را رنگ می‌کنیم، سپس نیمی از مساحت باقی‌مانده را و به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی‌مانده از قبل را رنگ می‌کنیم؛ پس از دست کم چند مرحله حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ شده است؟ (تمرین کتاب درسی)

۳۱- وسط اضلاع مربعی به ضلع ۴ واحد را به هم وصل می‌کنیم تا مربع جدیدی ایجاد شود، سپس این کار را متوالیاً ادامه می‌دهیم تا مربع‌های کوچک‌تری ایجاد شود. حداقل این کار را چند بار انجام دهیم تا مجموع مساحت همهٔ مربع‌های ایجادشده از ۹۹/۵ درصد محیط مربع اولیه بزرگ‌تر باشد؟

۳۲- مطابق شکل، مورچه‌ای روی نیم‌دایره‌ای حرکت می‌کند که مساحت اولین نیم‌دایره ۸π است. بعد از هر بار رسیدن مورچه به زمین، مساحت نیم‌دایرهٔ بعدی $\frac{۳}{۴}$ کاهش پیدا می‌کند. بعد از حداقل چندمین رسیدن مورچه به زمین بعد از شروع حرکت، فاصلهٔ مورچه تا مبدأ حرکت بیشتر از ۱۵/۹۸ است؟



۳۳- حاصل عبارت $A=\frac{۱+t+t^۲+\dots+t^{۱۹}}{۱+t^۲+t^۴+\dots+t^{۱۸}}$ به ازای $t=\sqrt{۳}-۱$ را به دست آورید.

۳۴- حاصل $A=\frac{۲-۴+۸-۱۶+\dots-۱۰۲۴}{۱+۴+۷+۱۰+\dots+۵۸}$ را به دست آورید.

درس ۲ قسمت اول: روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم

صفحه ۷ تا ۹ کتاب درسی

درس‌نامهٔ ۲ - قسمت اول را در صفحهٔ ۴۹ ببینید.

درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید.

۳۵- مجموع ریشه‌های معادلهٔ $۵x^۲-۳x-۱=۰$، سه برابر حاصل‌ضرب ریشه‌های آن است.

۳۶- مستطیلی که محیط و مساحت آن ۶ باشد، وجود ندارد.

۳۷- دو عدد که مجموع آن‌ها ۵ و حاصل‌ضرب آن‌ها ۳ باشد، ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲-۱۰x+۶=۰$ هستند.

جاهای خالی را پر کنید:

۳۸- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-x-۴=۰$ باشند، مجموع معکوس ریشه‌ها برابر ..... است.

۳۹- مجموع ریشه‌های معادلهٔ $x^۲(x+۱)=x^۳-x+۳$ برابر ..... است.

۴۰- اگر m برابر ..... باشد، مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $2x^2+3mx+m-2=0$ با هم برابرند.

۴۱- مقدار m را طوری به دست آورید که مجموع ریشه‌های معادلهٔ $3x^2-(3m+1)x-m^2=0$، دو برابر حاصل‌ضرب آن‌ها باشد.

۴۲- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-3x+1=0$ باشند، حاصل عبارات خواسته‌شده را به دست آورید.

الف) $\alpha^2+\beta^2$ ب) $\alpha^3+\beta^3$ پ) $\frac{1}{\beta-1}+\frac{1}{\alpha-1}$

۴۳- α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-mx-1=0$ هستند. $(m\neq 0)$

مقدار m را طوری بیابید که $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=2m-m^2$ باشد.

۴۴- در معادلهٔ $2x^2+(6k-1)x-3k=0$، مقدار k را طوری بیابید که:

الف) ریشه‌های معادله قرینهٔ هم باشند. ب) ریشه‌های معادله معکوس هم باشند.

۴۵- اگر یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x^2-6x+m-1=0$، دو برابر ریشهٔ دیگر باشد، مقدار m را به دست آورید.

۴۶- α و β با شرط $\alpha>\beta$ ریشه‌های معادلهٔ $3x^2-12x+m^2=0$ هستند. اگر اختلاف α و β، دو واحد باشد، مقادیر m را به دست آورید.

۴۷- یکی از ریشه‌های معادلهٔ $3x^2-mx=24$، مربع ریشهٔ دیگر آن است. مقدار m را به دست آورید.

۴۸- معادلهٔ درجه‌دومی تشکیل دهید که اعداد $2\sqrt{2}-3$ و $2\sqrt{2}+3$ ریشه‌های آن باشند. (مشابه تمرین کتاب درسی)

۴۹- معادلهٔ درجه‌دومی تشکیل دهید که یکی از ریشه‌های آن، سه برابر ریشهٔ دیگر آن باشد. چند معادله با این ویژگی وجود دارد؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)

۵۰- اگر مجموع دو عدد $\frac{11}{6}$ و حاصل‌ضرب آن‌ها $-\frac{1}{3}$ باشد، اختلاف این دو عدد را بیابید.

۵۱- اضلاع مستطیلی را به دست آورید که محیط و مساحت آن به ترتیب ۱۲ و ۴ باشند. (مشابه مثال کتاب درسی)

۵۲- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-2x-4=0$ باشند، معادلهٔ درجه‌دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن 2α و 2β باشد.

۵۳- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم $3x^2-x-5=0$ باشند، معادلهٔ درجه‌دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن معکوس ریشه‌های معادلهٔ داده‌شده باشند.

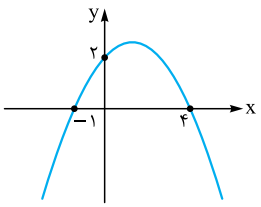
درس ۲ قسمت دوم: صفرهای تابع و روش هندسی حل معادلات

صفحه ۱۰ تا ۱۲ کتاب درسی

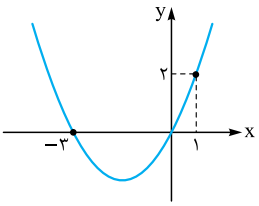
درس‌نامهٔ ۲ - قسمت دوم را در صفحهٔ ۵۱ ببینید.

ضابطهٔ سهمی‌های زیر که به صورت $y=ax^2+bx+c$ است را مشخص کنید. (مشابه مثال کتاب درسی)

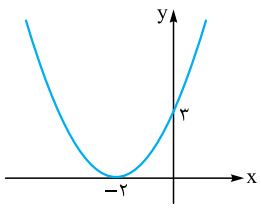
۵۴-



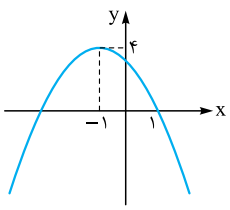
۵۵-



۵۶-

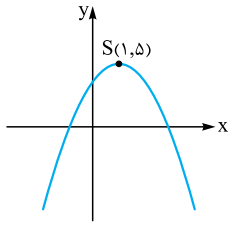


۵۷-

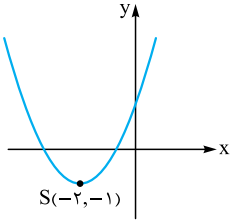


مختصات رأس هر یک از سهمی‌های زیر با ضابطهٔ کلی $y=ax^2+bx+c$ با شرط $|a|=1$ داده شده است. ضابطهٔ تابع را مشخص کنید و صفرهای تابع را در صورت وجود به دست آورید. (مشابه تمرین کتاب درسی)

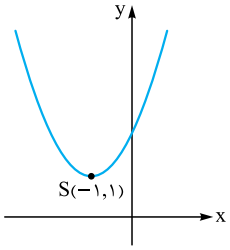
۵۸-



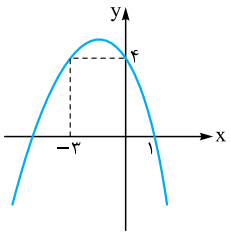
۵۹-



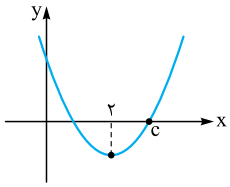
۶۰-



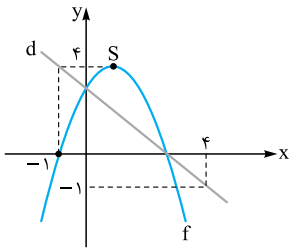
۶۱- شکل مقابل، نمودار سهمی $f(x)=ax^2+bx+c$ است، ضابطهٔ سهمی و ماکزیمم آن را به دست آورید.



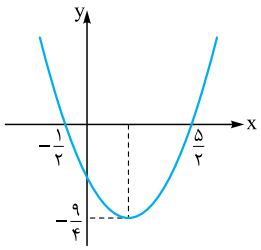
۶۲- شکل مقابل، نمودار سهمی $y=x^2+bx+c$ است. صفرهای تابع را به دست آورید.



۶۳- سهمی f و خط d روی محورهای مختصات متقاطع هستند. ضابطهٔ تابع f را به دست آورید.

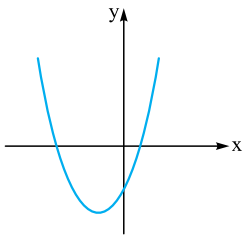


۶۴- ضابطهٔ سهمی مقابل را به دست آورید.

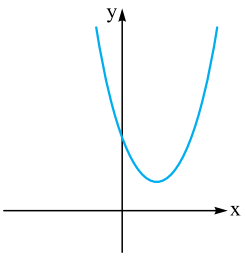


هر یک از شکل‌های زیر نمودار یک سهمی به معادلهٔ کلی $f(x)=ax^2+bx+c$ است. در هر مورد علامت a، b، c و علامت صفرهای تابع را (در صورت وجود) تعیین کنید. (کار در کلاس کتاب درسی)

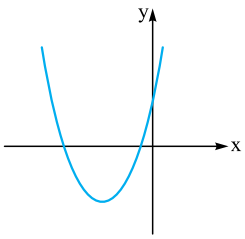
۶۵-



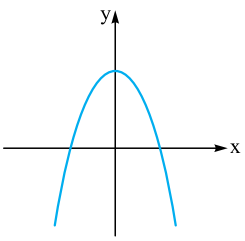
۶۶-



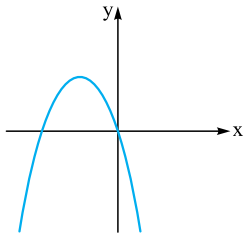
۶۷-



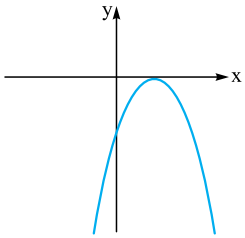
۶۸-



۶۹-



۷۰-



معادلات زیر را در نظر بگیرید. بدون حل آن‌ها و با استفاده از Δ ، S (مجموع ریشه‌ها) و P (حاصل‌ضرب ریشه‌ها)، تعداد و علامت ریشه‌های معادله را مشخص کنید.

۷۱- $2x^2+5x+1=0$ ۷۲- $3x^2+2x-2=0$ (مشابه فعالیت کتاب درسی)

۷۳- $9x^2+12x+4=0$ ۷۴- $-x^2+3x-1=0$

۷۵- اگر $x=1$ یکی از صفرهای تابع $f(x)=2x^3+2mx^2-3x-3m$ باشد. صفرهای دیگر تابع را در صورت وجود به دست آورید. (مشابه کار در کلاس کتاب درسی)

۷۶- نمودار تابع $f(x)=x^3-kx^2-3x+p$، محورهای مختصات را در نقاطی به طول -2 و عرض ۲ قطع می‌کند. صفرهای تابع $f(x)$ را به دست آورید.

صفرهای توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید. (مشابه تمرین کتاب درسی)

۷۷- $f(x)=x^3-4x^2+x$ ۷۸- $g(x)=x^4-8x$

۷۹- $k(x)=2x^3+2x^2+5x$ ۸۰- $h(x)=(x-1)(x^2+1)-(x-1)^3$

معادلات زیر را حل کنید. (مشابه تمرین کتاب درسی)

۸۱- $4x^4-13x^2+9=0$ ۸۲- $x^6-6x^3-16=0$

۸۳- $(\frac{x^2}{5}+1)^2-7(\frac{x^2}{5}+1)+6=0$ ۸۴- $(3-x^2)^2-9(3-x^2)+14=0$

۸۵- $(x^2-3x)^2+6x-2x^2=8$ ۸۶- $(x^2-2x+1)^2+(x-1)^2=2$

تعداد و مقدار تقریبی ریشه‌های معادلات زیر را با استفاده از روش هندسی به دست آورید. (مشابه تمرین کتاب درسی)

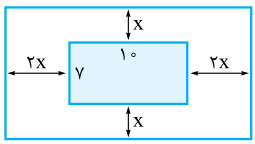
۸۷- $|x-1|=x^2-x-1$ ۸۸- $|x+1|=1-x^2$

۸۹- $(x+1)^2+1=-x$ ۹۰- $-|x-2|+1=x^2$

۹۱- نمودار دو سهمی $f(x)=x^2+mx+2$ و $g(x)=x^2-2x+m+3$ در نقطه‌ای به طول $x=2$ متقاطع هستند. مقدار $f(m)$ را به دست آورید.

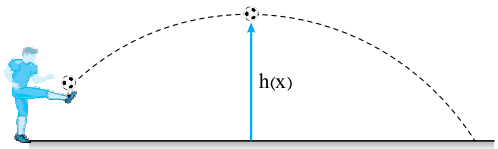
۹۲- اگر x' و x'' صفرهای تابع درجه‌دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ باشند، نشان دهید: $ax^2+bx+c=a(x-x')(x-x'')$

۹۳- مطابق شکل، عکسی به ابعاد ۱۰ و ۷ درون قابی قرار دارد. اگر مساحت قاب ۱۶۰ باشد، مقدار x را به دست آورید. (مشابه تمرین کتاب درسی)



۹۴- طول یک کاشی از ۳ برابر عرض آن ۱ سانتی‌متر بیشتر است. برای کاشی‌کردن دیواری مستطیلی به مساحت ۲۰ متر مربع، ۱۰۰۰ کاشی مصرف شده است. ابعاد کاشی را به دست آورید. (مشابه تمرین کتاب درسی)

۹۵- یک توپ فوتبال بر اثر ضربهٔ بازیکن طبق شکل زیر حرکت می‌کند تا دوباره به زمین بخورد. در هر لحظه ارتفاع توپ از سطح زمین را می‌توانیم با رابطهٔ $h(x)=-0/05x(x-50)$ مدل‌سازی کنیم که x فاصلهٔ افقی توپ از نقطهٔ اولیه است. (x برحسب متر است.) (مشابه تمرین کتاب درسی)



الف) توپ چند متر افقی را طی می‌کند تا دوباره به زمین بخورد؟

ب) توپ حداکثر تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟

۹۶- مجموع پول رضا و نگار ۵۵ تومان است. اگر رضا ۱۰ تومان از پول خود را به نگار بدهد، حاصل‌ضرب پول‌های باقی‌ماندهٔ آن‌ها ۴۵۰ تومان خواهد شد. پول اولیهٔ نگار چه‌قدر بوده است؟

درس ۳ معادلات گویا و گنگ

درس‌نامهٔ ۳ را در صفحهٔ ۵۶ ببینید.
صفحه ۱۷ تا ۲۲ کتاب درسی

معادلات زیر را حل کنید. (مشابه تمرین کتاب درسی)

۹۷- $\frac{1}{x}-2=-x$ ۹۸- $\frac{2}{x}+x=\frac{x^2+1}{x-1}$

۹۹- $\frac{k-1}{2k-k^2}-\frac{k+1}{k}=-2$ ۱۰۰- $\frac{3y+5}{y^2+5y}+\frac{y+4}{y+5}=\frac{y+1}{y}$ (تمرین کتاب درسی)

۱۰۱- $\frac{x}{x^2-4x+3}+\frac{1}{x-x^2}=\frac{x+1}{x^2-3x}$ ۱۰۲- $\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{2}{x-2}=3$ (کار در کلاس کتاب درسی)

۱۰۳- جواب‌های معادلهٔ $\frac{1}{x+2}-\frac{x^2-9x-2}{x^3+8}=\frac{6x}{x^2-2x+4}$ را به دست آورید.

۸۵۱- $f(x)=\begin{cases}\frac{a\sin^{۲}x}{۱-\cos x} & x>۰\\ b-۲ & x=۰\\ \sin(\frac{\pi}{۶}+x)+a & x<۰\end{cases}$ (مشابه تمرین کتاب درسی)

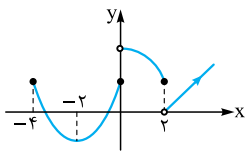
۸۵۲- $f(x)=\begin{cases}\frac{۱-\cos x}{x^{۲}} & x<۰\\ b+۱ & x=۰\\ |x^{۲}+a| & x>۰\end{cases}$ (مشابه تمرین کتاب درسی)

۸۵۳- $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{۱-\cos ۴x}}{a\sin x} & x<۰\\ b[\cos x] & x=۰\\ \frac{\sqrt{۲x+۱}-۱}{x^{۲}+x} & x>۰\end{cases}$

۸۵۴- تابع $f(x)=(۲x-a)[x]+۱$ در $x=۲$ پیوستگی چپ و تابع $g(x)=x^{۲}+b[-x]$ در $x=۱$ پیوستگی راست دارد. مقادیر a و b را به دست آورید.

۸۵۵- تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{|x-۱|[۴x]}{x^{۲}-۱} & x\neq ۱\\ ۲a & x=۱\end{cases}$ در $x=۱$ فقط پیوستگی راست دارد. مقدار a را به دست آورید.

۸۵۶- شکل زیر نمودار تابع f است. درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید. (مشابه کار در کلاس کتاب درسی)



الف) تابع f روی بازهٔ $[-۴,۰]$ پیوسته است.
ب) تابع f روی بازهٔ $(۰,۲)$ پیوسته است.
پ) تابع f روی بازهٔ $[۰,۲)$ پیوسته است.
ت) تابع f روی بازهٔ $(-۲,۲)$ پیوسته است.
ث) تابع f روی بازهٔ $[۲,+\infty)$ پیوسته است.
ج) تابع f روی بازهٔ $(۰,۲]$ پیوسته است.

۸۵۷- نمودار تابع $f(x)=۲-\sqrt{۱-x}$ را رسم کنید و سپس یک بازهٔ بسته را مشخص کنید که f روی آن پیوسته باشد. (مشابه تمرین کتاب درسی)

۸۵۸- پیوستگی تابع $f(x)=[x]$ را در بازهٔ $[۲,۳]$ بررسی کنید. (بدون استفاده از نمودار)

۸۵۹- تابع $y=[x]$ مفروض است: (مشابه تمرین کتاب درسی)
الف) این تابع در بازهٔ $[۱,k)$ پیوسته است، حداکثر مقدار k را به دست آورید.
ب) این تابع در بازهٔ $(m,۱)$ فقط در یک نقطه ناپیوسته است، حداقل m را به دست آورید.

۸۶۰- تابع $y=x[x]$ در بازهٔ $[-۱,k)$ پیوسته است. حداکثر مقدار k را به دست آورید.

۸۶۱- ضابطهٔ تابعی گویا را بنویسید که فقط در دو نقطه در اعداد حقیقی ناپیوسته باشد. (مشابه تمرین کتاب درسی)

۸۶۲- تابع $f(x)=\frac{x+۱}{x^{۲}+ax+b}$ فقط در $x=۱$ و $x=۵$ ناپیوسته است. a و b را به دست آورید.

۸۶۳- تابع $f(x)=\frac{۱}{x^{۲}+mx+۱}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته است. حدود m را به دست آورید.

۸۶۴- تابع $f(x)=\sqrt{x^{۲}+۲x+m}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته است. حدود m را بیابید.

فصل ۱ درس ۱

قسمت اول: مجموع جملات دنبالهٔ حسابی

صفحه ۱ تا ۴ کتاب درسی

یادآوری اگر a_1 جملهٔ اول و d قدرنسبت یک دنبالهٔ حسابی باشند، جملهٔ nام این دنباله (جملهٔ عمومی) برابر است با: $a_n = a_1 + (n-1)d$

مجموع جملات دنبالهٔ حسابی

در دنبالهٔ حسابی، مجموع n جملهٔ اول یعنی $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ را با S_n نمایش می‌دهیم و داریم: $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ یا $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

مثال **در دنبالهٔ حسابی $2,7,12,\ldots$، مجموع بیست جملهٔ اول را به دست آورید.**

پاسخ: در دنبالهٔ بالا $a_1 = 2$ و قدرنسبت $d = 7-2 = 5$ است و می‌خواهیم بیست جملهٔ اول را جمع کنیم، بنابراین:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$\xrightarrow[n=20]{a_1=2,d=5} S_{20} = \frac{20}{2}(2(2) + (20-1)5)$$

$$= 10(4 + 19\times 5) = 10(4+95) = 990$$

مثال **مجموع جملات دنبالهٔ حسابی $1,4,\ldots,46$ را به دست آورید.**

پاسخ: جملهٔ اول دنباله $a_1 = 1$ و $d = 4-1 = 3$ است؛ پس ابتدا تعداد جملات را به دست می‌آوریم:

$$a_n = 46 \Rightarrow a_1 + (n-1)d = 46 \Rightarrow 1 + (n-1)(3) = 46$$

$$\Rightarrow 3n - 2 = 46 \Rightarrow n = 16$$

اکنون داریم:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{16} = \frac{16}{2}(1+46) = 8\times 47 = 376$$

نکته مجموع اعداد طبیعی ۱ تا n: $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

مجموع اعداد فرد طبیعی ۱ تا $2n-1$: $1+3+5+\cdots+2n-1 = n^2$

مجموع اعداد زوج طبیعی ۲ تا $2n$: $2+4+6+\cdots+2n = n(n+1)$

مثال **اگر $A = \frac{1+2+3+\cdots+40}{1+3+\cdots+39}$ و $B = 2+4+\cdots+50$ باشند، حاصل $20A + \frac{B}{25}$ را به دست آورید.**

پاسخ: حاصل صورت و مخرج کسر A را به دست می‌آوریم:

$$S_1 = 1+2+3+\cdots+40 = \frac{40\times 41}{2} = 820$$

$$S_2 = 1+3+\cdots+39 \xrightarrow[n=20]{2n-1=39} S_2 = 20^2 = 400$$

$$\Rightarrow A = \frac{S_1}{S_2} = \frac{820}{400} = \frac{41}{20}$$

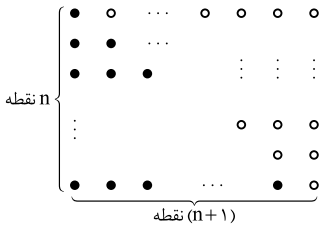
$$B = 2+4+\cdots+50 \xrightarrow[n=25]{2n=50} B = 25\times 26$$

اکنون داریم:

$$20A + \frac{B}{25} = 20\times\frac{41}{20} + \frac{25\times 26}{25} = 41+26 = 67$$

پاسخ سؤالات

۱. در ردیف اول، ۱ نقطه، در ردیف دوم، ۲ نقطه و به همین ترتیب در ردیف nام، n نقطه وجود دارد. اگر مطابق شکل این نقاط را به طور وارونه قرار دهیم (نقطه‌های توخالی)، تعداد کل نقاط توخالی و توپر، برابر $n(n+1)$ نقطه است. بنابراین داریم:



$$\text{تعداد نقطه‌های توپر} = \frac{\text{تعداد کل نقطه‌ها}}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{تعداد نقطه‌های توپر} = 1+2+3+\cdots+n$$

پس مجموع اعداد طبیعی ۱ تا n برابر است با:

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

۲. با توجه به شکل تعداد کل نقاط برابر $n\times n = n^2$ نقطه است.

مشاهده می‌کنیم در مرحلهٔ اول یک نقطه، $(1-1\times 2)$ در مرحلهٔ دوم، ۳ نقطه $(2\times 2-1)$، در مرحلهٔ سوم، ۵ نقطه $(3\times 2-1)$ و در نهایت در مرحلهٔ nام، $2n-1$ نقطه $(n\times 2-1)$ جدا شده است.

مجموع تمام نقاط جداشده در هر مرحله برابر تعداد کل نقاط است؛ بنابراین:

$$1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$$

۳. جملهٔ اول و آخر دنباله مشخص است، کافی است تعداد جملات را به دست آوریم:

$$-4,-1,2,\ldots,293 \Rightarrow a_1 = -4, d = -1-(-4) = 3$$

$$a_n = 293 \Rightarrow -4 + (n-1)(3) = 293 \Rightarrow 3n - 7 = 293$$

$$\Rightarrow 3n = 300 \Rightarrow n = 100$$

$$S_{100} = \frac{100}{2}(a_1 + a_{100}) = 50(-4+293) = 50\times 289 = 14450$$

نکته اگر a و b به ترتیب جملات اول و nام یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت d باشند، می‌توان تعداد جملات را از رابطهٔ $n = \frac{b-a}{d}+1$ به دست آورد.

در این مسئله داریم: $n = \frac{293-(-4)}{3}+1 = 100$

۴. اعداد $12,15,\ldots,96,99$، ویژگی سؤال را دارند که تشکیل دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت ۳ می‌دهند، اکنون تعداد این اعداد و سپس مجموع آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 99 = 12 + (n-1)(3) \Rightarrow n = 30$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{30} = \frac{30}{2}(12+99) = 15\times 111 = 1665$$

۵. اعداد $102,107,\ldots,997$ ویژگی سؤال را دارند که تشکیل دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت ۵ می‌دهند. اکنون داریم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 997 = 102 + (n-1)(5) \Rightarrow n = 180$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{180}{2}(102+997) = 90\times 1099 = 98910$$

۶. اعداد $53,59,\ldots,497$ ویژگی سؤال را دارند که تشکیل یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت ۶ می‌دهند، اکنون داریم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 497 = 53 + (n-1)(6)$$

$$\Rightarrow 6n = 450 \Rightarrow n = 75$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{75}{2}(53+497) = \frac{75}{2}\times 550 = 20625$$

۷. $S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d) \xrightarrow[a_1=5]{n=40} 2540=\frac{40}{2}(10+39d)$

$\Rightarrow 254=2(10+39d) \xrightarrow{\div 2} 127=10+39d \Rightarrow d=3$

۸. $3,9,15,\ldots \Rightarrow a_1=3, d=6$

$S_n=\frac{n}{2}(2(3)+(n-1)(6))=\frac{n}{2}(6+6n-6)=3n^2$

باید نامعادلهٔ $S_n>600$ را حل کنیم:

$3n^2>600 \Rightarrow n^2>200 \xrightarrow{n>0} n>\sqrt{200} \Rightarrow n>10\sqrt{2}$

عدد $10\sqrt{2}$ تقریباً برابر $14/1$ است، پس باید حداقل ۱۵ جمله را با هم جمع کنیم تا $S_n>600$ باشد.

۹. ابتدا a_{41} را به دست می‌آوریم. $-2,2,6,\ldots \Rightarrow a_1=-2, d=4$

$a_n=a_1+(n-1)d \Rightarrow a_{41}=-2+40\times 4=158$

اکنون داریم: $S_n=a_{41}+2=160$

$S_n=\frac{n}{2}(2(-2)+(n-1)(4))$

$=\frac{n}{2}(-4+4n-4)=\frac{n}{2}(4n-8)$

$=2n^2-4n=160 \xrightarrow{\div 2} n^2-2n-80=0$

$\Rightarrow (n-10)(n+8)=0 \xrightarrow{n\in\mathbb{N}} n=10 \checkmark, n=-8 \times$

۱۰. با توجه به معلومات مسئله داریم: $a_3=-15 \Rightarrow a_1+2d=-15$ (۱)

$S_{13}=65 \Rightarrow \frac{13}{2}(2a_1+12d)=65 \Rightarrow \frac{13}{2}(2)(a_1+6d)=65$

$\xrightarrow{\div 13} a_1+6d=5$ (۲)

$(2)-(1) \Rightarrow 4d=20 \Rightarrow d=5$

۱۱. با توجه به فرض سؤال داریم: $a_1+a_3+\cdots+a_{37}+a_{39}=170$ (۱)

$a_2+a_4+\cdots+a_{38}+a_{40}=210$ (۲)

دنباله، بیست جمله با شمارهٔ فرد و بیست جمله با شمارهٔ زوج دارد، پس:

جملات متناظر دو رابطه را از هم کم می‌کنیم و با توجه به رابطهٔ $a_n-a_{n-1}=d$، داریم: $\underbrace{(a_2-a_1)}_{d}+\underbrace{(a_4-a_3)}_{d}+\cdots+\underbrace{(a_{38}-a_{37})}_{d}+\underbrace{(a_{40}-a_{39})}_{d}$

$=210-170 \Rightarrow 20d=40 \Rightarrow d=2$

مجموع ۴۰ جملهٔ دنباله برابر $210+170=380$ است؛ بنابراین:

$S_{40}=\frac{40}{2}(2a_1+39\times 2)=380 \xrightarrow{\div 20} 2a_1+78=19$

$\Rightarrow 2a_1=-59 \Rightarrow a_1=-29/5$

۱۲. $S_6=1/5S_8 \xrightarrow{a_1=a} \frac{6}{2}(2a+5d)=\frac{3}{2}\times\frac{8}{2}(2a+7d)$

$\Rightarrow 3(2a+5d)=6(2a+7d) \Rightarrow 2a+5d=4a+14d$

$\Rightarrow 5d-14d=4a-2a \Rightarrow -9d=2a$ (۱)

اکنون باید مقدار n را طوری به دست آوریم که $S_n=0$ باشد:

$S_n=0 \Rightarrow \frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)=0$

$\xrightarrow{(1)} \frac{n}{2}(-9d+(n-1)d)=0 \xrightarrow{n\neq 0} -9d+nd-d=0$

$\Rightarrow d(n-10)=0 \xrightarrow{d\neq 0} n=10$

۱۳. الف) می‌دانیم $S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$؛ بنابراین:

$n=1 \Rightarrow S_1=a_1 \Rightarrow 2(1)^2+1=a_1 \Rightarrow a_1=3$

$n=2 \Rightarrow S_2=a_1+a_2 \Rightarrow 2(2)^2+2=a_1+a_2$

$\xrightarrow{a_1=3} 10=3+a_2 \Rightarrow a_2=7$

$d=a_2-a_1=7-3 \Rightarrow d=4$ اکنون قدرنسبت را به دست می‌آوریم:

ب) خواستهٔ سؤال محاسبهٔ $a_4+a_5+\cdots+a_{10}$ است.

برای این کار $S_{10}-S_3$ را به دست می‌آوریم، زیرا:

$\left.\begin{matrix}S_{10}=a_1+a_2+\cdots+a_{10}\\ S_3=a_1+a_2+a_3\end{matrix}\right\} \Rightarrow S_{10}-S_3=a_4+\cdots+a_{10}$

$S_{10}-S_3=(2(10)^2+10)-(2(3)^2+3)=210-21=189$

۱۴. می‌دانیم $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n$، باتوجه‌به‌رابطهٔ $a_n=a_1+(n-1)d$، S_n را بازنویسی می‌کنیم و رابطهٔ به‌دست‌آمده را یک بار از آخر به اول می‌نویسیم.

$S_n=a_1+(a_1+d)+\cdots+(a_1+(n-2)d)+(a_1+(n-1)d)$ (۱)

$S_n=(a_1+(n-1)d)+(a_1+(n-2)d)+\cdots+(a_1+d)+a_1$ (۲)

جملات متناظر رابطهٔ (۱) و (۲) را با هم جمع می‌کنیم و داریم:

$2S_n=(2a_1+(n-1)d)+(2a_1+(n-1)d)+\cdots$

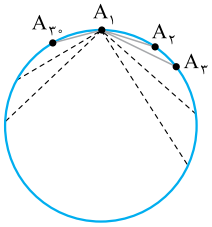
$+(2a_1+(n-1)d) \Rightarrow 2S_n=n(2a_1+(n-1)d)$

$\xrightarrow{\div 2} S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)$

۱۵. $S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)=\frac{n}{2}(a_1+\underbrace{a_1+(n-1)d}_{a_n})$

$\Rightarrow S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$

۱۶. مطابق شکل می‌توان نقطهٔ A_1 را به ۲۹ نقطهٔ دیگر روی دایره و نقطهٔ A_2 را به ۲۸ نقطهٔ باقی‌مانده (به‌جز A_1) وصل کرد. با ادامهٔ این کار (به‌جز برای آخرین نقطه) تعداد وترها برابر است با:



$29+28+27+\cdots+1=\frac{29\times 30}{2}=435$

۱۷. دونده ابتدا از کنار سبد ۴ متر به سمت توپ رفته و سپس ۴ متر به سمت سبد برمی‌گردد و در مجموع ۸ متر دویده است، در مرحلهٔ دوم او ۱۶ متر می‌دود، پس مسافت‌های طی‌شده در هر مرحله، جملات یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول ۸ و قدرنسبت ۸ هستند؛ بنابراین:

$S_n=1680 \Rightarrow \frac{n}{2}(2(8)+(n-1)8)=\frac{n}{2}(8+8n)$

$=4(n)(n+1)=1680 \xrightarrow[n\in\mathbb{N}]{\div 4} n(n+1)=420=20\times 21 \Rightarrow n=20$

بنابراین او ۲۰ توپ به سبد انداخته است.

فصل ۱ درس ۱
قسمت دوم: مجموع جملات دنبالهٔ هندسی

صفحه ۴ تا ۶ کتاب درسی

یادآوری اگر a_1 جملهٔ اول و q قدرنسبت یک دنبالهٔ هندسی باشند، جملهٔ nام دنباله (جملهٔ عمومی) برابر است با:

$$a_n=a_1q^{n-1}$$

مجموع جملات دنبالهٔ هندسی

در دنبالهٔ هندسی، مجموع n جملهٔ اول یعنی $a_1+a_2+\cdots+a_n$ را با S_n نمایش می‌دهیم و داریم:

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, q\neq 1$$

مثال مجموع ۶ جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی ۱,۳,۹,... را به دست آورید.

✓ **پاسخ:** جملهٔ اول دنباله ۱ و قدرنسبت آن $q=\frac{۳}{۱}=۳$ است؛ بنابراین:

$$S_n=\frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q}$$

$$\xrightarrow[n=۶]{a_۱=۱,q=۳} S_۶=\frac{۱(۱-۳^۶)}{۱-۳}=\frac{-۷۲۸}{-۲}=۳۶۴$$

مثال مجموع چند جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی $\frac{۱}{۲},۱,...$ برابر ۵۱۱/۵ است.

✓ **پاسخ:** جملهٔ اول $\frac{۱}{۲}$ و قدرنسبت $q=\frac{۱}{\frac{۱}{۲}}=۲$ است؛ بنابراین:

$$S_n=\frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q}=۵۱۱/۵ \Rightarrow \frac{\frac{۱}{۲}(۱-۲^n)}{۱-۲}=\frac{۱-۲^n}{-۲}$$

$$=\frac{۲^n-۱}{۲}=۵۱۱/۵ \Rightarrow ۲^n-۱=۱۰۲۳ \Rightarrow ۲^n=۱۰۲۴ \Rightarrow n=۱۰$$

پاسخ سؤالات

۱۸. $-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۴},... \Rightarrow a_۱=-\frac{۱}{۲},q=\frac{\frac{۱}{۴}}{-\frac{۱}{۲}}=-\frac{۱}{۲}$

$$S_{۱۰}=\frac{a_۱(۱-q^{۱۰})}{۱-q}=\frac{-\frac{۱}{۲}(۱-(-\frac{۱}{۲})^{۱۰})}{۱-(-\frac{۱}{۲})}=\frac{-\frac{۱}{۲}(۱-\frac{۱}{۱۰۲۴})}{\frac{۳}{۲}}$$

$$=\frac{-(۱۰۲۴-۱)}{۱۰۲۴}=\frac{-۱۰۲۳}{۳\times ۱۰۲۴}=-\frac{۳۴۱}{۱۰۲۴}$$

۱۹. $\frac{۱}{\sqrt{۲}},\sqrt{۲},... \Rightarrow a_۱=\frac{۱}{\sqrt{۲}},q=\frac{\sqrt{۲}}{\frac{۱}{\sqrt{۲}}}=۲$

$$S_{۱۰}=\frac{a_۱(۱-q^{۱۰})}{۱-q}=\frac{\frac{۱}{\sqrt{۲}}(۱-۲^{۱۰})}{۱-۲}=\frac{۱۰۲۳}{\sqrt{۲}}=\frac{۱۰۲۳\sqrt{۲}}{۲}$$

۲۰. جملهٔ عمومی دنباله را داریم؛ بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l} n=۱ \Rightarrow a_۱=۳^۰=۱ \\ n=۲ \Rightarrow a_۲=۳^۱=۳ \end{array}\right\} \Rightarrow q=\frac{a_۲}{a_۱}=\frac{۳}{۱}=۳$$

اکنون داریم: $S_n=۱۲۱ \Rightarrow \frac{۱\times(۱-۳^n)}{۱-۳}=۱۲۱ \Rightarrow ۱-۳^n=-۲۴۲$

$\Rightarrow ۳^n=۲۴۳ \Rightarrow n=۵$ پس مجموع ۵ جملهٔ اول دنباله ۱۲۱ است.

۲۱. $۶,۱۲,... \Rightarrow a_۱=۶,q=\frac{۱۲}{۶}=۲$

$$S_۵=\frac{a_۱(۱-q^۵)}{۱-q}=\frac{۶(۱-۲^۵)}{۱-۲}=\frac{۶(۱-۳۲)}{-۱}=۱۸۶$$

پس S_n دنبالهٔ اول باید ۱۸۶ باشد: $\frac{۲}{۱۱},\frac{۴}{۱۱},... \Rightarrow a_۱=\frac{۲}{۱۱},q=۲$

$$S_n=۱۸۶ \Rightarrow \frac{\frac{۲}{۱۱}(۱-۲^n)}{۱-۲}=\frac{۲(۲^n-۱)}{۱۱}=۱۸۶$$

$$\xrightarrow{\div ۲} \frac{۲^n-۱}{۱۱}=۹۳ \Rightarrow ۲^n-۱=۱۰۲۳$$

$$\Rightarrow ۲^n=۱۰۲۴=۲^{۱۰} \Rightarrow n=۱۰$$

۲۲. $S_۶=۶۵S_۳ \Rightarrow \frac{a_۱(۱-q^۶)}{۱-q}=۶۵\times\frac{a_۱(۱-q^۳)}{۱-q}$

$$\xrightarrow[a_۱\neq ۰]{q\neq ۱} ۱-q^۶=۶۵(۱-q^۳)$$

$$\Rightarrow \underbrace{(۱-q^۳)(۱+q^۳)}_{\text{تجزیه با اتحاد مزدوج}}=۶۵(۱-q^۳)$$

$$\Rightarrow ۱+q^۳=۶۵ \Rightarrow q^۳=۶۴=۴^۳ \Rightarrow q=۴$$

۲۳. ابتدا داریم:

$$a_۷=۵a_۳ \Rightarrow \frac{a_۷}{a_۳}=۵ \xrightarrow{a_n=a_۱q^{n-۱}} \frac{a_۱q^۶}{a_۱q^۲}=q^۴=۵ \quad (۱)$$

خواستهٔ مسئله $\frac{S_{۱۲}}{S_۸}$ است؛ بنابراین:

$$\frac{S_{۱۲}}{S_۸}=\frac{\frac{a_۱(۱-q^{۱۲})}{۱-q}}{\frac{a_۱(۱-q^۸)}{۱-q}}=\frac{۱-q^{۱۲}}{۱-q^۸}=\frac{۱-(q^۴)^۳}{۱-(q^۴)^۲}$$

$$\overset{(۱)}{=} \frac{۱-۵^۳}{۱-۵^۲}=\frac{۱-۱۲۵}{۱-۲۵}=\frac{۱۲۴}{۲۴}=\frac{۳۱}{۶}$$

۲۴. $\frac{۱}{۲۰},\frac{۱}{۵},... \Rightarrow a_۱=\frac{۱}{۲۰},q=\frac{\frac{۱}{۵}}{\frac{۱}{۲۰}}=۴$

باید $S_n>۳۰$ باشد؛ بنابراین:

$$S_n=\frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q} \xrightarrow[q=۴]{a_۱=\frac{۱}{۲۰}} S_n=\frac{\frac{۱}{۲۰}(۱-۴^n)}{۱-۴}=\frac{۴^n-۱}{۶۰}$$

$$\frac{۴^n-۱}{۶۰}>۳۰ \xrightarrow{\times ۶۰} ۴^n-۱>۱۸۰۰ \Rightarrow ۴^n>۱۸۰۱$$

$$\xrightarrow{۴^۵=۱۰۲۴} n\geq ۶$$

۲۵. جمله‌های با شمارهٔ فرد، یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $a_۱$ و قدرنسبت $q^۲$ تشکیل می‌دهند که ده جمله دارد:

$$\begin{array}{ccccccc} a_۱ & , & a_۳ & , & \cdots & , & a_{۱۹} \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ a_۱ & , & a_۱q^۲ & , & \cdots & , & a_۱q^{۱۸} \end{array}$$

$$a_۱+a_۳+\cdots+a_{۱۹}=S_{۱۰}=\frac{a_۱(۱-(q^۲)^{۱۰})}{۱-q^۲}=\frac{a_۱(۱-q^{۲۰})}{۱-q^۲}$$

مجموع تمام جملات دنباله برابر $S_{۲۰}=\frac{a_۱(۱-q^{۲۰})}{۱-q}$ است.

اکنون با توجه به فرض مسئله داریم:

$$\frac{\frac{a_۱(۱-q^{۲۰})}{۱-q^۲}}{\frac{a_۱(۱-q^{۲۰})}{۱-q}}=\frac{۱}{۵} \Rightarrow \frac{۱-q}{۱-q^۲}=\frac{۱-q}{(۱-q)(۱+q)}=\frac{۱}{۱+q}=\frac{۱}{۵}$$

$$\Rightarrow ۱+q=۵ \Rightarrow q=۴$$

۲۶. می‌دانیم: $S_n=a_۱+a_۲+\cdots+a_{n-۱}+a_n$

با توجه به رابطهٔ $a_n=a_۱q^{n-۱}$ داریم:

$$S_n=a_۱+a_۱q+\cdots+a_۱q^{n-۲}+a_۱q^{n-۱} \quad (۱)$$

طرفین رابطهٔ (۱) را در q ضرب می‌کنیم:

$$qS_n=a_۱q+a_۱q^۲+\cdots+a_۱q^{n-۱}+a_۱q^n \quad (۲)$$

اکنون داریم: $S_n-qS_n=a_۱-a_۱q^n \Rightarrow S_n(۱-q)=a_۱(۱-q^n)$

$$\Rightarrow S_n=\frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q}$$

۲۷. الف) اعداد $1, a, a^2, \ldots, a^{n-1}$، یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول ۱ و قدرنسبت $q = a$ تشکیل می‌دهند که شامل n جمله است؛ پس داریم:

$$1 + a + \cdots + a^{n-1} = S_n$$

اکنون در رابطهٔ $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ به جای a_1 عدد ۱ و به جای q قدرنسبت دنباله یعنی a را قرار می‌دهیم:

$$1 + a + \cdots + a^{n-1} = \frac{1(1-a^n)}{1-a} = \frac{1-a^n}{1-a} = \frac{a^n - 1}{a-1}$$

ب) $a^{n-1} + \cdots + a + 1 = \frac{a^n - 1}{a-1}$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + \cdots + a + 1)$$

۲۸. صفحهٔ شطرنجی ۴×۴، شانزده خانه دارد.

دانه‌های گندم قرار داده شده در خانه‌ها، دنبالهٔ هندسی $1, 2, 4, \ldots$ را تشکیل می‌دهند که ۱۶ جمله دارد. مجموع این ۱۶ جمله را به دست می‌آوریم:

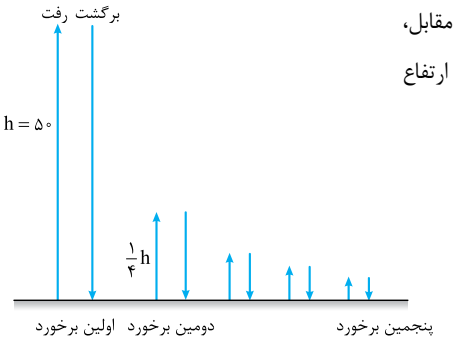
$$1, 2, 4, \ldots \Rightarrow a_1 = 1, q = 2$$

$$\text{تعداد کل دانه‌ها} = S_{16} = \frac{a_1(1-q^{16})}{1-q} = \frac{(1)(1-2^{16})}{1-2} = 2^{16} - 1$$

پس وزن تقریبی آن‌ها برابر است با: $2^{16}\,\text{gr} \simeq 65/5\,\text{kg}$

۲۹. با توجه به شکل مقابل،

توپ ۰/۲۵ یعنی $\frac{1}{4}$ ارتفاع قبلی را بالا می‌رود.

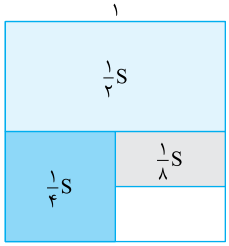


مسافت‌های طی‌شده در هر رفت و برگشت جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $\frac{1}{4}$ هستند، پس مجموع ۵ جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $۲ \times ۵۰ = ۱۰۰$ و قدرنسبت $\frac{1}{4}$ را می‌خواهیم؛ بنابراین:

$$S_5 = \frac{a_1(1-q^5)}{1-q} = \frac{100(1-(\frac{1}{4})^5)}{1-\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{100(1-\frac{1}{1024})}{\frac{3}{4}} = \frac{100 \times 1023 \times 4}{3 \times 1024} \simeq 133/2 \text{ متر}$$

۳۰. اگر $S = 1$ مساحت مربع باشد، در مرحلهٔ اول $\frac{1}{2}$ و در مرحلهٔ دوم $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ و ...، در مرحلهٔ nام $(\frac{1}{2})^n$، از مساحت مربع رنگ شده است.



مساحت‌های رنگ‌شده در هر قسمت جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $\frac{1}{2}$ و قدرنسبت $\frac{1}{2}$ هستند؛ بنابراین:

$$\text{مجموع مساحت قسمت‌های رنگی} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = S_n$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{\frac{1}{2}(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}} = 1 - (\frac{1}{2})^n$$

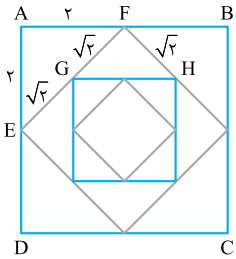
می‌خواهیم حداقل ۹۹ درصد مساحت مربع رنگ شود؛ پس:

$$S_n > \frac{99}{100} = 1 - (\frac{1}{2})^n > \frac{99}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^n} < \frac{1}{100} \xrightarrow{\text{معکوس}} 2^n > 100 \xrightarrow{2^6 < 100 < 2^7} n \geq 7$$

پس بعد از ۷ مرحله حداقل ۹۹ درصد مربع رنگ شده است.

۳۱. مطابق شکل مساحت مربع‌های ایجادشده را A_1، A_2 و ... می‌نامیم.



$$EF^2 = 2^2 + 2^2 \Rightarrow EF^2 = 8 \Rightarrow A_1 = 8$$

$$GF = \frac{\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow GH^2 = \sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2 = 4 \Rightarrow A_2 = 4$$

بنابراین A_1، A_2 و ... جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول ۸ و قدرنسبت $q = \frac{1}{2}$ هستند؛ پس داریم:

$$\text{مجموع مساحت مربع‌های ایجادشده} = 8 + 4 + \cdots$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{8(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}} = 16(1-(\frac{1}{2})^n)$$

محیط مربع اولیه ۱۶ است؛ بنابراین:

$$S_n > \frac{99/5}{100} \times 16 \Rightarrow 16(1-(\frac{1}{2})^n) > \frac{995}{1000} \times 16$$

$$\xrightarrow{\div 16} 1 - (\frac{1}{2})^n > \frac{995}{1000} \Rightarrow \frac{1}{2^n} < \frac{1}{200}$$

$$\xrightarrow{\text{معکوس}} 2^n > 200 \xrightarrow{2^7 < 200 < 2^8} n \geq 8$$

پس باید حداقل ۸ بار این کار را انجام دهیم.

۳۲. مساحت نیم‌دایرهٔ اول 8π است؛ بنابراین:

$$\frac{\pi r_1^2}{2} = 8\pi \Rightarrow r_1^2 = 16 \Rightarrow r_1 = 4$$

بعد از برخورد اول، مساحت $\frac{3}{4}$ کم می‌شود. پس:

$$\text{مساحت نیم‌دایرهٔ دوم} = \frac{1}{4} \times 8\pi = 2\pi \Rightarrow \frac{\pi r_2^2}{2} = 2\pi \Rightarrow r_2 = 2$$

فاصلهٔ مورچه پس از برخورد با زمین، از مبدأ، به اندازهٔ قطر نیم‌دایره‌ها است.

قطر نیم‌دایره‌ها دنبالهٔ هندسی $8, 4, \ldots$ را تشکیل می‌دهند.

فاصلهٔ مورچه بعد از n بار برخورد با زمین، مجموع n جملهٔ اول این دنباله است؛ بنابراین:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{8(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}} = 16(1-\frac{1}{2^n})$$

$$S_n > 15/98 \Rightarrow 16(1-\frac{1}{2^n}) > 15/98 \Rightarrow 1 - \frac{1}{2^n} > \frac{15/98}{16}$$

$$\Rightarrow \frac{0/02}{16} > \frac{1}{2^n} \Rightarrow \frac{1}{800} > \frac{1}{2^n} \xrightarrow{\text{معکوس}} 800 < 2^n \Rightarrow n = 10$$

۳۳. بدیهی است باید ابتدا عبارت داده‌شده را ساده کنیم. در صورت کسر، اگر هر جمله را در t ضرب کنیم جملهٔ بعدی به دست می‌آید، پس صورت کسر مجموع ۲۰ جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $a_1 = 1$ و قدرنسبت $q = t$ است؛ بنابراین:

$$S_{20} = \frac{a_1(1-q^{20})}{1-q} \xrightarrow{a_1=1, q=t} S_{20} = \frac{(1)(1-t^{20})}{1-t} = \frac{1-t^{20}}{1-t}$$

در مخرج کسر، اگر هر جمله را در t^2 ضرب کنیم جملهٔ بعدی به دست می‌آید. پس مخرج کسر مجموع ۱۰ جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $a_1 = 1$

و قدرنسبت $q=t^۲$ است؛ پس داریم:

$$S_{۱۰}=\frac{a_۱(۱-q^{۱۰})}{۱-q} \xrightarrow{a_۱=۱,q=t^۲} S_{۱۰}=\frac{(۱)(۱-(t^۲)^{۱۰})}{۱-t^۲}=\frac{۱-t^{۲۰}}{۱-t^۲}$$

اکنون داریم:

$$A=\frac{\frac{۱-t^{۲۰}}{۱-t}}{\frac{۱-t^{۲۰}}{۱-t^۲}}=\frac{۱-t^۲}{۱-t}=\frac{(۱-t)(۱+t)}{۱-t}=۱+t$$

$$\xrightarrow{t=\sqrt{۳}-۱} A=۱+\sqrt{۳}-۱=\sqrt{۳}$$

۳۴. جملات $۲,-۴,۸,\ldots,-۱۰۲۴$ یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $a_۱=۲$ و قدرنسبت $q=-۲$ تشکیل داده‌اند؛ پس داریم:

$$a_n=a_۱q^{n-۱} \Rightarrow ۲\times(-۲)^{n-۱}=-۱۰۲۴$$

$$\Rightarrow (-۲)^{n-۱}=-۵۱۲=(-۲)^۹ \Rightarrow n-۱=۹ \Rightarrow n=۱۰$$

مجموع این ده جمله را به دست می‌آوریم:

$$S_{۱۰}=\frac{۲(۱-(-۲)^{۱۰})}{۱-(-۲)}=\frac{۲\times(-۱۰۲۳)}{۳}=-۶۸۲$$

جملات $۱,۴,\ldots,۵۸$ یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول $a_۱=۱$ و قدرنسبت $d=۳$ تشکیل داده‌اند؛ بنابراین:

$$a_n=a_۱+(n-۱)d \Rightarrow ۱+(n-۱)(۳)=۵۸ \Rightarrow ۳n=۶۰ \Rightarrow n=۲۰$$

مجموع این بیست جمله برابر است با:

$$S_{۲۰}=\frac{۲۰}{۲}(a_۱+a_n)=۱۰(۱+۵۸)=۵۹۰$$

اکنون داریم:

$$A=\frac{-۶۸۲}{۵۹۰}\simeq -۱/۱۵$$

فصل ۱ درس ۲

قسمت اول: روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم

صفحه ۷ تا ۹ کتاب درسی

یادآوری فرم کلی هر معادلهٔ درجه‌دوم، به‌صورت $ax^۲+bx+c=۰ (a\neq ۰)$ است، ریشه‌های حقیقی معادله در صورت وجود، از روش کلی (روش Δ) به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\Delta=b^۲-۴ac$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta>۰ \xrightarrow{\text{معادله دو ریشهٔ متمایز دارد.}} x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a} \\ \Delta=۰ \xrightarrow{\text{معادله ریشهٔ مضاعف دارد.}} x=\frac{-b}{۲a} \\ \Delta<۰ \Rightarrow \text{معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.} \end{cases}$$

مثال **اگر $x=۱$ یکی از ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲-۵mx+۳=۰$ باشد، ریشه‌های معادلهٔ $۳mx^۲+(m+۲)x-۱=۰$ را به دست آورید.**

✓ **پاسخ:** $x=۱$ ریشهٔ معادله است؛ پس در آن صدق می‌کند:

$$۲x^۲-۵mx+۳=۰ \xrightarrow{x=۱} ۲(۱)^۲-۵(m)(۱)+۳=۰$$

$$\Rightarrow ۵-۵m=۰ \Rightarrow m=۱$$

$m=۱$ را در معادلهٔ داده‌شده قرار می‌دهیم و ریشه‌ها را به دست می‌آوریم:

$$m=۱ \Rightarrow ۳x^۲+۳x-۱=۰ \Rightarrow \Delta=(۳)^۲-۴(۳)(-۱)=۲۱$$

$$\xrightarrow{\Delta>۰} x=\frac{-۳\pm\sqrt{۲۱}}{۶} \Rightarrow x_۱=\frac{-۳+\sqrt{۲۱}}{۶} \text{ و } x_۲=\frac{-۳-\sqrt{۲۱}}{۶}$$

روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم

اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم $ax^۲+bx+c=۰$ باشند، آن‌گاه:

مجموع ریشه‌ها	حاصل‌ضرب ریشه‌ها
$S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$	$P=\alpha.\beta=\frac{c}{a}$

مثال **اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲-۳x-۶=۰$ باشند، بدون محاسبهٔ α و β حاصل $\alpha^۲\beta+\beta^۲\alpha$ را به دست آورید.**

✓ **پاسخ:** ابتدا مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} S=\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=\frac{-(-۳)}{۲}=\frac{۳}{۲} \\ P=\alpha.\beta=\frac{c}{a}=\frac{-۶}{۲}=-۳ \end{cases}$$

اکنون داریم:

$$\alpha^۲\beta+\beta^۲\alpha=\alpha\beta(\alpha+\beta)=(-۳)(\frac{۳}{۲})=-\frac{۹}{۲}$$

مثال **اگر $\alpha=-۲$ یکی از ریشه‌های معادلهٔ $۳x^۲-mx-۸=۰$ باشد، ریشهٔ دیگر و مقدار m را با استفاده از روابط بین ریشه‌ها به دست آورید.**

✓ **پاسخ:** اگر α و β ریشه‌های معادله باشند، داریم:

$$P=\alpha.\beta=\frac{c}{a} \xrightarrow{\alpha=-۲} -۲\beta=\frac{-۸}{۳} \Rightarrow \beta=\frac{۴}{۳}$$

$$S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a} \xrightarrow[\beta=\frac{۴}{۳}]{\alpha=-۲} -۲+\frac{۴}{۳}=\frac{-(-m)}{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{-۲}{۳}=\frac{m}{۳} \Rightarrow m=-۲$$

تشکیل معادلهٔ درجه‌دوم

نکته اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم $ax^۲+bx+c=۰$ باشند، می‌توان معادله را به صورت $a(x-\alpha)(x-\beta)=۰$ نوشت. $(a\neq ۰)$

مثال **معادلهٔ درجه‌دومی بنویسید که $x=۲$ و $x=-۳$ ریشه‌های آن باشند.**

✓ **پاسخ:** فرم کلی این معادله‌ها به صورت زیر است:

$$a(x-\alpha)(x-\beta)=۰ \xrightarrow[\beta=-۳]{\alpha=۲} a(x-۲)(x+۳)=۰$$

با قراردادن هر مقدار دلخواه غیر صفر به جای a، معادله به دست می‌آید. مثلاً:

$$a=۱ \Rightarrow (x-۲)(x+۳)=۰ \Rightarrow x^۲+x-۶=۰$$

نکته اگر α و β دو عدد دلخواه با مجموع S و حاصل‌ضرب P باشند، آن‌گاه α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-Sx+P=۰$ هستند.

مثال **معادلهٔ درجه‌دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن $۳-\sqrt{۷}$ و $۳+\sqrt{۷}$ باشند.**

✓ **پاسخ:** ابتدا مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها را به دست می‌آوریم.

$$\alpha=۳-\sqrt{۷}, \beta=۳+\sqrt{۷}$$

$$S=\alpha+\beta=(۳-\sqrt{۷})+(۳+\sqrt{۷})=۶$$

$$P=\alpha.\beta=\underbrace{(۳-\sqrt{۷})(۳+\sqrt{۷})}_{\text{مزدوج}}=۳^۲-\sqrt{۷}^۲=۲$$

اکنون معادله را تشکیل می‌دهیم:

$$x^۲-Sx+P=۰ \Rightarrow x^۲-۶x+۲=۰$$

مثال **محیط و مساحت مستطیلی برابر ۲۰ است. ابعاد آن را به دست آورید.**

✓ **پاسخ:** اگر $x_۱$ و $x_۲$ به ترتیب طول و عرض مستطیل باشند، داریم:

$$۲(x_۱+x_۲)=۲۰ \Rightarrow x_۱+x_۲=۱۰, x_۱.x_۲=۲۰$$

معادله‌ای با شرایط $S=۱۰$ و $P=۲۰$ تشکیل می‌دهیم:

$$x^۲-Sx+P=۰ \Rightarrow x^۲-۱۰x+۲۰=۰$$

$$\Delta=(-10)^2-4(1)(20)=20 \Rightarrow x=\frac{10\pm\sqrt{20}}{2}=\frac{10\pm2\sqrt{5}}{2}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=5+\sqrt{5}=\text{طول مستطیل} \\ x_2=5-\sqrt{5}=\text{عرض مستطیل} \end{cases}$$

پاسخ سؤالات

۳۵. نادرست؛ زیرا: $S=\frac{3}{5},P=-\frac{1}{5} \Rightarrow S=-3P$

۳۶. درست؛ اگر x_1 و x_2 طول و عرض مستطیل باشند، داریم:

محیط $=2(x_1+x_2)=6 \Rightarrow x_1+x_2=3$

مساحت $=x_1.x_2=6$

x_1 و x_2، در صورت وجود، ریشه‌های معادلهٔ $x^2-3x+6=0$ هستند، ولی در معادلهٔ بالا $\Delta<0$ است؛ پس مستطیلی با این شرایط وجود ندارد.

۳۷. درست؛ زیرا:

$$S=5,P=3 \Rightarrow x^2-5x+3=0 \xrightarrow{\times 2} 2x^2-10x+6=0$$

۳۸. $-\frac{1}{4}$، زیرا: $x^2-x-4=0 \Rightarrow S=\alpha+\beta=1,P=\alpha.\beta=-4$

مجموع معکوس ریشه‌ها یعنی: $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\frac{S}{P}=-\frac{1}{4}$

۳۹. -1

$$x^2(x+1)=x^3-x+3 \Rightarrow x^3+x^2=x^3-x+3$$
$$\Rightarrow x^2+x-3=0 \xrightarrow{\Delta>0} S=\alpha+\beta=-1$$

۴۰. $\frac{1}{2}$

باید $S=P$ باشد:

$$\left.\begin{aligned} S&=-\frac{b}{a}=\frac{-3m}{2} \\ P&=\frac{c}{a}=\frac{m-2}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{-3m}{2}=\frac{m-2}{2} \Rightarrow m=\frac{1}{2}$$

توجه کنید به ازای $m=\frac{1}{2}$، معادله دو ریشهٔ حقیقی دارد.

۴۱.

$$S=2P \Rightarrow -\frac{b}{a}=2\frac{c}{a} \Rightarrow -b=2c$$
$$\Rightarrow 3m+1=2(-m^2) \Rightarrow 2m^2+3m+1=0$$
$$\xrightarrow{\Delta=1} m=\frac{-3\pm1}{4} \Rightarrow \begin{cases} m=-\frac{1}{2} \ \checkmark \\ m=-1 \ \checkmark \end{cases}$$

دقت کنید به ازای هر دو مقدار به‌دست‌آمده، معادلهٔ اولیه ریشهٔ حقیقی دارد، زیرا $\Delta>0$ است.

۴۲. در معادلهٔ $x^2-3x+1=0$ داریم:

$$S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=3,P=\alpha.\beta=\frac{c}{a}=1$$

الف) $\alpha+\beta=3 \xrightarrow{\text{توان ۲}} \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=9$

$$\xrightarrow{\alpha\beta=1} \alpha^2+2+\beta^2=9 \Rightarrow \alpha^2+\beta^2=7$$

ب) $\alpha+\beta=3 \xrightarrow{\text{توان ۳}} \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3=27$

$$\Rightarrow \alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)=27$$
$$\Rightarrow \alpha^3+\beta^3+3(1)(3)=27 \Rightarrow \alpha^3+\beta^3=18$$

پ) $\frac{1}{\beta-1}+\frac{1}{\alpha-1}=\frac{\alpha-1+\beta-1}{(\beta-1)(\alpha-1)}$

$$=\frac{\alpha+\beta-2}{\alpha\beta-\beta-\alpha+1}=\frac{S-2}{P-(S)+1}=\frac{3-2}{1-3+1}=-1$$

۴۳.

$$x^2-mx-1=0 \Rightarrow \begin{cases} S=\alpha+\beta=m \\ P=\alpha.\beta=-1 \end{cases}$$

اکنون داریم: $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\beta\alpha}$ (۱)

$$\alpha+\beta=m \xrightarrow{\text{توان ۲}} \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=m^2$$
$$\xrightarrow{\alpha\beta=-1} \alpha^2-2+\beta^2=m^2 \Rightarrow \alpha^2+\beta^2=m^2+2$$
$$(1) \Rightarrow \frac{m^2+2}{-1}=2m-m^2$$
$$\Rightarrow m^2+2=-2m+m^2 \Rightarrow m=-1$$

۴۴. الف) وقتی ریشه‌های معادله قرینهٔ هم هستند، پس مجموع آن‌ها برابر صفر است.

$$S=-\frac{b}{a}=0 \Rightarrow b=0 \Rightarrow 6k-1=0 \Rightarrow k=\frac{1}{6}$$

ب) وقتی ریشه‌های معادله معکوس هم هستند، پس حاصل‌ضرب آن‌ها برابر ۱ است.

$$P=\frac{c}{a}=1 \Rightarrow c=a \Rightarrow -3k=2 \Rightarrow k=-\frac{2}{3}$$

دقت کنید به ازای مقادیر $k=\frac{1}{6}$ در قسمت «الف» و $k=-\frac{2}{3}$ در قسمت «ب» معادله ریشهٔ حقیقی دارد.

۴۵. α و $\beta=2\alpha$ ریشه‌های معادله هستند؛ بنابراین:

$$x^2-6x+m-1=0 \Rightarrow \begin{cases} S=\alpha+\beta=6 \\ P=\alpha.\beta=m-1 \end{cases}$$
$$S=\alpha+2\alpha=3\alpha=6 \Rightarrow \alpha=2 \xrightarrow{\beta=2\alpha} \beta=4$$
$$P=m-1 \Rightarrow m-1=8 \Rightarrow m=9$$

۴۶. چون $\alpha>\beta$، پس $\alpha-\beta=2$ است. (۱)

$$3x^2-12x+m^2=0 \Rightarrow S=\alpha+\beta=\frac{12}{3}=4 \quad (2)$$
$$(1)\text{ و }(2) \Rightarrow \begin{cases} \alpha-\beta=2 \\ \alpha+\beta=4 \end{cases} \xrightarrow{+} 2\alpha=6 \Rightarrow \alpha=3$$

$\alpha=3$ ریشهٔ معادله است، پس در آن صدق می‌کند:

$$3(3)^2-12(3)+m^2=0 \Rightarrow m^2=9 \Rightarrow m=\pm3$$

۴۷. α و $\beta=\alpha^2$ ریشه‌های معادله هستند.

$$3x^2-mx-24=0 \Rightarrow P=\alpha.\beta=-\frac{24}{3}=-8$$
$$\xrightarrow{\beta=\alpha^2} \alpha^3=-8 \Rightarrow \alpha=-2$$

$\alpha=-2$ ریشهٔ معادله است؛ بنابراین در آن صدق می‌کند:

$$3(-2)^2-m(-2)-24=0 \Rightarrow -12+2m=0 \Rightarrow m=6$$

۴۸. اگر $\alpha=3-2\sqrt{2}$ و $\beta=3+2\sqrt{2}$ باشند، داریم:

$$S=\alpha+\beta=(3-2\sqrt{2})+(3+2\sqrt{2})=6$$
$$P=\alpha.\beta=\underbrace{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}_{\text{مزدوج}}=9-8=1$$

پس α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-6x+1=0$ هستند.

۴۹. اگر α و β ریشه‌های معادله باشند، پس $\beta=3\alpha$ است؛ بنابراین:

$$S=\alpha+\beta=\alpha+3\alpha=4\alpha$$
$$P=\alpha.\beta=(\alpha)(3\alpha)=3\alpha^2$$

α و 3α ریشه‌های معادلهٔ زیر هستند:

$$x^2-Sx+P=0 \Rightarrow x^2-4\alpha x+3\alpha^2=0$$

با شرط $k\neq0$، بی‌شمار معادله به صورت $k(x^2-4\alpha x+3\alpha^2)=0$ با این ویژگی وجود دارد.

دقت کنید در معادلهٔ گفته‌شده Δ همواره مثبت است، زیرا:

$$\Delta=(-۴\alpha)^۲-۴(۱)(۳\alpha^۲)=۱۶\alpha^۲-۱۲\alpha^۲=۴\alpha^۲ \xrightarrow{\alpha\neq ۰} \Delta>۰$$

۵۰. اگر $x_۱$ و $x_۲$ اعداد مورد نظر باشند، داریم:

$$S=x_۱+x_۲=\frac{۱۱}{۶}, P=x_۱.x_۲=-\frac{۱}{۳}$$

پس $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادلهٔ زیر هستند:

$$x^۲-Sx+P=۰ \Rightarrow x^۲-\frac{۱۱}{۶}x-\frac{۱}{۳}=۰$$

با حل معادلهٔ بالا $x_۱$ و $x_۲$ را به دست می‌آوریم:

$$\Delta=\frac{۱۲۱}{۳۶}-۴(۱)(-\frac{۱}{۳})=\frac{۱۲۱}{۳۶}+\frac{۴}{۳}=\frac{۱۶۹}{۳۶} \Rightarrow \sqrt{\Delta}=\frac{۱۳}{۶}$$

$$\Rightarrow x=\frac{\frac{۱۱}{۶}\pm\frac{۱۳}{۶}}{۲} \Rightarrow x_۱=۲, x_۲=-\frac{۱}{۶}$$

پس اختلاف ریشه‌های معادله $۲-(-\frac{۱}{۶})=\frac{۱۳}{۶}$ است.

۵۱. اگر $x_۱$ و $x_۲$ طول و عرض مستطیل باشند، داریم:

$$\text{محیط}=۲(x_۱+x_۲)=۱۲ \Rightarrow x_۱+x_۲=۶ \Rightarrow S=۶$$

$$\text{مساحت}=x_۱.x_۲=۴ \Rightarrow P=۴$$

معادلهٔ درجه‌دومی با شرایط $S=۶$ و $P=۴$ تشکیل می‌دهیم:

$$x^۲-۶x+۴=۰ \xrightarrow{\Delta=۲۰} x=\frac{۶\pm۲\sqrt{۵}}{۲}$$

$$\Rightarrow x_۱=۳+\sqrt{۵}, x_۲=۳-\sqrt{۵}$$

۵۲.

$$x^۲-۲x-۴=۰ \Rightarrow \begin{cases} S=\alpha+\beta=۲ & (۱) \\ P=\alpha.\beta=-۴ & (۲) \end{cases}$$

می‌خواهیم معادلهٔ جدیدی با ریشه‌های $x_۱=۲\alpha$ و $x_۲=۲\beta$ تشکیل دهیم، پس باید مجموع و حاصل‌ضرب آن‌ها را به دست آوریم؛ بنابراین:

$$S'=۲\alpha+۲\beta=۲(\alpha+\beta) \xrightarrow{(۱)} S'=۴$$

$$P'=(۲\alpha)(۲\beta)=۴\alpha\beta \xrightarrow{(۲)} P'=-۱۶$$

معادلهٔ جدید: $x^۲-S'x+P'=۰ \Rightarrow x^۲-۴x-۱۶=۰$

۵۳.

$$۳x^۲-x-۵=۰ \Rightarrow \begin{cases} S=\alpha+\beta=\frac{۱}{۳} & (۱) \\ P=\alpha.\beta=-\frac{۵}{۳} & (۲) \end{cases}$$

می‌خواهیم معادلهٔ جدیدی با ریشه‌های $x_۱=\frac{۱}{\alpha}$ و $x_۲=\frac{۱}{\beta}$ تشکیل دهیم؛ بنابراین:

$$S'=\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta} \xrightarrow{(۱),(۲)} S'=\frac{\frac{۱}{۳}}{-\frac{۵}{۳}}=-\frac{۱}{۵}$$

$$P'=\frac{۱}{\alpha}\times\frac{۱}{\beta}=\frac{۱}{\alpha\beta} \xrightarrow{(۲)} P'=\frac{۱}{-\frac{۵}{۳}}=-\frac{۳}{۵}$$

معادلهٔ جدید: $x^۲-S'x+P'=۰ \Rightarrow x^۲+\frac{۱}{۵}x-\frac{۳}{۵}=۰$

$$\xrightarrow{\times ۵} ۵x^۲+x-۳=۰$$

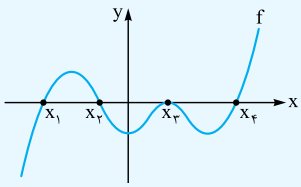
فصل ۱ درس ۲
قسمت دوم: صفرهای تابع و روش هندسی حل معادلات

صفحه ۱۰ تا ۱۶ کتاب درسی

صفرهای تابع

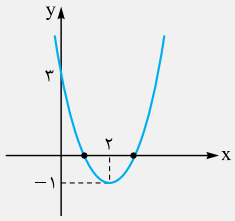
برای هر تابع مانند f، جواب‌های معادلهٔ $f(x)=۰$ را (در صورت وجود) صفرهای تابع می‌نامیم. اگر نمودار f را رسم کنیم، طول نقاط تلاقی f با محور طول‌ها، همان صفرهای تابع هستند.

به عنوان مثال، در شکل مقابل، $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$ و $x_۴$، صفرهای تابع هستند، زیرا مقدار تابع برابر صفر است و تابع با محور طول‌ها تلاقی دارد.



$$f(x_۱)=f(x_۲)=f(x_۳)=f(x_۴)=۰$$

مثال سهمی $f(x)=x^۲-۴x+۳$ را رسم کنید و تعداد جواب‌های معادلهٔ $f(x)=۰$ را مشخص کنید.



پاسخ:

$$f(x)=x^۲-۴x+۳$$

$$x_S=-\frac{b}{۲a}=۲ \Rightarrow y_S=f(۲)=-۱$$

رأس سهمی $S(۲,-۱)$

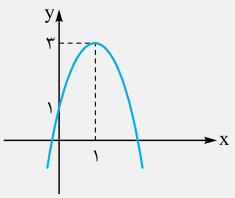
نقطهٔ کمکی $f(۰)=۳ \Rightarrow (۰,۳)$

سهمی در دو نقطه با محور طول‌ها برخورد کرده است، پس معادلهٔ $f(x)=۰$ دو جواب دارد.

نوشتن معادلهٔ سهمی

حالت اول: اگر نقطهٔ $S(x_S,y_S)$، رأس یک سهمی باشد، معادلهٔ آن به صورت $y=a(x-x_S)^۲+y_S$ است.

مثال ضابطهٔ سهمی مقابل را بنویسید.



پاسخ: رأس سهمی $S(۱,۳) \Rightarrow y=a(x-۱)^۲+۳$ (۱)

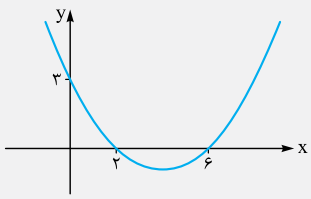
با توجه به نمودار سهمی از نقطهٔ $(۰,۱)$ عبور می‌کند؛ پس مختصات آن در سهمی صدق می‌کند:

$$(۱) \Rightarrow ۱=a(۰-۱)^۲+۳ \Rightarrow ۱=a+۳ \Rightarrow a=-۲$$

بنابراین ضابطهٔ سهمی به صورت $y=-۲(x-۱)^۲+۳$ است.

حالت دوم: اگر $x_۱$ و $x_۲$ صفرهای یک سهمی باشند، معادلهٔ آن به صورت $y=a(x-x_۱)(x-x_۲)$ است.

مثال ضابطهٔ سهمی مقابل را بنویسید.



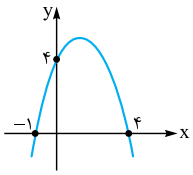
پاسخ: $x_۱=۲$ و $x_۲=۶$ صفرهای تابع هستند و سهمی از نقطهٔ $(۰,۳)$ عبور می‌کند؛ بنابراین:

$$y=a(x-۲)(x-۶) \xrightarrow{(۰,۳)\in y} ۳=a(۰-۲)(۰-۶)$$

$$\Rightarrow ۳=۱۲a \Rightarrow a=\frac{۱}{۴}$$

پس ضابطهٔ سهمی به صورت $y=\frac{۱}{۴}(x-۲)(x-۶)$ است و بعد از ساده‌کردن به صورت $y=\frac{۱}{۴}x^۲-۲x+۳$ نوشته می‌شود.

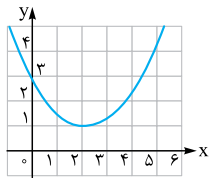
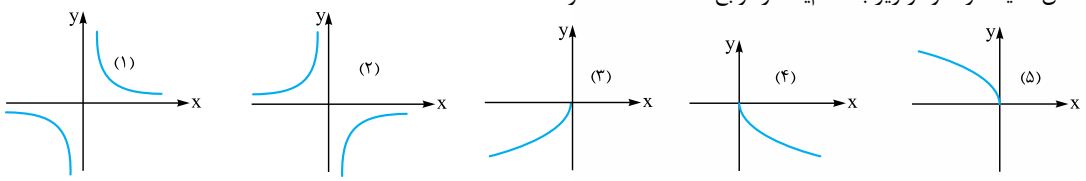
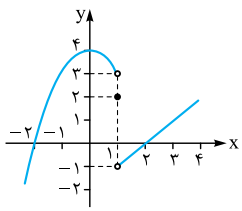
امتحان نوبت اول (میان‌سال): حسابان ۱	رشته: ریاضی‌وفیزیک	تاریخ امتحان: دی ماه	
ردیف	امتحان شمارهٔ ۱	پایهٔ یازدهم دورهٔ دوم متوسطه	مدت امتحان: ۱۰۰ دقیقه	نمره

ردیف		نمره
۱	درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید: الف) مجموع ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲ - ۵x + ۱ = ۰$، دو برابر حاصل‌ضرب ریشه‌های آن است. ب) اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، آن‌گاه $\|a-b\| \geq \|a\| + \|b\|$. پ) برد تابع همواره زیرمجموعهٔ هم‌دامنهٔ تابع است. ت) اگر $f(۲) = ۵$ و $g(۵) = ۲$ باشند، $(gof)(۲) = ۵$.	۱
۲	جاهای خالی را پر کنید: الف) فاصلهٔ دو خط $y = ۲x - ۳$ و $۴x - ۲y + ۸ = ۰$ برابر ..... است. ب) خط $y = ۲$، نمودار تابع $y = \|x^۲ - ۲\|$ را در ..... نقطه قطع می‌کند. پ) حاصل $[(\sqrt{۳}-۲)^۵]$ برابر ..... است. ($[\ ]$ نماد جزء صحیح است.) ت) اگر $f(x) = x^۳ + ۲x$ و $f^{-۱}(a) = ۲$ باشد، مقدار a برابر ..... است.	۲
۳	مجموع اعداد طبیعی دورقمی مضرب ۳ را به دست آورید.	۱/۲۵
۴	در دنبالهٔ هندسی $\frac{۲}{۳}, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۶}, \ldots$، حداقل چند جمله را با هم جمع کنیم تا حاصل، بزرگ‌تر از ۱۷۵ باشد؟	۱
۵	شکل مقابل نمودار سهمی $y = ax^۲ + bx + c$ است. الف) مقادیر a، b و c را به دست آورید. ب) بیشترین مقدار y را محاسبه کنید. 	۱/۲۵
۶	معادلات زیر را حل کنید و جواب‌های قابل قبول را مشخص کنید. الف) $\frac{x-۱}{x^۲-۳x} = \frac{x+۳}{x^۲-x} + \frac{۱}{x-۳}$ ب) $x - \sqrt{۲x-۵} = ۲$	۲/۲۵
۷	ضابطهٔ تابع $y = \|x-۲\| + \|x\|$ را با تعیین علامت عبارات شامل قدرمطلق، به صورت یک تابع چندضابطه‌ای بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.	۱/۵
۸	اگر $A(m,۲)$، $B(۰,-۳)$ و $C(-۴,۰)$ سه رأس مثلثی باشند و طول ارتفاع AH وارد بر ضلع BC برابر $\frac{۲۳}{۵}$ باشد، مقدار m را به دست آورید.	۱/۲۵
۹	نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} -\frac{۱}{x} & x < ۰ \\ ۱ - \sqrt{x+۱} & x \geq ۰ \end{cases}$ را رسم کنید و برد آن را مشخص کنید.	۱
۱۰	نمودار تابع $y = x - [x]$ را در بازهٔ $[-۱,۲]$ رسم کنید.	۱/۲۵
۱۱	وارون تابع $f(x) = x^۲ - ۴x \ ; \ x \leq ۲$ را به دست آورید.	۱/۵
۱۲	اگر $f(x) = \sqrt{۵-x}$ و $g(x) = \frac{x-۱}{x+۱}$، آن‌گاه: الف) دامنهٔ تابع $\frac{f}{g}$ را به دست آورید. ب) مقدار $(f.g)(۴)$ را محاسبه کنید.	۱/۵
۱۳	الف) اگر $f(x) = \frac{۳}{x-۱}$ و $(fog)(x) = ۲x$، تابع $g(x)$ را به دست آورید. ب) اگر $f = \{(۱,۲),(۵,۳),(۲,۵)\}$ باشد، تابع $(fof)(x)$ را به دست آورید.	۱/۲۵
۱۴	الف) نمودار تابع $f(x) = ۲^x - ۱$ را با انتقال تابع $y = ۲^x$ رسم کنید. ب) طول محل برخورد خط $y = ۵$ با نمودار $f(x)$ بین کدام دو عدد صحیح است؟	۱/۲۵
۱۵	نامعادلهٔ $(\sqrt{۲}-۱)^{x-۲} \leq (\sqrt{۲}-۱)^{۲x+۱}$ را حل کنید.	۰/۷۵
	«موفق باشید» — جمع نمرات	۲۰

۸	توابع $f=\{(۲,۸),(۳,۱),(۴,۲),(۶,۲)\}$ و $g=\{(۳,-۱),(۴,۰),(-۱,۷),(۲,۴)\}$ مفروض‌اند. الف) دامنهٔ تابع $f.g$ را مشخص کنید. ب) تابع $\frac{f}{g}$ را به دست آورید.	۱
۹	اگر $f(x)=۲x-۵$ و $g(x)=\sqrt{x-۲}$ دو تابع باشند: الف) دامنهٔ تابع gof را بنویسید. ب) ضابطهٔ تابع gof را به دست آورید.	۱/۵
۱۰	اگر $f(x)=۲^{x+۱}-۵$ باشد، مقدار $f^{-۱}(۲۷)$ را بیابید.	۱
۱۱	معادلهٔ لگاریتمی $\log_۳(x^۲-۱)=۱+\log_۳(x+۳)$ را حل کنید.	۱/۵
۱۲	شخصی دور زمین دایره‌ای‌شکل به شعاع ۱۰ متر در حال دوچرخه‌سواری است. اگر زاویه‌ای که شخص طی کرده است ۹۰ درجه باشد، او چه مسافتی را رکاب زده است؟	۰/۷۵
۱۳	مقدار نسبت مثلثاتی $\tan(-\frac{۲۳\pi}{۴})$ را به دست آورید.	۱
۱۴	اگر $\sin\alpha=\frac{۳}{۵}$، $\cos\beta=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و α زاویه‌ای حاده و β زاویه‌ای منفرجه باشد، حاصل $\cos(\alpha-\beta)$ را بیابید.	۱/۵
۱۵	نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}-۲ & x\in\mathbb{Z}\\ ۳ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$ را در فاصلهٔ $[-۲,۲]$ رسم نموده و سپس با استفاده از نمودار $\lim\limits_{x\to۱}f(x)$ را به دست آورید.	۰/۷۵
۱۶	حد راست تابع $f(x)=\frac{x}{[x]-۳}$ را در نقطهٔ $x=۳$ بررسی کنید.	۰/۵
۱۷	مقدار حدهای مقابل را بیابید. الف) $\lim\limits_{x\to۰}\frac{۱-\cos۲x}{x.\sin x}$ ب) $\lim\limits_{x\to۲}\frac{x-\sqrt{x+۲}}{x^۲+x-۶}$	۲/۲۵
۱۸	مقدار a و b را چنان تعیین کنید که تابع مقابل در $x=۲$ پیوسته باشد. $f(x)=\begin{cases}۲x+a & x>۲\\ ۳ & x=۲\\ bx+۱ & x<۲\end{cases}$	۱/۲۵
	«موفق باشید» **جمع نمرات**	۲۰

امتحان نهایی: **حسابان ۱**	رشته: **ریاضی‌وفیزیک**	تاریخ امتحان: **شهریور ۱۴۰۲**
ردیف **امتحان شمارهٔ ۶**	**پایهٔ یازدهم دورهٔ دوم متوسطه**	مدت امتحان: **۱۰۰ دقیقه** نمره

۱	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) حاصل عبارت $۲+۴+۶+\cdots+۱۰۰$ برابر ۲۵۰۰ است. ب) دو تابع $f(x)=x$ و $g(x)=\sqrt{x^۲}$ با هم برابرند. پ) در تابع $f(x)=a^x$، اگر $a>۱$، با افزایش مقدار x، مقادیر f افزایش می‌یابد. ت) $\cos\alpha+\cos(\pi-\alpha)=۰$	۱
۲	در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید. الف) حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ $۴x^۲+۳x-۸=۰$ مساوی ..... است. ب) مجموعه‌جواب معادلهٔ $\sqrt{x^۲-۹}+۲\sqrt{x-۳}=۰$، برابر {.....} می‌باشد. پ) حاصل عبارت $\log_۵\sqrt[۳]{۲۵}$ برابر ..... است. ت) در دایره‌ای به شعاع ۳ متر، اندازهٔ زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به کمانی به طول ۱۲ متر برابر ..... رادیان است.	۱

۳	طول ضلع مربعی یک متر است. ابتدا نیمی از مساحت آن را رنگ می‌کنیم. سپس نیمی از مساحت باقی‌مانده را به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی‌مانده از قبل را رنگ می‌کنیم. پس از دست کم چند مرحله حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ شده است؟	۱/۲۵
۴	در شکل نمودار سهمی $f(x)=ax^2+bx+c$ داده شده است. صفرهای تابع را در صورت وجود به دست آورید و ضابطهٔ تابع را مشخص کنید. 	۱
۵	یکی از اضلاع مربعی بر خط $y=2x-1$ است. اگر $A(3,0)$ یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت مربع را محاسبه کنید.	۱
۶	مشخص کنید هر نمودار زیر با کدام‌یک از توابع داده‌شده، متناظر است؟  $f(x)=\frac{-1}{x}$, $g(x)=\sqrt{-x}$, $h(x)=-\sqrt{x}$, $r(x)=-\sqrt{-x}$, $t(x)=\frac{1}{x}$	۱/۲۵
۷	تابع $g(x)=x^2-2x+3$ مفروض است. الف) نشان دهید تابع g، یک‌به‌یک نیست. ب) با محدودکردن دامنهٔ تابع g، تابعی وارون‌پذیر به نام f بسازید و وارون آن را به دست آورید.	۱/۵
۸	توابع $f(x)=\frac{1}{x^2}$ و $g(x)=\sqrt{4-x^2}$ مفروضند، دامنهٔ تابع fog را با استفاده از تعریف به دست آورید.	۱
۹	خط $y=10$ نمودار تابع $y=(0/01)^x$ را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟ (راه‌حل نوشته شود.)	۱
۱۰	معادلهٔ لگاریتمی زیر را حل کرده و مجموعه‌جواب را مشخص کنید. $\log_3(x-1)+\log_3(\frac{x}{2}+1)=2$	۱/۵
۱۱	نمودار تابع $y=-|\cos x|+1$ را در بازهٔ $[0,2\pi]$ رسم کرده و برد تابع را مشخص کنید. (مراحل رسم را نشان دهید.)	۱/۲۵
۱۲	اگر $\sin\alpha=\frac{3}{5}$، $\tan\beta=\frac{-2}{\sqrt{5}}$ و انتهای کمان α در ربع اول و β در ربع دوم باشد، مقدار دقیق $\cos(\alpha+\beta)$ و $\sin 2\alpha$ را بیابید.	۲/۲۵
۱۳	اگر بازهٔ $(x-1,2y+5)$ یک همسایگی راست محذوف ۳ باشد، مجموعه مقادیر x و y را به دست آورید.	۱
۱۴	با توجه به شکل، حاصل عبارت زیر را در صورت وجود به دست آورید.  $2\lim_{x\to 1^+} f(x)+3f(1)-\lim_{x\to 0} f(x)=$	۱
۱۵	مقادیر حدهای مقابل را بیابید. الف) $\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2|x|-8}{x-2}$ ب) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{5x}$	۱/۵
۱۶	مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع f در نقطه‌ای به طول $x=0$ پیوسته باشد. $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} & x>0\\ x-\frac{a}{4} & x=0\\ b+\frac{[x]}{2} & x<0\end{cases}$	۱/۵
	«موفق باشید» جمع نمرات	۲۰