ساختار کتاب

کتاب شب امتحان **ریاضیات گسسته** از ۴ قسمت اصلی به صورت زیر تشکیل شده است:

۱) آزمون‌های نوبت اول: آزمون‌های شمارهٔ ۱ تا ۴ این کتاب مربوط به مباحث نوبت اول است که خودش به دو قسمت تقسیم می‌شود:

الف) آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده: آزمون‌های شمارهٔ ۱ و ۲ را فصل به فصل طبقه‌بندی کرده‌ایم. بنابراین شما به راحتی می‌توانید پس از خواندن هر فصل از درس‌نامه تعدادی سؤال را بررسی کنید. حواستان باشد این آزمون‌ها ۲۰ نمره‌ای و مثل یک آزمون کامل هستند. در کنار سؤال‌های این آزمون‌ها **نکات مشاوره‌ای** نوشته‌ایم. این نکات به شما در درس‌خواندن قبل از امتحان و پاسخگویی به آزمون در زمان امتحان کمک می‌کند.

ب) آزمون طبقه‌بندی‌نشده: آزمون‌های شمارهٔ ۳ و ۴ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم تا دو آزمون نوبت اول، مشابه آزمونی که معلمتان از شما خواهد گرفت، ببینید.

۲) آزمون‌های نوبت دوم: آزمون‌های شمارهٔ ۵ تا ۱۲، امتحان‌های نهایی برگزار شده در سال‌های ۱۴۰۰، ۱۴۰۱ و ۱۴۰۲ هستند. این قسمت هم، خودش به ۲ بخش تقسیم می‌شود:

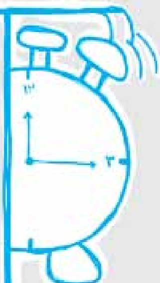
الف) آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده: آزمون‌های شمارهٔ ۵ تا ۸، امتحان‌های نهایی خرداد و شهریور ۱۴۰۰، دی ۱۴۰۰ و دی ۱۴۰۱ هستند که طبقه‌بندی کرده‌ایم. با این کار باز هم می‌توانید پس از خواندن هر فصل تعدادی سؤال مرتبط را پاسخ دهید. هر کدام از این آزمون‌ها، ۲۰ نمره دارند در واقع در این بخش، شما ۴ آزمون کامل را می‌بینید. این آزمون‌ها هم **نکات مشاوره‌ای** دارند.

ب) آزمون‌های طبقه‌بندی‌نشده: آزمون‌های شمارهٔ ۹ تا ۱۲ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم. این آزمون‌ها به ترتیب امتحان‌های نهایی خرداد ۱۴۰۱، خرداد ۱۴۰۲، شهریور ۱۴۰۱ و شهریور ۱۴۰۲ هستند.

۳) پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون‌ها: در پاسخ تشریحی آزمون‌ها تمام آن‌چه را که شما باید در امتحان بنویسید تا نمرهٔ کامل کسب کنید، برایتان نوشته‌ایم.

۴) درس‌نامهٔ کامل شب امتحانی: این قسمت تمام آن‌چه را که شما برای گرفتن نمرهٔ عالی در امتحان ریاضیات گسسته نیاز دارید، تنها در ۱۶ صفحه آورده‌ایم، بخوانید و لذتش را ببرید!

یک راهکار: موقع امتحان‌های نوبت اول می‌توانید از سؤال‌های فصل‌های اول و دوم آزمون‌های ۵ تا ۸ هم استفاده کنید.



فهرست

بارم‌بندی درس ریاضیات گسسته

شماره فصل		نوبت اول	نوبت دوم	شهریور و دی
فصل اوّل		۱۵	۵	۷
فصل دوم	تا صفحهٔ ۴۲	۵	۲	۶
	بعد از صفحهٔ ۴۲	–	۵	
فصل سوم		–	۸	۷
جمع		۲۰	۲۰	۲۰

فصل اول

۱ الف) آیا اعداد صحیحی مانند x و y وجود دارند که: $x^{۲}+y^{۲}=(x+y)^{۲}$ — ۱/۵

ب) آیا مقادیر حقیقی و غیرصفر x و y وجود دارند که: $x+y\neq ۰$ $\quad \frac{۱}{x+y}=\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}$

۲ جاهای خالی را پر کنید. — ۱

الف) $[-۴,۱۶]=$ ....

ب) اگر $a \mid b$، آن‌گاه $(a,b)=$ ....

پ) اگر p عددی اول باشد و a عددی طبیعی و $p \mid a$ در این صورت $a=$ .... یا $a=$ ....

۳ درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید. — ۱

الف) $\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n \\ n \in \end{cases}$

ب) $ac \overset{m}{\equiv} bc \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} b$

پ) شرط لازم و کافی برای آن‌که معادلهٔ سیالهٔ $ax+by=c$ دارای جواب باشد آن است که $[a,b] \mid c$.

ت) در مسائل تقویم‌نگاری از هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۷ استفاده می‌شود.

۴ اگر x و y گنگ ولی $x+y$ گویا باشد، ثابت کنید: $x-y$ و $x+۲y$ گنگ هستند. (به روش برهان خلف) — ۱

یادت باشه در روش برهان خلف، فرض می‌کنیم حکم برقرار نباشد.

۵ به روش بازگشتی برای هر x و y حقیقی که $x+y>۰$ باشد، ثابت کنید: $\frac{x^{۳}+y^{۳}}{x+y}\geq xy$ — ۱/۵

در روش بازگشتی هر وقت به یک عبارت همواره درست رسیدی کار تمام است.

۶ خاصیت تعدی در رابطهٔ عادکردن را بیان و اثبات نمایید. — ۱/۲۵

گفته: بیان و اثبات.

۷ اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم‌علیه هر دو بر عدد صحیح n بخش‌پذیر باشند، ثابت کنید باقی‌ماندهٔ تقسیم نیز همواره بر n بخش‌پذیر است. — ۱/۲۵

بخش‌پذیربودن یعنی باقی‌ماندهٔ صفر داشتن.

۸ اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر دو عدد ۶ و ۷ به ترتیب ۳ و ۴ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۴۲ را بیابید. — ۱/۲۵

۹ اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ و $c \in$ ، آن‌گاه ثابت کنید: $a \pm c \overset{m}{\equiv} b \pm c$ — ۱/۲۵

۱۰ باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A=(۲۳)^{۶}+۱۶$ را بر ۱۱ بیابید. — ۱/۲۵

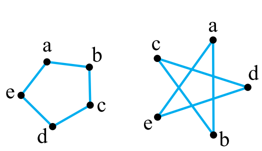
۱۱ تمام اعداد صحیحی که ۷ برابر آن‌ها منهای ۳ بر ۹ بخش‌پذیر باشند را بیابید. — ۱/۲۵

اول سعی کن صورت سؤال را به زبان ریاضی بنویسی.

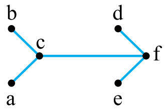
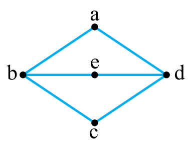
۱۲ نشان دهید معادلهٔ سیالهٔ $۶x+۱۴y=۱۰$ در مجموعهٔ اعداد صحیح جواب دارد. سپس آن را حل کنید. — ۱/۵

فصل دوم

۱۳ برای دو نمودار مقابل با نوشتن مجموعه‌های $V(G)$ و $E(G)$ برای هر کدام، نشان دهید هر دو یک گراف را نمایش می‌دهند. — ۱



$(G_۱)$ $\quad (G_۲)$

ردیف	آزمون شمارهٔ ۱ — نوبت اول پایهٔ دوازدهم	نمره
۱۴	نمودار گراف G به صورت مقابل است:  الف) درجات رئوس گراف G را بنویسید. ب) چه یال‌هایی به گراف G اضافه کنیم تا گراف ۳ ـ منتظم مرتبهٔ ۶ شود؟ *یادت که هست در گراف ۳ ـ منتظم، درجهٔ همهٔ رئوس ۳ است.*	۱/۵
۱۵	گراف G، ۳ ـ منتظم است و با افزودن ۶ یال به یال‌های این گراف، گراف کامل به دست می‌آید؛ الف) مرتبه و اندازهٔ گراف را به دست آورید. ب) نموداری از این گراف رسم کنید. *حواست باشه گفته یال اضافه می‌کنیم تا کامل شود. در قسمت (الف) هم مرتبه و اندازهٔ گراف اولیه را خواسته.*	۱/۵
۱۶	نمودار گراف G به صورت مقابل است:  الف) طولانی‌ترین مسیر از a به c را بنویسید. ب) تمام دورهای به طول ۴ را در این گراف بنویسید. *به کلمهٔ طولانی در قسمت (الف) دقت کن.*	۱
	موفق باشید — جمع نمرات	۲۰

ردیف	آزمون شمارهٔ ۹	نوبت دوم پایهٔ دوازدهم ـ نهایی خرداد ۱۴۰۱	نمره

۱ درست یا نادرست بودن جملات زیر را مشخص کنید. (نمره: ۱)

الف) اگر $a|b$ و $b \neq ۰$، در این صورت $|a|>|b|$.

ب) برای دو عدد صحیح و ناصفر a و b اگر $(a|c , b|c)$ و $(\forall m>۰, a|m, b|m \Rightarrow c \leq m)$، آن‌گاه $c=[a,b]$.

پ) برای هر دو عدد صحیح a و b و عدد طبیعی m، اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر m مساوی با r باشد، در این صورت $a \underset{m}{\equiv} r$.

ت) بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد ۴ و ۲− برابر ۲− است.

۲ ثابت کنید برای هر عدد طبیعی زوج n، $n^۲-۵n+۷$ عددی فرد است. (نمره: ۱)

۳ اگر عددی مانند k در   باشد، به طوری که $۵|۴k+۱$، ثابت کنید $۲۵|۱۶k^۲+۲۸k+۶$. (نمره: ۰/۷۵)

۴ باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A=۲۷^{۲۰}+۱۸$ را بر ۱۳ بیابید. (نمره: ۱)

۵ اگر در یک سال، اول مهر شنبه باشد، در این صورت ۱۲ بهمن در همان سال چه روزی است؟ (نمره: ۱/۲۵)

۶ جاهای خالی را با عدد یا کلمهٔ مناسب پر کنید. (نمره: ۱)

الف) اگر درجهٔ یک رأس فرد باشد، آن را رأس .... می‌نامیم.

ب) گرافی را که تمام رئوس آن تنها باشد، هیچ یالی نداشته باشد، گراف .... می‌نامیم.

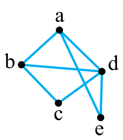
پ) تعداد یال‌های گراف $K_۴$، برابر با .... است.

ت) گراف G را .... می‌نامیم، هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد.

۷ به سؤالات زیر کوتاه پاسخ دهید. (نمره: ۱)

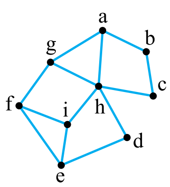
الف) گراف $C_۷$ را رسم کنید، سپس یک مسیر به طول ۵ بنویسید.

ب) در گراف شکل مقابل، $N_G(c)$ را با اعضا مشخص کنید.

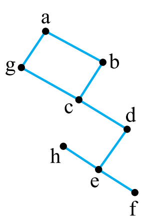


۸ الف) مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال را تعریف کنید. (نمره: ۱/۲۵)

ب) برای گراف شکل روبه‌رو، یک مجموعهٔ احاطه‌گر با ۴ عضو انتخاب کنید.



۹ عدد احاطه‌گری گراف شکل مقابل را با ارائهٔ راه‌حل، تعیین کنید. (نمره: ۱/۲۵)

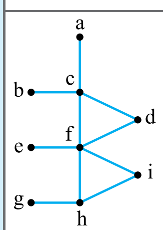


۱۰ ابتدا گراف $P_۹$ را رسم کنید؛ سپس یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم از آن را مشخص کنید. (نمره: ۱)

۱۱ گراف شکل مقابل را در نظر بگیرید. (نمره: ۱/۵)

الف) یک γ ـ مجموعه مشخص کنید.

ب) یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال با ۴ عضو بنویسید.



۱۲ ۶ کتاب متفاوت تاریخ و ۵ کتاب متفاوت ادبیات را به چند طریق می‌توان در یک ردیف کنار هم چید به طوری که: (نمره: ۱)

الف) کتاب‌های تاریخ همواره کنار هم باشند.

ب) به صورت یک در میان قرار بگیرند.

۱۳ با ارقام ۹، ۷، ۶، ۵، ۳، ۳، ۱، ۱، ۱ چند عدد ۹رقمی می‌توان نوشت؟ (نمره: ۱)

ردیف	سؤال	نمره
۱۴	معادلهٔ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 12$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آن‌که $x_3 = 4$ و $x_5 > 2$ باشد؟	۱/۵
۱۵	الف) مربع لاتین A را در نظر بگیرید. با اِعمال جایگشت $\begin{matrix} ۱ \to ۳ \\ ۲ \to ۲ \\ ۳ \to ۴ \\ ۴ \to ۱ \end{matrix}$ مربع لاتین B را به دست آورید. $A = \begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|} \hline ۳ & ۴ & ۱ & ۲ \\ \hline ۲ & ۱ & ۴ & ۳ \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ \hline ۴ & ۳ & ۲ & ۱ \\ \hline \end{array}$ ب) آیا دو مربع لاتین A و B متعامدند؟ دلیل بیاورید.	۲
۱۶	به چند طریق می‌توان ۵ سیب را بین ۳ نفر توزیع کرد، به طوری که هر نفر حداقل یک سیب داشته باشد؟	۱/۲۵
۱۷	ثابت کنید اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش‌آموز مشغول تحصیل باشند، لااقل ۷ نفر از آن‌ها روز، هفته و ماه تولدشان یکسان است.	۱/۲۵
	موفق باشید جمع نمرات	۲۰

پاسخ‌نامهٔ تشریحی

آزمون شمارهٔ ۱ (نوبت اول)

۱- الف) از حل طرفین تساوی داریم:

$$x^۲+y^۲=x^۲+y^۲+۲xy \Rightarrow ۲xy=۰ \Rightarrow x=۰ \text{ یا } y=۰$$

یعنی اگر $x=۰$ باشد، برای هر y صحیح تساوی برقرار است.

اگر $y=۰$ باشد، برای هر x صحیح تساوی برقرار است.

اگر هر دو متغیر x و y صفر باشند، تساوی نیز برقرار است.

ب)
$$\frac{۱}{x+y}=\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y} \Leftrightarrow \frac{۱}{x+y}=\frac{x+y}{xy}$$
$$\Leftrightarrow (x+y)^۲=xy \Leftrightarrow x^۲+y^۲+۲xy-xy=۰$$
$$\Leftrightarrow x^۲+y^۲+xy=۰$$

با توجه به تساوی $(x+y)^۲=xy$، xy همواره مثبت است. مجموع سه عبارت همواره مثبت صفر شده است. چون x و y غیرصفرند، پس مسئله جواب ندارد.

۲- الف) ک.م.م دو عدد ۴- و ۱۶ برابر ۱۶ است.

ب) $a|b \Rightarrow (a,b)=|a|$

پ) $a=p$ یا $a=۱$

۳- الف) درست؛ طرفین یک همنهشتی را می‌توان به توان عدد طبیعی n رساند.

ب) نادرست؛ وقتی عدد ناصفر c از طرفین یک همنهشتی حذف شود پیمانهٔ m همواره ثابت نمی‌ماند.

$$\begin{cases} ac \overset{m}{\equiv} bc \Rightarrow a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b \\ (c,m)=d \end{cases}$$

پ) نادرست؛ شرط لازم و کافی برای آن‌که معادلهٔ سیالهٔ $ax+by=c$ دارای جواب باشد آن است که $(a,b)|c$.

ت) درست؛ در مسائل تقویم‌نگاری با تعداد روزهای هفته مواجه هستیم پس باید از همنهشتی در پیمانهٔ ۷ استفاده کنیم.

۴- فرض می‌کنیم $x-y$ گنگ نباشد، پس گویاست.

$$\begin{cases} x-y=\text{گویا} \\ x+y=\text{گویا(فرض مسئله)} \end{cases} \Rightarrow x=\text{گویا}$$

که این با فرض گنگ‌بودن x در تناقض است.

فرض می‌کنیم $x+۲y$ گنگ نباشد، پس گویا است.

$$\begin{cases} x+۲y=\text{گویا} \\ x+y=\text{گویا} \end{cases} \Rightarrow y=\text{گویا}$$

که این با فرض گنگ‌بودن y در تناقض است.

در نتیجه در هر دو قسمت، فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

۵- با توجه به این‌که $x+y>۰$ مثبت است، ابتدا کل نامساوی را در $x+y$ ضرب می‌کنیم. (جهت نامساوی عوض نمی‌شود.)

$$\Leftrightarrow x^۳+y^۳ \ge (x+y)xy$$

با توجه به اتحاد چاق و لاغر داریم:

$$\Leftrightarrow (x+y)(x^۲-xy+y^۲)\ge (x+y)(xy)$$

با حذف $x+y$ از طرفین نامساوی داریم: $(x+y>۰)$

$$\Leftrightarrow (x^۲-xy+y^۲)\ge xy$$
$$\Leftrightarrow x^۲-۲xy+y^۲\ge ۰ \Leftrightarrow (x-y)^۲\ge ۰$$

رابطهٔ آخر همواره برقرار است و تمامی قسمت‌ها برگشت‌پذیرند. پس اثبات تمام است.

۶- خاصیت تعدی: اگر $a|b$ و $b|c$ آن‌گاه $a|c$.

اثبات خاصیت تعدی در عاد کردن:

$$a|b \Rightarrow \exists q\in \ ,\ b=aq$$
$$b|c \Rightarrow \exists q'\in \ ,\ c=bq'$$

اکنون b را از تساوی بالا در تساوی پایین جای‌گذاری می‌کنیم:

$$c=(aq)q'=a(\underbrace{qq'}_{q''\in})=aq'' \Rightarrow a|c$$

۷- تقسیم کلی $a=bq+r$ را در نظر می‌گیریم:

طبق فرض $n|a$ و $n|b$ در نتیجه، n هر مضرب صحیح از b را نیز عاد می‌کند؛ یعنی: برای هر $q\in$ ، $n|bq$.

$$\Rightarrow \begin{cases} n|a \\ n|bq \end{cases} \xrightarrow{\text{قانون‌تفاضل}} n|a-bq$$

که $a-bq=r$ است. پس $n|r$. یعنی r بر n بخش‌پذیر است.

۸- طبق قضیهٔ تقسیم:

$$\begin{matrix} a=۶q+۳ \\ a=۷q'+۴ \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} ۷a=۴۲q+۲۱ \\ ۶a=۴۲q'+۲۴ \end{matrix}$$
$$\xrightarrow{\text{قانون‌تفاضل}} ۷a-۶a=(۴۲q+۲۱)-(۴۲q'+۲۴)$$
$$\Rightarrow a=۴۲(\underbrace{q-q'}_{q''})+(۲۱-۲۴) \Rightarrow a=۴۲q''-۳$$

اما (-۳) به عنوان باقی‌مانده قابل قبول نیست. می‌دانیم: $-۳=۳۹-۴۲$

در نتیجه: $a=۴۲q''-۴۲+۳۹=۴۲(\underbrace{q''-۱}_{k})+۳۹ \Rightarrow a=۴۲k+۳۹$

یعنی باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۴۲ برابر ۳۹ است.

۹- طبق تعریف همنهشتی، اگر $a\overset{m}{\equiv}b$ آن‌گاه $m|a-b$. مقدار صحیح c را به طرف راست اضافه و کم می‌کنیم.

$$\Rightarrow m|a+c-b-c \Rightarrow m|(a+c)-(b+c)$$

در نتیجه، طبق تعریف همنهشتی: $a+c\overset{m}{\equiv}b+c$

به طریق مشابه برای اثبات $a-c\overset{m}{\equiv}b-c$ داریم:

$$m|a+c-b-c \Rightarrow m|(a-c)-(b-c) \Rightarrow a-c\overset{m}{\equiv}b-c$$

۱۰- ابتدا ۲۳ را بر ۱۱ تقسیم می‌کنیم:

$$۲۳=۱۱(۲)+۱ \Rightarrow ۲۳\overset{۱۱}{\equiv}۱$$

حال طرفین را به توان ۶ می‌رسانیم:

$$(۲۳)^۶\overset{۱۱}{\equiv}۱^۶ \Rightarrow (۲۳)^۶\overset{۱۱}{\equiv}۱$$

با اضافه‌کردن ۱۶ به طرفین همنهشتی داریم:

$$(۲۳)^۶+۱۶\overset{۱۱}{\equiv}۱+۱۶ \Rightarrow A\overset{۱۱}{\equiv}۱۷$$

اما ۱۷ از پیمانهٔ ۱۱ بزرگ‌تر است، در نتیجه:

$$۱۷=۱(۱۱)+۶ \Rightarrow ۱۷\overset{۱۱}{\equiv}۶ \Rightarrow A\overset{۱۱}{\equiv}۶$$

۱۱- بیان ریاضی مسئله به صورت زیر است:

$$۷x-۳\overset{۹}{\equiv}۰ \Rightarrow ۷x\overset{۹}{\equiv}۳$$

دو بار پیمانهٔ ۹تایی را به عدد ۳ اضافه می‌کنیم تا طرف راست بر ۷ بخش‌پذیر شود:

$$۷x\overset{۹}{\equiv}۳+۲(۹) \Rightarrow ۷x\overset{۹}{\equiv}۲۱$$

اکنون طرفین را بر ۷ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۷x \overset{۹}{\equiv} ۲۱ \\ (۷,۹)=۱ \end{cases} \xrightarrow{\div ۷} x \overset{۹}{\equiv} ۳ \Rightarrow x=۹q+۳$$

یعنی هر عدد صحیح به فرم $x=۹q+۳$ دارای خاصیت گفته‌شده می‌باشد.

۱۲- اولاً $(۶,۱۴)=۲$ و $۲|۱۰$، پس معادله در مجموعهٔ اعداد صحیح جواب دارد. برای حل، کل معادله را بر دو تقسیم می‌کنیم:

$$۳x+۷y=۵ \Rightarrow ۷y \overset{۳}{\equiv} ۵$$

اما $۷ \overset{۳}{\equiv} ۱ , ۵ \overset{۳}{\equiv} -۱$ در نتیجه: $y \overset{۳}{\equiv} -۱ \Rightarrow y=۳k-۱$

با جای‌گذاری y، مقدار x را محاسبه می‌کنیم:

$$۳x+۷(۳k-۱)=۵ \Rightarrow ۳x=-۲۱k+۱۲$$

$$\Rightarrow x=-۷k+۴ \Rightarrow \begin{cases} x=-۷k+۴ \\ y=۳k-۱ \end{cases} \quad k\in$$

۱۳- مجموعهٔ رئوس را با $V(G)$ و مجموعهٔ یال‌ها را با $E(G)$ نمایش می‌دهیم.

مجموعهٔ رئوس و یال‌های گراف $G_۱$ عبارت‌اند از: $V(G_۱)=\{a,b,c,d,e\}$

$E(G_۱)=\{ab,ae,bc,cd,de\}$

مجموعهٔ رئوس و یال‌های گراف $G_۲$ عبارت‌اند از: $V(G_۲)=\{a,b,c,d,e\}$

$E(G_۲)=\{ab,ae,bc,cd,de\}$

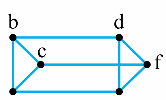
چون $V(G_۱)=V(G_۲)$ و $E(G_۱)=E(G_۲)$ پس دو نمودار داده‌شده مربوط به یک گراف هستند.

۱۴- الف)

$$\deg(a)=۱ , \deg(b)=۱ , \deg(c)=۳$$

$$\deg(d)=۱ , \deg(e)=۱ , \deg(f)=۳$$

ب) گراف ۳ـ منتظم یعنی درجهٔ همهٔ رئوس ۳ باشد. f و c که درجه‌شان ۳ است. حال اگر d به e و b وصل شود و a هم به b و e، آن‌گاه با توجه به شکل درجهٔ تمام رئوس برابر ۳ است، پس یک گراف ۳ـ منتظم مرتبهٔ ۶ داریم.



۱۵- الف) در گراف ۳ـ منتظم مرتبهٔ p، درجهٔ همهٔ رئوس برابر ۳ است پس تعداد یال‌ها $q=\frac{۳\times p}{۲}$ خواهد بود. طبق فرض اگر به این تعداد یال، ۶ یال دیگر اضافه کنیم گراف کامل حاصل می‌شود. در نتیجه:

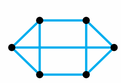
$$\frac{۳p}{۲}+۶=\frac{p(p-۱)}{۲}$$

که $\frac{p(p-۱)}{۲}$ تعداد یال‌های گراف کامل k_p است.

$$\Rightarrow ۳p+۱۲=p^۲-p \Rightarrow p^۲-۴p-۱۲=۰$$

$$\Rightarrow (p-۶)(p+۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} p=۶ \Rightarrow q=\frac{۳\times ۶}{۲}=۹ \\ p=-۲ \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

ب) باید یک گراف ۳ـ منتظم مرتبهٔ ۶ (که دارای ۹ یال خواهد بود) رسم کنیم.



۱۶- الف) مسیر از a به c یعنی از a شروع کنیم.

abedc $\Rightarrow$ طول مسیر $=۴$ یا adebc $\Rightarrow$ طول مسیر $=۴$

ب) ۳تا دور به طول ۴ دارد که عبارت‌اند از:

abeda　　abcda　　cbedc

آزمون شمارهٔ ۲ (نوبت اول)

۱- الف) $(a,b)=d$ اگر و تنها اگر:

۱) $d|a , d|b$

۲) $\forall m>۰ : m|a , m|b \Rightarrow m\le d$

ب) $a|b \Rightarrow [a,b]=|b|$

پ) $[۱]_۴=\{x\in \ | x=۴k+۱\}$

ت) $A \overset{۹}{\equiv} ۱+۳+۵+۸+۱+۱+۲ \overset{۹}{\equiv} ۲۱ \overset{۹}{\equiv} ۳$

$A \overset{۱۱}{\equiv} ۱-۳+۵-۸+۱-۱+۲ \overset{۱۱}{\equiv} -۳ \overset{۱۱}{\equiv} ۸$

۲- الف) درست

ب) نادرست؛ معادلهٔ همنهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ دارای جواب است اگر و تنها اگر $(a,m)|b$.

۳- الف) نادرست، مثال نقض: $x=\frac{۱}{۲} \Rightarrow x^۲=\frac{۱}{۴}$

واضح است که $x^۲$ از x بزرگ‌تر نیست.

ب) دو عدد صحیح زوج متوالی را $۲k+۲ , ۲k$ در نظر می‌گیریم:

$$(۲k)(۲k+۲)=۴k^۲+۴k=۴k(k+۱)$$

اما $k(k+۱)$ ضرب دو عدد صحیح متوالی است. پس حتماً زوج است. لذا $k(k+۱)$ را می‌توان به فرم $۲k'$ نوشت: $\Rightarrow ۴(۲k')=۸k'$

یعنی ضرب موردنظر مضرب ۸ است.

۴- فرض می‌کنیم n فرد نباشد (فرض خلف)، پس n زوج است.

$$n=۲k \Rightarrow n^۲=(۲k)^۲=۴k^۲=۲(\underbrace{۲k^۲}_{k'})=۲k'=\text{زوج}$$

یعنی $n^۲$ زوج می‌شود که این با فرض فردبودن $n^۲$ در تناقض است. لذا فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

۵-

$$\frac{۱}{\sqrt{x}}+\frac{۱}{\sqrt{y}} \ge \frac{۴}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

در طرف چپ مخرج‌مشترک می‌گیریم:

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}\sqrt{y}} \ge \frac{۴}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

چون x و y مثبت هستند با عمل طرفین‌وسطین داریم:

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}+\sqrt{y})^۲ \ge ۴\sqrt{xy} \Leftrightarrow x+y+۲\sqrt{xy} \ge ۴\sqrt{xy}$$

$$\Leftrightarrow x+y-۲\sqrt{xy} \ge ۰ \Leftrightarrow (\sqrt{x}-\sqrt{y})^۲ \ge ۰$$

رابطهٔ اخیر همواره مثبت است و همهٔ روابط برگشت‌پذیر هستند، لذا اثبات تمام است.

۶- فرض می‌کنیم $a|b$ و $a|c$. باید نشان دهیم: $a|b\pm c$

$$\begin{cases} a|b \Rightarrow \exists q\in \ ; b=aq \\ a|c \Rightarrow \exists q'\in \ ; c=aq' \end{cases}$$

از جمع و تفریق دو طرف تساوی داریم:

$$b\pm c=aq\pm aq'=a(\underbrace{q\pm q'}_{q''\in}) \Rightarrow b\pm c=aq'' \Rightarrow a|b\pm c$$

۷- دو عدد صحیح و فرد متوالی را با $۲k+۱$ و $۲k+۳$ نشان می‌دهیم. فرض می‌کنیم $(۲k+۱,۲k+۳)=d$ باشد. در نتیجه:

$$\begin{cases} d|۲k+۳ \\ d|۲k+۱ \end{cases} \xrightarrow{\text{قانون تفاضل}} d|(۲k+۳)-(۲k+۱) \Rightarrow d|۲$$

در نتیجه $d=۱$ یا $d=۲$.

اگر $d=۱$ باشد که مسئله تمام است و هر دو عدد صحیح فرد متوالی نسبت به هم اول خواهند بود.

اگر $d=۲$ باشد آن‌گاه چون $d|۲k+۳$ و $d|۲k+۱$ پس یک عدد زوج دو عدد فرد را عاد کرده است که این امکان ندارد. پس نسبت به هم اولند.

۱۵- تعداد گل نوع اول را با x_1، تعداد گل نوع دوم را با x_2، ... و تعداد گل نوع پنجم را با x_5 نشان می‌دهیم:

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=16$$

شروط انتخاب: $x_3=3$ $x_4\ge 3$ $x_5\ge 5$

$$\Rightarrow x_1+x_2+3+x_4+x_5=16$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_4+x_5=13 \\ x_1\ge 0 \\ x_2\ge 0 \\ x_4\ge 3 \\ x_5\ge 5 \end{cases}$$

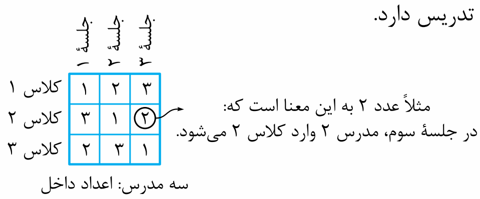
جمع شرطها: $3+5=8$

$$\Rightarrow 13-8=5$$

$$\binom{5+3}{3}=\binom{8}{3}=\frac{8\times 7\times 6}{3\times 2\times 1}=56$$

۱۶- فرض کنیم هر سطر نشان‌دهندهٔ هر کلاس و اعداد ۱، ۲ و ۳ در مربع لاتین نمایانگر مدرس‌های حاضر در کلاس باشند.

طبق مربع لاتین 3×3 زیر، هر مدرس در هر جلسه در یک کلاس حاضر می‌شود و در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس دارد.



۱۷- $S=\{n\in \ \ |1\le n\le 630\}$

$A=\{$اعداد بخش‌پذیر بر ۳$\}$

$$|A|=[\frac{630}{3}]=210$$

$B=\{$اعداد بخش‌پذیر بر ۵$\}$

$$|B|=[\frac{630}{5}]=126$$

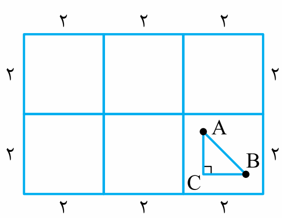
$A\cap B=\{$اعداد بخش‌پذیر بر ۱۵$\}$

$$|A\cap B|=[\frac{630}{15}]=42$$

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=210+126-42=294$$

تعداد اعدادی که نه بر ۳ و نه بر ۵ بخش‌پذیرند، مد نظر است. $\Rightarrow 630-294=336$

۱۸- ابتدا مستطیل مورد نظر را به ۶ مربع به ضلع ۲ تقسیم می‌کنیم. هر قسمت را یک لانه فرض می‌کنیم و هفت نقطه را هفت کبوتر در نظر می‌گیریم. طبق اصل لانه‌کبوتری، حداقل یک لانه وجود دارد که شامل دو کبوتر است. با توجه به قضیهٔ فیثاغورس داریم:



$$AB^2=AC^2+BC^2$$

$$\Rightarrow AB^2<2^2+2^2 \Rightarrow AB^2<8 \Rightarrow AB<\sqrt{8}$$

آزمون شمارهٔ ۹ (نوبت دوم)

۱- الف) نادرست

اگر $a|b$ و $b\neq 0$، در این صورت $|a|\le|b|$

ب) درست (تعریف ک.م.م)

پ) درست

ت) نادرست $(-2,4)=|-2|=2$

۲- $n=2k$ زوج

$$\Rightarrow n^2-5n+7=(2k)^2-5(2k)+7=4k^2-10k+7$$

$$=\underbrace{4k^2-10k+6}+1=2\underbrace{(2k^2-5k+3)}+1=2k'+1=\text{فرد}$$

۳-

$$5|4k+1 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 25|(4k+1)^2 \Rightarrow 25|16k^2+8k+1 \quad (1)$$

از طرفی از رابطهٔ $5|4k+1$ می‌توان طرفین را در ۵ ضرب کرد:

$$25|20k+5 \quad (2)$$

از جمع دو رابطهٔ (۱) و (۲) داریم: $25|16k^2+28k+6$

۴- $A=27^{20}+18\overset{13}{\equiv}?$

اولاً: $27\overset{13}{\equiv}1$ در نتیجه:

$$27^{20}\overset{13}{\equiv}1^{20} \Rightarrow 27^{20}\overset{13}{\equiv}1 \Rightarrow 27^{20}+18\overset{13}{\equiv}1+18\overset{13}{\equiv}19\overset{13}{\equiv}6 \Rightarrow A\overset{13}{\equiv}6$$

۵- تعداد روزهای بین اول مهر تا ۱۲ بهمن را حساب می‌کنیم:

بهمن	دی	آذر	آبان	مهر
۱۲	۳۰	۳۰	۳۰	۳۰−۱

$$\Rightarrow 29+30+30+30+12=131$$

اکنون ۱۳۱ را در هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۷ محاسبه می‌کنیم: $131\overset{7}{\equiv}5$

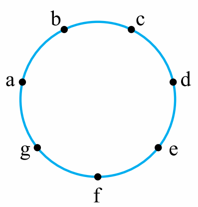
شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه	پنجشنبه	جمعه
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

عدد ۵ متناظر با پنجشنبه است؛ پس ۱۲ بهمن‌ماه پنجشنبه است.

۶- الف) رأس فرد   ب) گراف تهی

پ) $q=\frac{4\times 3}{2}=6$ ت) همبند

۷- الف)



مسیر به طول ۵ از a به f: abcdef است.

ب) $N_G(c)$ یعنی مجموعهٔ همسایگی باز رأس c، که شامل رأس‌هایی می‌باشد که به c متصل‌اند. $N_G(c)=\{b,d\}$

۸- الف) مجموعهٔ احاطه‌گر D را مینیمال می‌نامیم، هرگاه با حذف هر یک از اعضای آن، مجموعهٔ D، دیگر احاطه‌گر نباشد.

ب) توجه کنید که فقط یک مجموعهٔ احاطه‌گر ۴عضوی (نه مینیمم و نه مینیمال) خواسته است. $D=\{h,f,b,g\}$

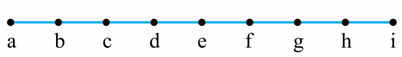
۹- $n=$ تعداد رئوس $=8$

$\Delta=$ بیشترین درجه $=3$

طبق قضیه: $\gamma(G)\ge\left\lceil\frac{n}{\Delta+1}\right\rceil=\left\lceil\frac{8}{4}\right\rceil=2 \Rightarrow \gamma(G)\ge 2$

از طرفی مجموعهٔ $D=\{a,c,e\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم است. تعداد عضوهای مجموعهٔ D ۳تاست و در نتیجه: $\gamma(G)=3$

۱۰-



$D_{\text{مینیمم}}=\{b,e,h\}$

توجه کنید که در گراف P_9 طبق قضیه می‌دانیم: $\gamma(G)=\left\lceil\frac{9}{3}\right\rceil=3$

پس تعداد عضو مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم باید ۳ عضو باشد.

۱۱- الف) γ ـ مجموعه، یعنی مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم:

$D_{\text{مینیمم}}=\{c,f,g\}$ یا $D_{\text{مینیمم}}=\{c,h,e\}$

ب) $D_{\text{مینیمال}}=\{a,f,g,b\}$

۱۲- الف) کتاب‌های تاریخ را در یک دسته قرار می‌دهیم. جایگشت داخل دسته !۶ و جایگشت کل دسته با کتاب‌های ادبیات نیز !۶ است. $\Rightarrow 6!\times 6!$

ب) $6!\times 5!$

۱۳-
$$\frac{9!}{\underbrace{3!}_{\text{تعداد تکرارهای عدد ۱}}\;\underbrace{2!}_{\text{تعداد تکرارهای عدد ۳}}}$$

۱۴-
$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=12$$

طبق فرض $x_3=4$ در نتیجه:
$$x_1+x_2+4+x_4+x_5+x_6=12$$
$$\Rightarrow x_1+x_2+x_4+x_5+x_6=8$$

و شرطها عبارت‌اند از:
$$x_1\ge 0 \qquad x_5>2 \Rightarrow x_5\ge 3$$
$$x_2\ge 0 \qquad x_6\ge 0$$
$$x_4\ge 0$$

مجموع شرطها برابر ۳ است و ۵ = ۳ − ۸.

$$\Rightarrow \binom{5+4}{4}=\binom{9}{4}=\frac{9\times 8\times 7\times 6}{4\times 3\times 2\times 1}=9\times 2\times 7=18\times 7=126$$

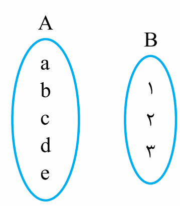
۱۵- الف) با توجه به جایگشت داده‌شده تغییرات را روی A اعمال می‌کنیم:

$$B=\begin{bmatrix}4&1&3&2\\2&3&1&4\\3&2&4&1\\1&4&2&3\end{bmatrix}$$

ب)
$$AB=\begin{bmatrix}34&41&13&22\\22&13&41&34\\13&22&34&41\\41&34&22&13\end{bmatrix}$$

خیر متعامد نیستند، زیرا عدد دورقمی تکراری (مانند ۳۴) داریم.

۱۶- تعداد توابع پوشا از یک مجموعهٔ ۵عضوی به یک مجموعهٔ ۳عضوی مد نظر است:



ابتدا تعداد کل توابع از A به B برابر است با: 3^5

حال تعداد توابع غیرپوشا را محاسبه می‌کنیم:

«فاقد» ۱: 2^5

«فاقد» ۲: 2^5

«فاقد» ۳: 2^5

«فاقد» ۱ و ۲: 1^5

«فاقد» ۱ و ۳: 1^5

«فاقد» ۲ و ۳: 1^5

«فاقد» ۱ و ۲ و ۳: 0^5

$$\Rightarrow 2^5+2^5+2^5-1^5-1^5-1^5+0^5=32+32+32-1-1-1=93$$

$$\text{تعداد توابع پوشا}=3^5-93=243-93=150$$

۱۷- تعداد لانه‌ها: $7\times 12=84$

تعداد کبوترها: 505

$$\begin{array}{r|l}505 & 84\\ \underline{504} & 6\\ 1 & \end{array}$$

یعنی ۸۴ لانه، هر کدام ۶ بار تکمیل شده‌اند و هنوز ۱ کبوتر باقی مانده است که یکی از لانه‌ها را ۷تایی می‌کند؛ پس حداقل ۷ کبوتر در یک لانه قرار می‌گیرند.

در نتیجه حداقل ۷ دانش‌آموز روز، هفته و ماه تولد یکسان دارند.

برای به دست آوردن تعداد حداقل دانش‌آموز، می‌توان از تساوی زیر نیز استفاده کرد:

$$(k-1)\times \text{تعداد لانه}+1=(7-1)\times 84+1=6\times 84+1=505$$

آزمون شمارهٔ ۱۰ (نوبت دوم)

۱- الف) درست

ب) درست
$$(3m+1,3m+2)=d$$
$$\Rightarrow \begin{cases}d\mid 3m+1\\ d\mid 3m+2\end{cases}\xrightarrow{\text{تفاضل}} d\mid (3m+2)-(3m+1)$$
$$\Rightarrow d\mid 1\Rightarrow d=1$$

پ) نادرست؛ تعداد رئوس فرد هر گراف، عددی زوج است.

ت) نادرست؛ در گراف P_{10}، $n=10$ و $\Delta=2$ داریم:
$$\gamma(G)=\left\lceil\frac{10}{2+1}\right\rceil=\left\lceil\frac{10}{3}\right\rceil=4$$

۲- الف) $p-1$

طبق فرض، عدد احاطه‌گری ۱ است؛ پس با یک رأس همهٔ رئوس گراف احاطه شده‌اند، یعنی یک رأس به بقیهٔ رئوس دیگر وصل است. p رأس داریم پس $p-1$ تا یال حداقل نیاز داریم.

ب) ۴، زیرا مجموع درایه‌های روی قطر اصلی، ۴ = ۱+۱+۱+۱ است.

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

پ)
$$(5)_3=\frac{5!}{(5-3)!}=\frac{5!}{2!}=\frac{5\times 4\times 3\times 2\times 1}{2\times 1}=60$$

۳-
$$x^2+y^2+1\ge 2xy-z^2$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2-2xy+z^2+1\ge 0$$
$$\Leftrightarrow (x-y)^2+(z^2+1)\ge 0$$

همواره بدیهی است.

۴-
$$\begin{cases}a\mid 2m+3\\ a\mid m+7\end{cases}\xrightarrow{\times 2}\begin{cases}a\mid 2m+3\\ a\mid 2m+14\end{cases}$$
$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} a\mid (2m+14)-(2m+3)\Rightarrow a\mid 14-3$$
$$\Rightarrow a\mid 11\xrightarrow[\text{نامنفی}]{\text{صحیح و}} a=1 \text{ یا } 11$$

۵-
$$\begin{cases}a=5q+4 \xrightarrow{\times 4}\\ a=4q'+3 \xrightarrow{\times 5}\end{cases}\begin{cases}4a=20q+16\\ 5a=20q'+15\end{cases}$$
$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} a=20(q'-q)+(15-16)$$
$$\Rightarrow a=20q''+(-1)$$
$$\text{باقی‌مانده}=r=-1+20=19$$

۶-
$$15x+19y=7$$

اولاً: $(15,19)=1$ و $1\mid 7$

پس معادلهٔ سیاله در مجموعهٔ اعداد صحیح جواب دارد.

ثانیاً: $15x\overset{19}{\equiv}7$

$7\overset{19}{\equiv}-12$ و $15\overset{19}{\equiv}-4$

$$\Rightarrow -4x\overset{19}{\equiv}-12\xrightarrow[(4,19)=1]{\div(-4)} x\overset{19}{\equiv}3$$
$$\Rightarrow x=19k+3,\ k\in$$

بزرگ‌ترین عدد ۲رقمی طبیعی برای x، به ازای $k=5$ حاصل می‌شود.

$$x=19(5)+3=95+3=98$$

فصل ۱: آشنایی با نظریهٔ اعداد

درس ۱: استدلال ریاضی

مثال نقض: به مثالی که نشان دهد یک نتیجه‌گیری کلی غلط است مثال نقض می‌گوییم.

مثال **برای نتیجه‌گیری‌های کلی زیر مثال نقض بیاورید.**

الف) برای هر عدد حقیقی x و y؛ $\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

ب) مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.

پ) مجموع هر دو عدد اول، عددی مرکب است.

ت) عدد $2^{2^n}+1$ به ازای همهٔ عددهای طبیعی n، عددی اول است.

ث) برای هر عدد طبیعی n، عدد 3^n+4 اول است.

ج) هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع اعداد طبیعی متوالی نوشت.

پاسخ الف) قرار می‌دهیم $x=16$ و $y=9$ آن‌گاه:

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{x+y}=\sqrt{9+16}=5\\ \sqrt{x}=\sqrt{16}=4\\ \sqrt{y}=\sqrt{9}=3\end{array}\right\}5\neq 4+3$$

ب) اگر دو عدد گنگ را $\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$ در نظر بگیریم، آن‌گاه: $\sqrt{3}+(-\sqrt{3})=0$ و صفر عددی گویاست.

پ) برای دو عدد اول ۲ و ۳، مجموع آن‌ها ۵ می‌شود که عددی مرکب نیست.

ت) برای $n=1,2,3,4$ حاصل $2^{2^n}+1$ اول است، اما برای $n=5$ داریم:

$$2^{2^5}+1=2^{32}+1=641\times 6700417$$

که عددی اول نیست.

ث) برای $n=1,2,3$، حاصل 3^n+4 اول است، اما برای $n=4$ داریم:

$$3^4+4=81+4=85$$

و ۸۵ عددی اول نیست.

ج) برای $n=2$ گزاره برقرار نیست. زیرا عدد ۲ را نمی‌توان به صورت مجموع دو عدد طبیعی متوالی نوشت. (هر عدد به فرم $n=2^k$، $k\in$ مثال نقض است.)

تذکر دیدیم که مثال نقض، روشی برای نشان‌دادن نادرستی یک گزاره است. برای اثبات درستی یک گزاره، روش‌های مختلفی وجود دارد که عبارت‌اند از: اثبات با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها، اثبات مستقیم، اثبات غیرمستقیم یا برهان خلف و اثبات به روش بازگشتی.

اثبات با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها

گاهی برای اثبات یک گزاره لازم است همهٔ موارد ممکن در مورد مسئله را در نظر بگیریم.

مثال **ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n، n^2+n عددی زوج است.**

پاسخ با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌های ممکن برای n، مسئله را اثبات می‌کنیم.

حالت اول n زوج باشد، در این صورت: $n=2k\ ;k\in$

$$\Rightarrow\ n^2+n=(2k)^2+2k=4k^2+2k=2(\underbrace{2k^2+k}_{k'})=2k'$$

پس n^2+n زوج است.

حالت دوم n فرد باشد، در این صورت: $n=2k+1\ ;\ k\in W$

$$\Rightarrow\ n^2+n=(2k+1)^2+(2k+1)$$

$$=4k^2+4k+1+2k+1=4k^2+6k+2=2(\underbrace{2k^2+3k+1}_{k'})=2k'$$

پس همواره n^2+n زوج است.

مثال **فرض کنید $A=\{1,2,3,4,5\}$ و $B=\{3,4\}$. اگر $x\in A$ و $\frac{x^2(x+1)^2}{4}$ زوج باشد، ثابت کنید $x\in B$.**

پاسخ با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌های $x\in A$، مسئله را ثابت می‌کنیم.

$$x=1\ \Rightarrow\ \frac{x^2(x+1)^2}{4}=\frac{1\times 4}{4}=1$$

حاصل زوج نیست، پس مورد بحث قرار نمی‌گیرد.

$$x=2\ \Rightarrow\ \frac{x^2(x+1)^2}{4}=\frac{4\times 9}{4}=9$$

حاصل زوج نیست، پس مورد بحث قرار نمی‌گیرد.

$$x=3\ \Rightarrow\ \frac{x^2(x+1)^2}{4}=\frac{9\times 16}{4}=36$$

حاصل زوج است و مشخص است که $x=3$ عضو B است.

$$x=4\ \Rightarrow\ \frac{x^2(x+1)^2}{4}=\frac{16\times 25}{4}=100$$

حاصل زوج است و مشخص است که $x=4$ عضو B است.

$$x=5\ \Rightarrow\ \frac{x^2(x+1)^2}{4}=\frac{25\times 36}{4}=225$$

حاصل زوج نیست، پس مورد بحث قرار نمی‌گیرد.

مثال **با در نظر گرفتن همهٔ حالت‌های ممکن، ثابت کنید حاصل‌ضرب هر سه عدد طبیعی متوالی همواره بر ۶ بخش‌پذیر است.**

پاسخ در مثال اول این بخش ثابت کردیم برای هر عدد طبیعی n، n^2+n زوج است. $n^2+n=n(n+1)=$ ضرب دو عدد متوالی

یعنی ضرب دو عدد متوالی، همواره زوج است و در نتیجه ضرب سه عدد متوالی نیز همواره زوج خواهد بود؛ پس بر ۲ بخش‌پذیر است. در ادامه نشان می‌دهیم ضرب سه عدد متوالی بر ۳ هم بخش‌پذیر است که از این دو نتیجه می‌گیریم که ضرب سه عدد متوالی بر ۶ بخش‌پذیر است.

با در نظر گرفتن حالت‌های $n=3k$، $n=3k+1$ و $n=3k+2$ داریم:

$$n=3k\ \Rightarrow\ n(n+1)(n+2)=(3k)(3k+1)(3k+2)$$

$$=3(\underbrace{k(3k+1)(3k+2)}_{k'})=3k'$$

$$n=3k+1\ \Rightarrow\ n(n+1)(n+2)=(3k+1)(3k+2)(3k+3)$$

$$=(3k+1)(3k+2)(3)(k+1)=3(\underbrace{(3k+1)(3k+2)(k+1)}_{k'})=3k'$$

$$n=3k+2\ \Rightarrow\ n(n+1)(n+2)=(3k+2)(3k+3)(3k+4)$$

$$=(3k+2)(3)(k+1)(3k+4)=3(\underbrace{(3k+2)(k+1)(3k+4)}_{k'})=3k'$$

پس در هر سه حالت ممکن، $n(n+1)(n+2)$ مضرب ۳ است. در نتیجه $n(n+1)(n+2)$ مضرب ۶ است.

اثبات به روش مستقیم

در روش مستقیم به کمک فرض و با استفاده از حقایقی که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم، حکم را نتیجه می‌گیریم.

مثال **نشان دهید مربع هر عدد فرد به صورت $۸q+۱$ است.**

پاسخ فرض می‌کنیم n عددی فرد باشد، آن‌گاه:

$$n=۲k+۱, k\in \quad \Rightarrow \quad n^۲=(۲k+۱)^۲=۴k^۲+۴k+۱=۴\underbrace{k(k+۱)}+۱$$

اما k و $k+۱$ دو عدد متوالی‌اند، پس حاصل‌ضرب آن‌ها همواره زوج است. در نتیجه $k(k+۱)=۲q$؛ بنابراین:

$$n^۲=۴(۲q)+۱=۸q+۱$$

مثال **اگر a و b دو عدد صحیح باشند و ab عددی فرد باشد، ثابت کنید؛ $a^۲+b^۲$ زوج است.**

پاسخ می‌دانیم حاصل‌ضرب دو عدد صحیح a و b زمانی فرد است که هر دوی آن‌ها فرد باشند، پس:

$ab=$ فرد $\Rightarrow$ $a=$ فرد ، $b=$ فرد

در مثال قبل ثابت کردیم مربع هر عدد فرد به صورت $۸q+۱$ است. در نتیجه:

$$\begin{cases}a^۲=۸q+۱\\ b^۲=۸q'+۱\end{cases}\Rightarrow \begin{aligned}a^۲+b^۲&=۸q+۱+۸q'+۱\\&=۸q+۸q'+۲=۸(q+q')+۲\\&=۲(\underbrace{۴(q+q')+۱}_{k})=۲k=\text{زوج}\end{aligned}$$

اثبات غیرمستقیم (برهان خلف)

در روش برهان خلف، فرض می‌کنیم که حکم نادرست باشد، سپس با استفاده از این فرض (که فرض خلف نامیده می‌شود) و فرض اولیه و حقایقی که از قبل درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم، به یک نتیجهٔ غیرممکن یا متضاد با فرض اولیه می‌رسیم.

مثال **به روش برهان خلف ثابت کنید؛ اگر $n^۲$ عددی گنگ باشد، آن‌گاه n نیز عددی گنگ است.**

پاسخ فرض می‌کنیم n گنگ نباشد (فرض خلف)، در نتیجه n گویاست. می‌دانیم حاصل‌ضرب هر دو عدد گویا، گویاست. پس $n\times n=n^۲$ نیز گویاست. این نتیجه با فرض اولیهٔ مسئله که «$n^۲$ گنگ است» متضاد است. بنابراین فرض خلف باطل و n گنگ خواهد بود.

مثال **به روش برهان خلف ثابت کنید؛ معکوس هر عدد گنگ، گنگ است.**

پاسخ ابتدا مسئله را به زبان ریاضی بیان می‌کنیم: می‌خواهیم ثابت کنیم: اگر x گنگ باشد، آن‌گاه $\frac{۱}{x}$ نیز گنگ است. برای اثبات فرض می‌کنیم $\frac{۱}{x}$ گنگ نباشد، (فرض خلف) پس $\frac{۱}{x}$ گویا است. بنابراین برابر عدد گویای ناصفری مانند $\frac{a}{b}$ است که a و $b\neq ۰$ ، $a,b\in$

$$\frac{۱}{x}=\frac{a}{b}\Rightarrow x=\frac{b}{a}=\text{گویا}$$

یعنی x هم گویا است و این با فرض اولیهٔ مسئله در تضاد است. بنابراین فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

مثال **به روش برهان خلف ثابت کنید؛ اگر n عدد طبیعی و $n^۲$ مضرب ۵ باشد، آن‌گاه n نیز مضرب ۵ است.**

پاسخ فرض می‌کنیم n مضرب ۵ نباشد (فرض خلف) در نتیجه از تقسیم n بر ۵، باقی‌ماندهٔ غیرصفر خواهیم داشت: $n=۵q+r$ ، $r=۱$ یا ۲ یا ۳ یا ۴

$$\Rightarrow n^۲=۲۵q^۲+۱۰qr+r^۲$$

$$=۵(\underbrace{۵q^۲+۲qr}_{k})+r^۲=۵k+r^۲$$

اگر $r=۱$، آن‌گاه: $n^۲=۵k+۱$

اگر $r=۲$، آن‌گاه: $n^۲=۵k+۴$

اگر $r=۳$، آن‌گاه: $n^۲=۵k+۹=\underbrace{۵k+۵}_{۵(k+۱)}+۴=۵k'+۴$

اگر $r=۴$، آن‌گاه: $n^۲=۵k+۱۶=\underbrace{۵k+۱۵}_{۵(k+۳)}+۱=۵k'+۱$

پس $n^۲$ در تقسیم بر ۵، دارای باقی‌ماندهٔ غیرصفر است؛ یعنی $n^۲$ نمی‌تواند مضرب ۵ باشد و این نتیجه با فرض اولیه متضاد است. پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

اثبات بازگشتی

دو حکم را معادل یا هم‌ارز می‌گوییم هرگاه بتوان درستی هر یک را از درستی دیگری نتیجه گرفت. گاهی برای اثبات یک حکم، آن را به حکمی ساده‌تر تبدیل می‌کنیم که با حکم اولیه هم‌ارز باشد و این کار را آن‌قدر ادامه می‌دهیم تا به حکمی برسیم که درستی آن معلوم است.

به این ترتیب بازگشت از حکم آخر، درستی حکم اولیه را نتیجه می‌دهد. به این روش، اثبات بازگشتی می‌گوییم.

مثال **به روش بازگشتی ثابت کنید؛ اگر $x,y>۰$ آن‌گاه $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq ۲$**

پاسخ

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq ۲ \Leftrightarrow \frac{x^۲+y^۲}{xy}\geq ۲$$

کل نامساوی را در xy ضرب می‌کنیم. چون x و y هر دو مثبت هستند، جهت نامساوی عوض نمی‌شود.

$$\Leftrightarrow x^۲+y^۲\geq ۲xy$$

$$\Leftrightarrow x^۲+y^۲-۲xy\geq ۰$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^۲\geq ۰$$

رابطهٔ آخر همواره برقرار است و تمامی روابط برگشت‌پذیرند. بنابراین حکم ثابت شده است.

مثال **به روش بازگشتی نشان دهید برای هر سه عدد حقیقی x و y و z داریم: $x^۲+y^۲+z^۲\geq xy+yz+zx$**

پاسخ کل نامساوی را در عدد ۲ ضرب می‌کنیم:

$$x^۲+y^۲+z^۲\geq xy+yz+zx$$

$$\Leftrightarrow ۲x^۲+۲y^۲+۲z^۲\geq ۲xy+۲yz+۲zx$$

$$\Leftrightarrow x^۲+x^۲+y^۲+y^۲+z^۲+z^۲\geq ۲xy+۲yz+۲zx$$

$$\Leftrightarrow (x^۲+y^۲-۲xy)+(x^۲+z^۲-۲zx)+(y^۲+z^۲-۲yz)\geq ۰$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^۲+(x-z)^۲+(y-z)^۲\geq ۰$$

رابطهٔ آخر همواره برقرار است و تمامی روابط برگشت‌پذیرند پس حکم ثابت شده است.

مثال **اگر n یک عدد طبیعی باشد آیا زوج‌بودن n و زوج‌بودن $n^۲$ هم‌ارزند؟ چرا؟**

پاسخ بله هم‌ارزند. برای اثبات باید نشان دهیم: n زوج است. $\Leftrightarrow$ $n^۲$ زوج است.

مرحلهٔ ۱ فرض می‌کنیم n زوج باشد، آن‌گاه:

$$n=۲k\Rightarrow n^۲=۴k^۲=۲(\underbrace{۲k^۲}_{k'})=۲k'$$

پس $n^۲$ هم زوج است.

مرحلهٔ ۲ فرض می‌کنیم $n^۲$ زوج باشد آن‌گاه نشان می‌دهیم n نیز زوج است. به روش برهان خلف؛ فرض می‌کنیم n زوج نباشد. (فرض خلف) پس n فرد است.

$$n=۲k+۱\Rightarrow n^۲=(۲k+۱)^۲=۴k^۲+۴k+۱$$

$$=۲(\underbrace{۲k^۲+۲k}_{k'})+۱=۲k'+۱$$

یعنی $n^۲$ نیز فرد می‌شود که با فرض زوج‌بودن $n^۲$ متضاد است. پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است.