ساختار کتاب

کتاب شب امتحان **حسابان (۲) دوازدهم** از ۴ قسمت اصلی به صورت زیر تشکیل شده است:

۱) آزمون‌های نوبت اول: آزمون‌های شمارهٔ ۱ تا ۴ این کتاب مربوط به مباحث نوبت اول است که خودش به دو قسمت تقسیم می‌شود:

الف) آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده: آزمون‌های شمارهٔ ۱ و ۲ را فصل به فصل طبقه‌بندی کرده‌ایم. بنابراین شما به راحتی می‌توانید پس از خواندن هر فصل از درس‌نامه تعدادی سؤال را بررسی کنید. حواستان باشد این آزمون‌ها ۲۰ نمره‌ای و مثل یک آزمون کامل هستند. در کنار سؤال‌های این آزمون‌ها **نکات مشاوره‌ای** نوشته‌ایم. این نکات به شما در درس‌خواندن قبل از امتحان و پاسخگویی به آزمون در زمان امتحان کمک می‌کند.

ب) آزمون طبقه‌بندی‌نشده: آزمون‌های شمارهٔ ۳ و ۴ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم تا دو آزمون نوبت اول، مشابه آزمونی که معلمتان از شما خواهد گرفت، ببینید.

۲) آزمون‌های نوبت دوم: آزمون‌های شمارهٔ ۵ تا ۱۲ امتحان‌های نهایی برگزارشده در سال‌های ۱۴۰۰ تا ۱۴۰۲ هستند. این قسمت هم، خودش به ۲ بخش تقسیم می‌شود:

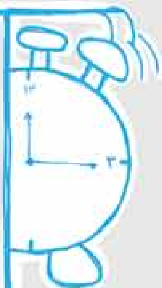
الف) آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده: آزمون‌های شمارهٔ ۵ تا ۸ آزمون‌های نهایی خرداد و شهریور ۱۴۰۰، دی ۱۴۰۰ و دی ۱۴۰۱ هستند که طبقه‌بندی کرده‌ایم. با این کار باز هم می‌توانید پس از خواندن هر فصل تعدادی سؤال مرتبط را پاسخ دهید. هر کدام از این آزمون‌ها هم، ۲۰ نمره دارند. در واقع در این بخش، شما ۴ آزمون کامل را می‌بینید. این آزمون‌ها هم **نکات مشاوره‌ای** دارند.

ب) آزمون‌های طبقه‌بندی‌نشده: آزمون‌های شمارهٔ ۹ تا ۱۲ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم؛ پس، در این بخش با ۴ آزمون نوبت دوم، مشابهِ آزمون پایان سال معلمتان مواجه خواهید شد. این آزمون‌ها به ترتیب امتحان‌های نهایی خرداد ۱۴۰۱ و خرداد ۱۴۰۲، شهریور ۱۴۰۱ و شهریور ۱۴۰۲ هستند.

۳) پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون‌ها: در پاسخ تشریحی آزمون‌ها تمام آن‌چه را که شما باید در امتحان بنویسید تا نمرهٔ کامل کسب کنید، برایتان نوشته‌ایم.

۴) درس‌نامهٔ کامل شب امتحانی: این قسمت برگ برندهٔ شما نسبت به کسانی است که این کتاب را نمی‌خوانند در این قسمت تمام آن‌چه را که شما برای گرفتن نمرهٔ عالی در امتحان حسابان (۲) نیاز دارید، تنها در ۱۵ صفحه آورده‌ایم، بخوانید و لذتش را ببرید!

یک راهکار: موقع امتحان‌های نوبت اول می‌توانید از سؤال‌های فصل‌های اول تا سوم آزمون‌های ۵ تا ۸ هم استفاده کنید.



فهرست

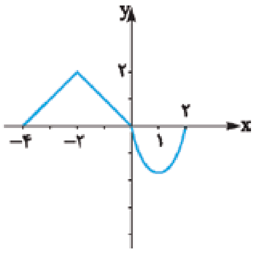
بارم‌بندی درس حسابان (۲)

فصل‌ها	پایانی نوبت اول	پایانی نوبت دوم	شهریور و دی
اول	۷	۲/۵	۳/۵
دوم	۶	۲	۳
سوم	۷	۲/۵	۳
چهارم	—	۷	۶
پنجم	—	۶	۴/۵
جمع	۲۰	۲۰	۲۰

ردیف	آزمون شمارهٔ ۱	نوبت اول پایهٔ دوازدهم دورهٔ متوسطهٔ دوم	نمره

فصل اول

۱ نمودار تابع $f(x)$ به صورت مقابل داده شده است.
نمودارهای $y_1 = -2f(x)$ و $y_2 = -f(-\frac{1}{2}x)$ را رسم کنید.



ترتیب رسم مرحله‌به‌مرحلهٔ نمودارها برای این سؤال مهمه. ۱/۵

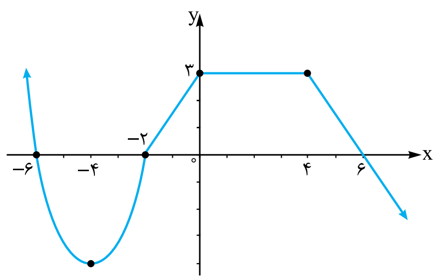
۲ جاهای خالی را تکمیل کنید.
الف) اگر نقطهٔ $A(-1,1)$ روی تابع $f(x)$ باشد، پس از انتقال، مختصات نقطهٔ A روی تابع $y = \frac{1}{2}f(x+1)$ برابر است با ....
ب) اگر دامنهٔ تابع $f(x)$ برابر $[-1,4]$ باشد، دامنهٔ تابع $y = -3f(x-1)$ برابر است با ....

سؤال و جواب‌های تک‌کلمه‌ای. یادت باشه برای این سؤالات فقط جواب آخر مهمه نه راه‌حل! ۰/۵

۳ تابع $f(x) = (x+1)^3 - 2$ را در نظر بگیرید.
الف) نمودار f را به کمک نمودار تابع $y = x^3$ رسم کنید.
ب) نشان دهید f وارون‌پذیر است و نمودار f^{-1} را رسم کنید.
پ) ضابطهٔ f^{-1} را بنویسید.

رسم تابع f را باید فقط با انتقال‌ها انجام دهید. تابع f^{-1} هم حتماً باید به کمک f رسم شود. ۲/۵

۴ نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر داده شده است. بازه‌هایی که تابع در آن‌ها اکیداً صعودی، اکیداً نزولی یا ثابت است را مشخص کنید.



به کلمهٔ «اکیداً» در صورت سؤال توجه کن. ۱

۵ نشان دهید چند جمله‌ای $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 9x + 10$ بر $2x - 5$ بخش‌پذیر است. سپس مقسوم‌علیه‌های دیگر $f(x)$ را بیابید.

برای نشان‌دادن درستی قسمت اول سؤال نباید از عملیات تقسیم استفاده کنی. ۱/۵

فصل دوم

۶ دورهٔ تناوب، مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را مشخص کنید.
الف) $y = -\cos\frac{\pi}{3}x + \sqrt{2}$
ب) $y = -2\sin 5x + 3$

این سؤال معمولاً در تمامی امتحانات مطرح می‌شود. پس فرمول‌های آن را حفظ کن. ۱/۵

۷ با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، مقادیر $\sin\alpha$ و $\tan\alpha$ را در ربع‌های اول و چهارم با هم مقایسه کنید.

یه‌وقت اشتباهی ربع‌ها را انتخاب نکنی! ۱

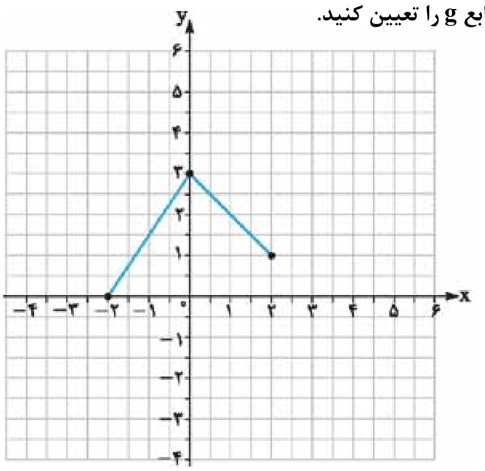
۸ معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید.
الف) $2\sin x + \sqrt{3} = 0$
ب) $2\tan^2 x - 3\tan x + 1 = 0$

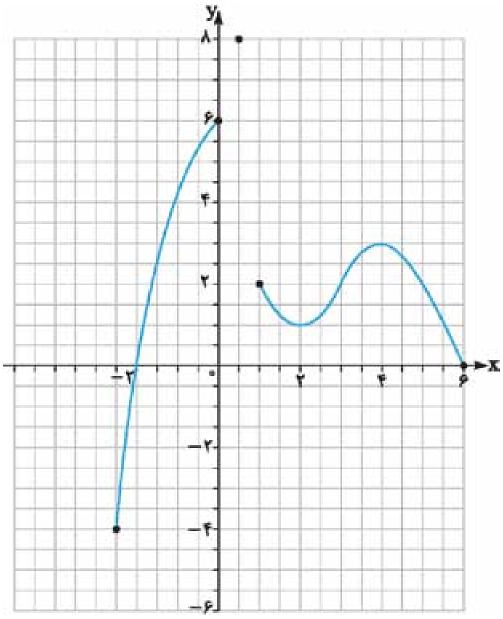
برای قسمت (الف) دقت کن که سینوس برابر یک مقدار منفی می‌شود! ۲

۹ مثلثی با مساحت ۸ سانتی‌مترمربع مفروض است. اگر اندازهٔ دو ضلع آن ۴ و ۸ باشد، آن‌گاه چند مثلث با این خاصیت وجود دارد؟

در این سؤال، اصلاً به ضلع سوم مثلث نیازی نیست. ۱/۵

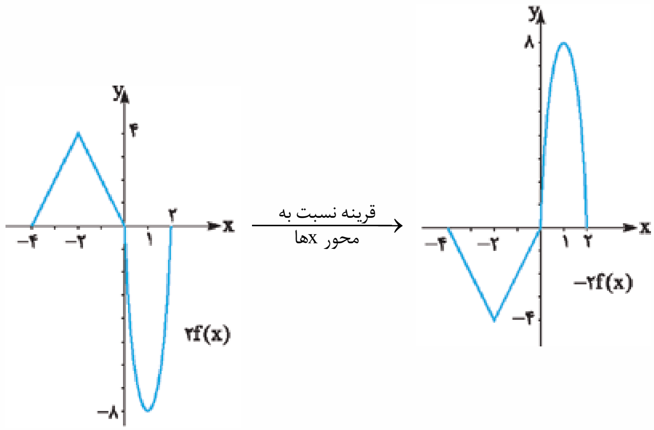
ردیف	آزمون شماره ۱	نوبت اول پایهٔ دوازدهم دورهٔ متوسطهٔ دوم	نمره
	فصل سوم		
۱۰	حدود زیر را محاسبه کنید. الف) $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\pi - 4}{x^2 - 3x + 2}$ ب) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \tan x$ پ) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{3x^2+1}}{2x-3}$	سؤال حدگیری همیشه در امتحانات مطرح می‌شود. تکنیک‌های حدگیری را از درس‌نامه بخون.	۲/۵
۱۱	مجانب‌های قائم تابع $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x-6}$ را به دست آورید.	یادت نره برای مجانب قائم، باید شرط‌هایش بررسی شود.	۱/۵
۱۲	مجانب‌های افقی تابع روبه‌رو را بیابید. $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$	به $\sqrt{x^2}$ توجه کن.	۱/۵
۱۳	نمودار تابعی مانند f را طوری رسم کنید که: الف) $f(-1) = f(2) = 0$ ب) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ پ) خط $y = 1$ مجانب افقی آن باشد.	باید نموداری بکشی که همهٔ شرط‌ها را داشته باشه. احتیاجی به ضابطهٔ نمودار نیست.	۱/۵
	موفق باشید	جمع نمرات	۲۰

ردیف	آزمون شماره ۹ — نوبت دوم پایهٔ دوازدهم ـ نهایی خرداد ۱۴۰۱	نمره
۱	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید. الف) اگر تابع f در $x = a$ پیوسته باشد و در این نقطه مشتق چپ و راست نامتناهی باشد، آن‌گاه $f'(a)$ وجود ندارد. ب) هر نقطهٔ بحرانی تابع $f(x)$، یک نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $f(x)$ است.	۱
۲	جاهای خالی را با عدد یا کلمهٔ مناسب کامل کنید. الف) دورهٔ تناوب تابع $y = 7\sin(\frac{-\pi}{2}x) + 2$ برابر .... است. ب) اگر برای هر x در بازهٔ I، $f''(x) > 0$؛ آن‌گاه نمودار $f(x)$ در این بازه تقعر رو به .... دارد.	۱
۳	نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $g(x) = f(x-1)$ را رسم کرده و دامنهٔ تابع g را تعیین کنید.  	۱
۴	ابتدا نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2x$ را رسم نمایید، سپس تعیین کنید که این تابع در چه بازه‌ای اکیداً صعودی و در چه بازه‌ای اکیداً نزولی است.	۱
۵	باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $p(x) = 8x^3 - 4x^2 + 2$ را بر $2x + 1$ به دست آورید.	۰/۵
۶	معادلهٔ مثلثاتی $\sin 2x - \cos x = 0$ را حل کنید.	۱/۵
۷	حدود توابع زیر را در صورت وجود بیابید. الف) $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{x^2 - 4}{(x-2)^2}$ ب) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x - x^3}{2x - 1}$	۱
۸	مجانب‌های قائم و افقی منحنی تابع $f(x) = \frac{1 - x^2}{x^2 + x}$ را در صورت وجود بیابید.	۱/۵
۹	مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \|2x - 4\|$ را در $x = 2$ بررسی کنید.	۱/۵
۱۰	برای تابع $f(x) = x^3 - 8$ در نقطهٔ تقاطع آن با محور xها معادلهٔ خط مماس را بنویسید.	۱/۵
۱۱	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده‌کردن مشتق الزامی نیست.) الف) $f(x) = (-3x^2 + x)^5 (2x)$ ب) $g(x) = 5\tan x + \sin x^2$ پ) $h(x) = \frac{2}{x}$	۲/۵
۱۲	اگر سرعت متوسط یک متحرک در یک بازه برابر ۲ متر بر ثانیه باشد و معادلهٔ حرکت متحرک به صورت $f(t) = t^3 - t$ برحسب متر باشد، در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای متحرک برابر سرعت متوسط آن است.	۱

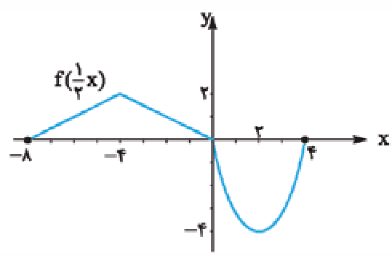
ردیف	آزمــــون شمـــارهٔ ۹ — نوبت دوم پایهٔ دوازدهم ـ نهایی خرداد ۱۴۰۱	نمره
۱۳	اگر نقطهٔ $A(-1,1)$ نقطهٔ عطف تابع با ضابطهٔ $f(x)=ax^3+bx^2+2$ باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.	۱/۵
۱۴	با توجه به نمودار داده‌شده، به سؤالات زیر پاسخ دهید: الف) مقدار ماکزیمم مطلق را بنویسید. ب) مقدار مینیمم مطلق را بنویسید. پ) طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی را بنویسید. ت) طول نقطهٔ مینیمم نسبی را بنویسید. 	۱
۱۵	جدول رفتار و نمودار تابع $y=\frac{2x-1}{x-2}$ را رسم کنید.	۲/۵
	موفق باشید — جمع نمرات	۲۰

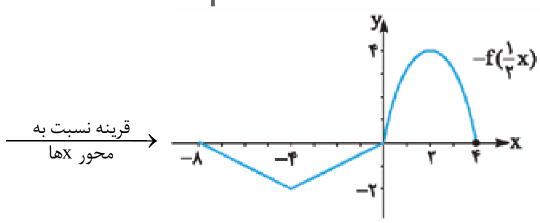
آزمون شمارهٔ ۱ (نوبت اول)

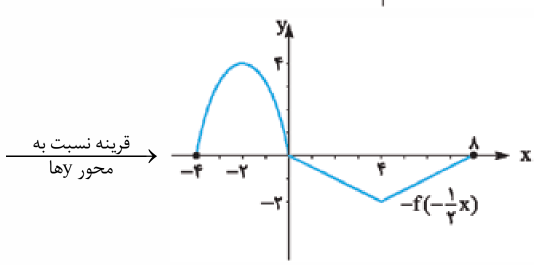
۱- برای رسم نمودار $y_۱ = -۲f(x)$ ابتدا با توجه به ضریب ۲، یک انبساط عمودی در راستای محور yها انجام می‌دهیم؛ سپس به علت ضریب منفی نمودار را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.



برای رسم $y_۲ = -f(-\frac{۱}{۲}x)$، ابتدا با توجه به ضریب $\frac{۱}{۲}$، یک انبساط افقی در راستای محور xها انجام می‌دهیم. سپس یک‌بار قرینه نسبت به محور xها و بار دیگر قرینه نسبت به محور yها انجام می‌دهیم.







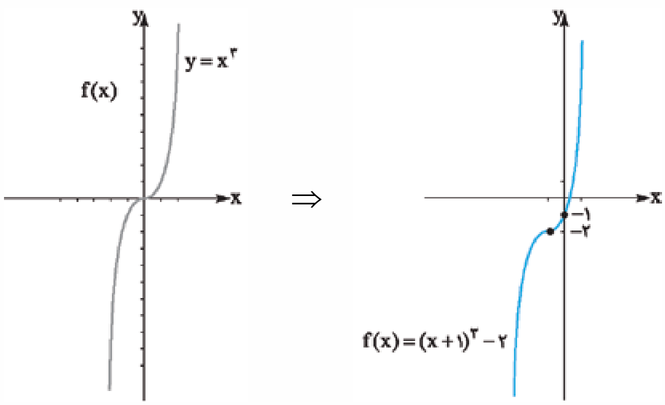
۲- الف) $(-۲,\frac{۱}{۲})$

$$A = (-۱,۱) \xrightarrow[\text{به سمت چپ}]{\text{یک واحد xها}} A' = (-۲,۱)$$

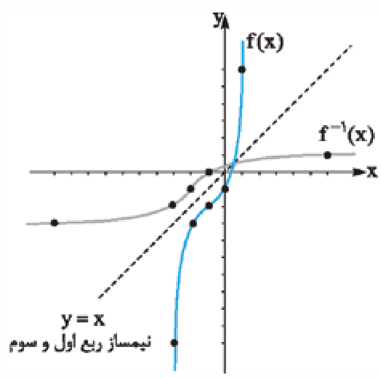
$$\xrightarrow[\text{عمودی با ضریب } \frac{۱}{۲}]{\text{انقباض yها}} A'' = (-۲,\frac{۱}{۲})$$

ب) $-۱ \le x-۱ \le ۴ \Rightarrow ۰ \le x \le ۵ \Rightarrow [۰,۵]$

۳- الف) ابتدا نمودار $y = x^۳$ را رسم می‌کنیم. سپس نمودار $y = x^۳$ را یک واحد به سمت چپ و دو واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم.



ب) چون هر خط موازی محور xها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند، پس تابع یک‌به‌یک است، بنابراین تابع f وارون‌پذیر است. برای رسم وارون f، باید نمودار $f(x) = (x+۱)^۳ - ۲$ را نسبت به خط نیمساز ربع اول و سوم قرینه کنیم:



پ) برای محاسبهٔ ضابطهٔ وارون تابع $f(x) = (x+۱)^۳ - ۲$ ابتدا باید x را تنها کنیم:

$$y = (x+۱)^۳ - ۲ \Rightarrow y+۲ = (x+۱)^۳$$

$$\Rightarrow x+۱ = \sqrt[۳]{y+۲} \Rightarrow x = \sqrt[۳]{y+۲} - ۱$$

$$\xrightarrow[\text{می‌کنیم}]{\text{جای x و y را عوض}} f^{-۱}(x) = \sqrt[۳]{x+۲} - ۱$$

۴- طبق نمودار از سمت چپ شروع می‌کنیم.

اکیداً صعودی: $[-۴,۰]$، اکیداً نزولی: $(-\infty,-۴]$

اکیداً نزولی: $[۴,+\infty)$، تابع ثابت: $[۰,۴]$

۵- باید نشان دهیم مقدار $f(x)$ به ازای ریشهٔ $۲x-۵$، برابر صفر است؛ یعنی باید نشان دهیم: $f(\frac{۵}{۲}) = ۰$.

$$f(\frac{۵}{۲}) = ۲(\frac{۵}{۲})^۳ - ۳(\frac{۵}{۲})^۲ - ۹(\frac{۵}{۲}) + ۱۰$$

$$= \cancel{۲} \times \frac{۱۲۵}{\cancel{۸}_{۴}} - ۳ \times \frac{۲۵}{۴} - \frac{۴۵}{۲} + ۱۰ = \frac{۱۲۵ - ۷۵ - ۹۰ + ۴۰}{۴}$$

$$= \frac{۱۶۵ - ۱۶۵}{۴} = ۰ \Rightarrow f(\frac{۵}{۲}) = ۰$$

پس $2x-5$ یک مقسوم‌علیه $f(x)$ است. برای پیداکردن مقسوم‌علیه‌های دیگر باید $f(x)$ را بر $2x-5$ تقسیم کنیم.

$$\begin{array}{l|l}
2x^3-3x^2-9x+10 & 2x-5 \\ \hline
-(2x^3-5x^2) & x^2+x-2 \\
\quad 2x^2-9x+10 & \\
-(2x^2-5x) & \\
\quad\quad -4x+10 & \\
\quad -(-4x+10) & \\
\quad\quad\quad 0 &
\end{array}$$

بنابراین: $f(x)=(2x-5)(x^2+x-2)=(2x-5)(x+2)(x-1)$

یعنی $x+2$ و $x-1$ مقسوم‌علیه‌های دیگر $f(x)$ هستند.

۶- به طور کلی دورهٔ تناوب توابعی به فرم $y=a\sin(bx+c)+d$ و $y=a\cos(bx+c)+d$ برابر $\frac{2\pi}{|b|}$ و مقدار ماکزیمم $|a|+d$ و مقدار مینیمم $-|a|+d$ است.

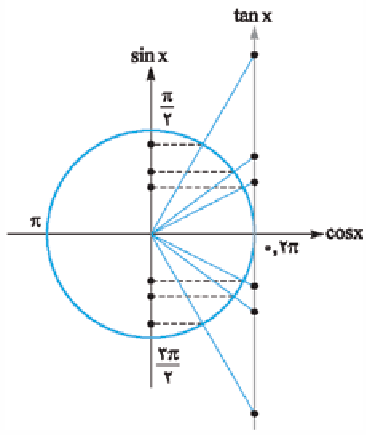
الف)

$$\begin{cases} y=-\cos\frac{\pi}{3}x+\sqrt{2} \\ T=\frac{2\pi}{|\frac{\pi}{3}|}=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}=6 \\ \max=|-1|+\sqrt{2}=1+\sqrt{2} \\ \min=-|-1|+\sqrt{2}=-1+\sqrt{2} \end{cases}$$

ب)

$$\begin{cases} y=-2\sin 5x+3 \\ T=\frac{2\pi}{|5|}=\frac{2\pi}{5} \\ \max=|-2|+3=2+3=5 \\ \min=-|-2|+3=-2+3=1 \end{cases}$$

۷- دایرهٔ مثلثاتی رسم می‌کنیم:



در ربع اول: $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$، طبق شکل مشخص است که همواره:

$\sin\alpha<\tan\alpha$

در ربع چهارم: $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$، طبق شکل مشخص است که همواره:

$\sin\alpha>\tan\alpha$

۸- الف) $2\sin x+\sqrt{3}=0$، در نتیجه $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. زاویه‌ای که مقدار سینوس آن $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ است را از ربع ۴ انتخاب می‌کنیم. $\alpha=-\frac{\pi}{3}$.

جواب‌های کلی عبارت‌اند از:

$$\begin{cases} x=2k\pi+(-\frac{\pi}{3}) \\ x=(2k+1)\pi-(-\frac{\pi}{3}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2k\pi-\frac{\pi}{3} \\ x=2k\pi+\frac{4\pi}{3} \end{cases} ,\ (k\in\mathbb{Z})$$

ب) قرار می‌دهیم $\tan x=t$، در این صورت: $2t^2-3t+1=0$.

مجموع ضرایب برابر صفر است، پس $t=1$ و $t=\frac{1}{2}$؛ در نتیجه:

$\tan x=1 \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{4} \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4}$ ، $k\in\mathbb{Z}$

اما از معادلهٔ $\tan x=\frac{1}{2}$ مقدار زاویه قابل محاسبه نیست. مثلاً اگر β زاویهٔ موردنظر باشد، آن‌گاه $\tan\beta=\frac{1}{2}$ و در نتیجه: $x=k\pi+\beta$ ، $k\in\mathbb{Z}$

۹- مساحت مثلث به کمک دو ضلع و زاویهٔ بین آن‌ها عبارت است از:

مساحت مثلث $=\frac{1}{2}\times$ ضلع $\times$ ضلع $\times\sin$ (زاویهٔ بین دو ضلع)

$8=\frac{1}{2}\times4\times8\times\sin\theta \Rightarrow \sin\theta=\frac{1}{2}$

زاویهٔ بین دو ضلع در مثلث در بازهٔ $0<\theta<\pi$ قرار می‌گیرد، پس $\theta=\frac{\pi}{6}$ و $\theta=\frac{5\pi}{6}$ قابل‌قبول هستند. یعنی دو مثلث با این خاصیت وجود دارد.

۱۰- الف) صورت کسر فاقد x است. $x=1$ را فقط در مخرج کسر جای‌گذاری می‌کنیم:

$1^2-3(1)+2=0$

با تعیین علامت مخرج کسر داریم: $x^2-3x+2=0 \Rightarrow x=1,2$

x		1		2	
x^2-3x+2	$+$	0	$-$	0	$+$

$x\to1^+$ یعنی حد راست، طبق جدول برای همسایگی راست $x=1$، مقدار x^2-3x+2 منفی است. در نتیجه خواهیم داشت: $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\pi-4}{x^2-3x+2}=\frac{\pi-4}{0^-}$

اما $\pi-4<0$ ($\pi\simeq3/14$)، بنابراین: $\frac{\text{عدد منفی}}{0^-}=+\infty$

ب) از مثلثات به یاد داریم که:

$$\begin{cases} \tan x=\frac{\sin x}{\cos x} \\ \sin(\frac{\pi}{2})=1\ ,\ \cos(\frac{\pi}{2})=0 \end{cases}$$

پس حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x$ به صورت $\frac{1}{0}$ خواهد بود که باید 0^+ یا 0^- بودن مخرج را مشخص کنیم. طبق صورت سؤال، $x\to\frac{\pi}{2}^+$، پس با مقادیر بیشتر از $\frac{\pi}{2}$ به $\frac{\pi}{2}$ نزدیک می‌شویم، لذا در ربع دوم دایرهٔ مثلثاتی هستیم و در این ربع مقدار $\cos x$ منفی است.

در نتیجه: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\tan x=\frac{1}{0^-}=-\infty$

پ) برای عبارت زیر رادیکال داریم: $\lim\limits_{x\to+\infty}3x^2+1=\lim\limits_{x\to+\infty}3x^2$

در نتیجه: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{3x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{3x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{3}|x|$

چون $x\to+\infty$ میل می‌کند، پس داخل قدرمطلق مثبت است و می‌توان قدرمطلق را حذف کرد. در نتیجه: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{3}|x|=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{3}x$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3}x}{2x-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3}x}{2x}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۱۱- مخرج کسر را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$x^2+x-6=0 \Rightarrow (x+3)(x-2)=0 \Rightarrow x=-3, x=2$

چون $x=2$ و $x=-3$ صورت کسر را صفر نمی‌کنند، حتماً مجانب قائم هستند. برای بررسی دقیق‌تر ابتدا مخرج را تعیین علامت می‌کنیم:

x		-3		2	
x^2+x-6	$+$	0	$-$	0	$+$

طبق جدول در همسایگی راست $x=2$، مخرج مثبت است.

در نتیجه: $\lim\limits_{x\to(2)^+}\frac{x+1}{x^2+x-6}=\frac{3}{0^+}=+\infty$

طبق جدول در همسایگی چپ $x=2$، مخرج منفی است.

در نتیجه: $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{x+1}{x^2+x-6}=\frac{3}{0^-}=-\infty$

طبق جدول در همسایگی راست $x=-3$، مخرج منفی است.

در نتیجه: $\lim\limits_{x\to(-3)^+}\frac{x+1}{x^2+x-6}=\frac{-2}{0^-}=+\infty$

طبق جدول در همسایگی چپ $x=-3$، مخرج مثبت است.

در نتیجه: $\lim\limits_{x\to(-3)^-}\frac{x+1}{x^2+x-6}=\frac{-2}{0^+}=-\infty$

۱۲- توجه داریم که:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{x^2+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{x^2}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}|x|=\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}x\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(-x)\end{cases}$$

اکنون حد تابع داده‌شده را یک بار وقتی $x\to+\infty$ و بار دیگر وقتی $x\to-\infty$ میل می‌کند، محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x}=-1$$

پس $y=\pm1$ خطوط مجانب افقی تابع هستند.

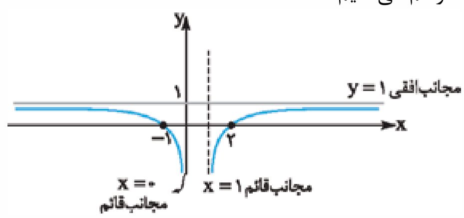
۱۳- طبق (الف)، نقاط $(-1,0)$ و $(2,0)$ روی نمودار است؛ یعنی نمودار باید محور x ها را در ۱- و ۲ قطع کند.

طبق (ب)، خطوط $x=1$ و $x=0$ مجانب‌های قائم هستند. برای مجانب قائم $x=1$، در همسایگی راست، مقادیر f به $-\infty$ و برای مجانب قائم $x=0$، در همسایگی چپ، مقادیر f به $-\infty$ میل می‌کند.

طبق (پ)، خط $y=1$ مجانب افقی تابع f است، یعنی:

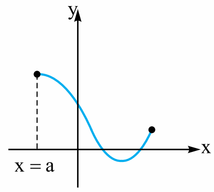
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=1 \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=1$$

اکنون نموداری با این اطلاعات رسم می‌کنیم:



۱- الف) درست

ب) نادرست، در نمودار مقابل $x = a$ طول نقطهٔ بحرانی است، ولی نقطهٔ اکسترمم نسبی نیست. (نقاط ابتدایی و انتهایی بازه هیچ‌گاه نقاط اکسترمم نسبی نیستند.)



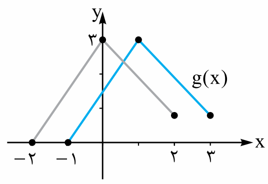
۲- الف) $y = 7\sin(-\frac{\pi}{2}x)+2$

$\Rightarrow b = -\frac{\pi}{2}, T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$

ب) بالا

۳- با توجه به ضابطهٔ $g(x) = f(x-1)$ کافی است نمودار اولیه را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم.

و با توجه به نمودار g، دامنهٔ آن برابر است با $[-1,3]$.

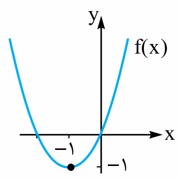


۴- $f(x) = x^2+2x = x^2+2x+1-1 = (x+1)^2-1$

برای رسم نمودار تابع $f(x)$، کافی است نمودار سهمی $y = x^2$ را یک واحد به سمت چپ و سپس یک واحد به سمت پایین ببریم.

اکیداً نزولی: $(-\infty,-1]$

اکیداً صعودی: $[-1,+\infty)$



۵- کافی است ریشهٔ عبارت $2x+1$ را در $p(x)$ جای‌گذاری کنیم:

$2x+1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

$p(-\frac{1}{2}) = 8(-\frac{1}{2})^3-4(-\frac{1}{2})^2+2 = 8(\frac{-1}{8})-4(\frac{1}{4})+2 = -1-1+2 = 0$

$\Rightarrow$ باقی‌مانده $= 0$

۶- می‌دانیم $\sin 2x = 2\sin x\cos x$:

$\sin 2x-\cos x = 0 \Rightarrow 2\sin x\cos x-\cos x = 0$

$\Rightarrow \cos x(2\sin x-1) = 0 \Rightarrow \cos x = 0$

$2\sin x-1 = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}$

$$\cos x = 0 = \cos\frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi+\frac{\pi}{2} \\ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi+\frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6} = 2k\pi+\frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

که $k\in\mathbb{Z}$ است.

۷-

الف) $\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-4}{(x-2)^2} = \lim_{x\to 2^+}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{(x-2)^{\cancel{2}}} = \lim_{x\to 2^+}\frac{x+2}{x-2} = \frac{4}{0^+} = +\infty$

ب) $\lim_{x\to -\infty}\frac{2x-x^3}{2x-1} = \lim_{x\to -\infty}\frac{-x^3}{2x} = \lim_{x\to -\infty}\frac{-x^2}{2} = -\infty$

۸- $f(x) = \frac{1-x^2}{x^2+x}$

مجانب‌های قائم: $x^2+x = 0 \Rightarrow x(x+1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -1$

اما $x = -1$، مجانب قائم نیست، زیرا:

$\lim_{x\to -1}\frac{1-x^2}{x^2+x} = \lim_{x\to -1}\frac{(1-x)\cancel{(1+x)}}{x\cancel{(x+1)}} = -2$

می‌دانیم برای مجانب قائم بودن جواب، حد باید بی‌نهایت شود، نه عدد.

اما $x = 0$ مجانب قائم است، زیرا:

$\lim_{x\to 0^+}\frac{1-x^2}{x^2+x} = \frac{1}{0^+} = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^-}\frac{1-x^2}{x^2+x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

مجانب افقی: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-x^2}{x^2+x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x^2}{x^2} = -1 \Rightarrow y = -1$

۹- اولاً تابع $f(x) = |2x-4|$ در $x = 2$ پیوسته است.

ثانیاً: $f'_+(2) = \lim_{x\to 2^+}\frac{2x-4-0}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}\frac{2(x-2)}{x-2} = 2$

$f'_-(2) = \lim_{x\to 2^-}\frac{-(2x-4)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}\frac{-2\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = -2$

چون $f'_+(2) \neq f'_-(2)$، پس تابع $f(x)$ در $x = 2$ مشتق‌پذیر نیست.

$x = 2$ برای تابع f طول نقطهٔ گوشه‌ای است.

۱۰- ابتدا محل برخورد f با محور xها را محاسبه می‌کنیم:

$y = 0 \Rightarrow x^3-8 = 0 \Rightarrow x = 2$

$\Rightarrow (2,0)$:محل تقاطع با محور xها

برای محاسبهٔ شیب خط مماس از مشتق‌گیری استفاده می‌کنیم:

$f'(x) = 3x^2 \overset{x=2}{=} 3(2)^2 = 12 \Rightarrow m = 12$

معادلهٔ خط مماس: $y-0 = 12(x-2) \Rightarrow y = 12x-24$

۱۱- الف) $f'(x) = 5(-3x^2+x)^4(-6x+1)(2x)+2(-3x^2+x)^5$

ب) $g'(x) = 5(1+\tan^2 x)+(2x)\cos x^2$ پ) $h'(x) = \frac{-2}{x^2}$

۱۲- سرعت متوسط $= 2$

سرعت لحظه‌ای $= f'(t) = 3t^2-1$

طبق فرض، سرعت متوسط برابر سرعت لحظه‌ای است. $\Rightarrow 3t^2-1 = 2 \Rightarrow t = 1$

۱۳- $\begin{cases} f(-1) = 1 \\ f''(-1) = 0 \end{cases}$ نقطهٔ عطف: $A(-1,1)$

$f(x) = ax^3+bx^2+2 \qquad f'(x) = 3ax^2+2bx$

$f''(x) = 6ax+2b \qquad f(-1) = -a+b+2 = 1 \Rightarrow -a+b = -1$

$f''(-1) = -6a+2b = 0$

$-2\begin{cases} -a+b = -1 \\ -6a+2b = 0 \end{cases} \Rightarrow -4a = +2 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{3}{2}$

۱۴- الف) ۸ ب) -4 پ) $x = 4$ ت) $x = 2$

توجه کنید که نقاط ابتدایی و انتهایی نمودار نمی‌توانند طول اکسترمم‌های **نسبی** باشند.

۱۵- $y = \frac{2x-1}{x-2}$

مجانب قائم: $x-2 = 0 \Rightarrow x = 2$

مجانب افقی: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{x-2} = 2 \Rightarrow y = 2$

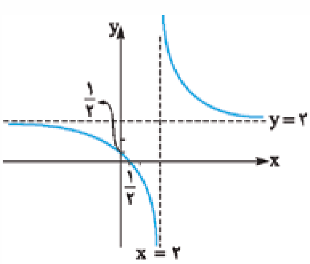
$y' = \frac{2(x-2)-1(2x-1)}{(x-2)^2} = \frac{-3}{(x-2)^2} < 0$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2

محل تقاطع نمودار با محورها:

$x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \Rightarrow (0,\frac{1}{2})$

$y = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow (\frac{1}{2},0)$

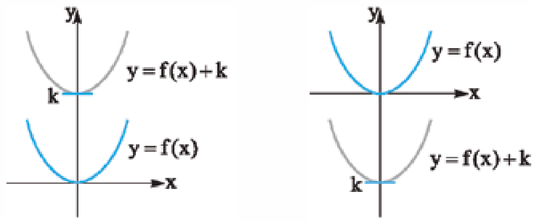


فصل ۱: تابع

درس اول: تبدیل نمودار توابع

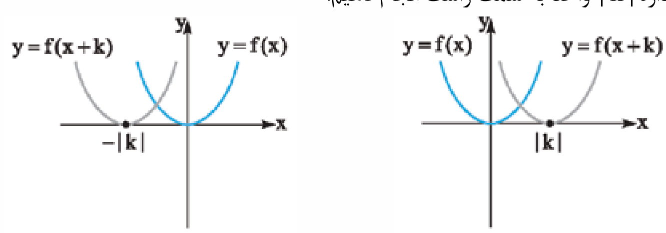
انتقال‌های عمودی و افقی

انتقال عمودی: برای رسم نمودار $y=f(x)+k$، اگر $k>۰$ باشد، باید نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در راستای قائم به سمت بالا ببریم. اما اگر $k<۰$ باشد، باید این انتقال را به اندازهٔ $|k|$ واحد به سمت پایین انجام دهیم.



نکته: در انتقال عمودی دامنهٔ تابع تغییری نمی‌کند و فقط بُرد آن به اندازهٔ k واحد تغییر می‌کند.

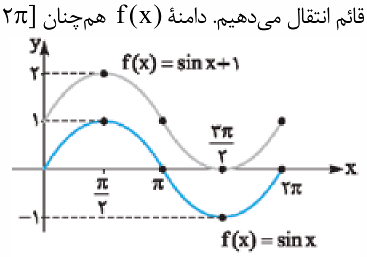
انتقال افقی: برای رسم نمودار $y=f(x+k)$، اگر $k>۰$ باشد، باید نمودار $f(x)$ را k واحد در راستای افقی به سمت چپ ببریم. اما اگر $k<۰$ باشد، باید این انتقال را به اندازهٔ $|k|$ واحد به سمت راست انجام دهیم.



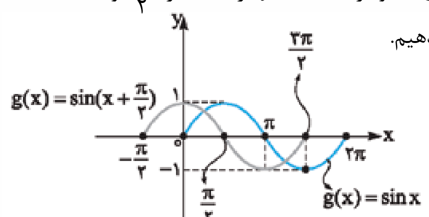
نکته: در انتقال افقی بُرد تابع تغییری نمی‌کند و فقط دامنهٔ آن به اندازهٔ k واحد تغییر می‌کند.

مثال: نمودار توابع $f(x)=\sin x+۱$ و $g(x)=\sin(x+\frac{\pi}{۲})$ را با توجه به نمودار $y=\sin x$ با دامنهٔ $[۰,۲\pi]$ رسم کنید.

پاسخ: برای تابع $f(x)=\sin x+۱$، نمودار $y=\sin x$ با دامنهٔ $[۰,۲\pi]$ را یک واحد به سمت بالا در راستای قائم انتقال می‌دهیم. دامنهٔ $f(x)$ همچنان $[۰,۲\pi]$ باقی می‌ماند.



برای تابع $g(x)=\sin(x+\frac{\pi}{۲})$، نمودار $y=\sin x$ را به اندازهٔ $\frac{\pi}{۲}$ واحد به سمت چپ در راستای افقی انتقال می‌دهیم.



$$D_{g(x)}=\left[-\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}\right]$$

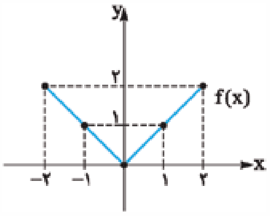
مثال: نمودار تابع $f(x)=|x|$ را با دامنهٔ $[-۲,۲]$ رسم کنید و برد تابع را مشخص کنید. سپس نمودار توابع $g(x)=f(x-۱)$ و $h(x)=f(x)-۱$ را به کمک انتقال رسم کرده و دامنه و برد آن‌ها را بیابید.

پاسخ:

$f(x)=|x|$

x	−۲	−۱	۰	۱	۲
y	۲	۱	۰	۱	۲

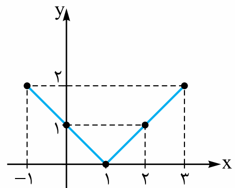
برد $f=[۰,۲]$



برای رسم تابع $g(x)=f(x-۱)$ باید نمودار $f(x)$ را یک واحد به سمت راست در راستای افقی انتقال دهیم.

دامنهٔ $g=[-۱,۳]$

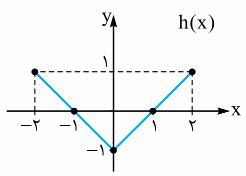
برد $g=$ برد $f=[۰,۲]$



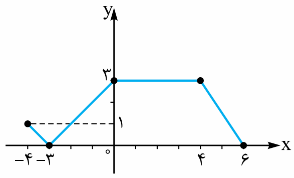
برای رسم تابع $h(x)=f(x)-۱$ باید نمودار $f(x)$ را یک واحد به سمت پایین در راستای قائم انتقال دهیم.

دامنهٔ $h=$ دامنهٔ $f=[-۲,۲]$

برد $h=[-۱,۱]$



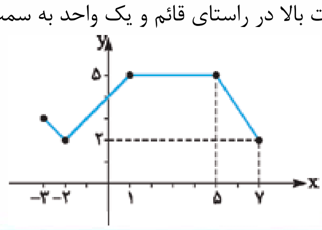
مثال: نمودار تابع f به صورت زیر داده شده است. با انتقال‌های افقی و عمودی نمودار تابع $y=f(x-۱)+۲$ را رسم کنید.



پاسخ: باید نمودار اولیه را دو واحد به سمت بالا در راستای قائم و یک واحد به سمت راست در راستای افقی انتقال دهیم.

دامنهٔ جدید $=[-۳,۷]$

برد جدید $=[۲,۵]$

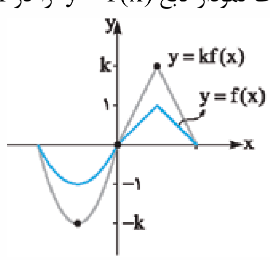


انبساط و انقباض عمودی

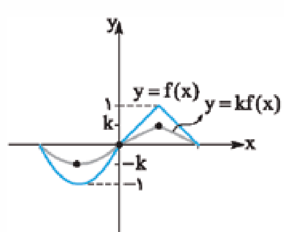
برای رسم نمودار تابع $y=kf(x)$، باید عرض نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در k ضرب کنیم.

اگر $k>۱$ باشد، نمودار انبساط عمودی در راستای محور yها و اگر $۰<k<۱$ باشد، نمودار انقباض عمودی در راستای محور yها دارد.

$k>۱ \Rightarrow$ انبساط عمودی داریم



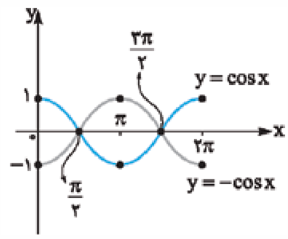
$۰<k<۱ \Rightarrow$ انقباض عمودی داریم



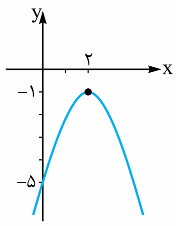
تذکر: در حالتی که $k=-۱$ باشد، نمودار تابع $y=-f(x)$ قرینهٔ نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور xها است.

مثال قرینهٔ نمودار تابع $y=\cos x$ را نسبت به محور xها در بازهٔ $[0,2\pi]$ رسم کنید.

پاسخ ابتدا نمودار $y=\cos x$ را رسم می‌کنیم، سپس برای رسم قرینهٔ آن، نسبت به محور xها یعنی $y=-\cos x$، نمودار را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم:



مثال نمودار زیر از قرینه‌یابی نسبت به محور xها و انتقال نمودار تابع $y=x^2$ به دست آمده است. ضابطهٔ آن را مشخص کنید.

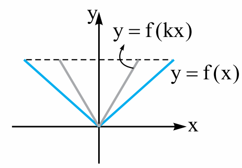


پاسخ با توجه به نمودار، تابع $y=x^2$ نسبت به محور xها قرینه شده، دو واحد به سمت راست و یک واحد پایین آمده است، پس ضابطه‌اش به صورت $y=-(x-2)^2-1$ است.

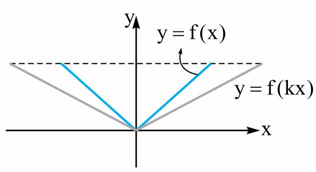
انبساط و انقباض افقی

برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$، باید طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.

اگر $k>1$ باشد، انقباض افقی در راستای محور xها و اگر $0<k<1$ باشد، انبساط افقی در راستای محور xها داریم.



$k>1$ (انقباض)



$0<k<1$ (انبساط)

تذکر نمودار تابع $y=f(-x)$ قرینه نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور yها است.

نکته مهم برای بررسی تابع $g(x)=af(bx+c)+d$ از روی نمودار $f(x)$، باید به ترتیب c (انتقال افقی)، b (انبساط و انقباض افقی)، a (انبساط و انقباض عمودی) و در نهایت d (انتقال عمودی) را انجام دهیم.

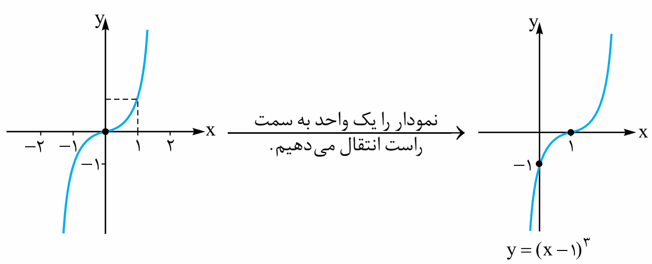
مثال نمودار تابع $y=(-x-1)^3$ را به کمک نمودار تابع $y=x^3$ رسم کنید.

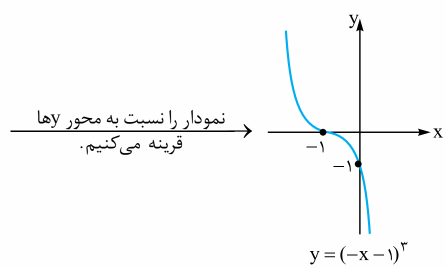
پاسخ

$y=x^3$

x	−1	0	1
y	−1	0	1

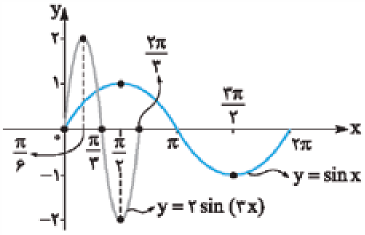
ابتدا نمودار $y=x^3$ را رسم کرده، سپس آن را یک واحد به سمت راست می‌بریم و در نهایت آن را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم.



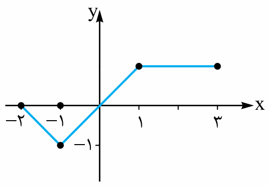


مثال به کمک نمودار تابع $y=\sin x$، نمودار تابع $y=2\sin(3x)$ را رسم کنید.

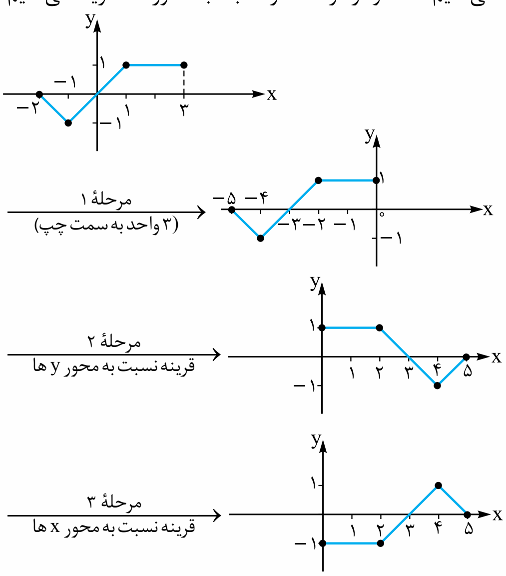
پاسخ ضریب ۲ باعث می‌شود که نمودار اولیه انبساط عمودی (انبساط در راستای محور yها) داشته باشد، همچنین ضریب ۳ برای x باعث می‌شود نمودار اولیه انقباض افقی (در راستای محور xها) داشته باشد.



مثال نمودار $f(x)$ در مقابل رسم شده است. نمودار $y=-f(3-x)$ را رسم کنید.



پاسخ مراحل رسم: ۱- نمودار را ۳ واحد به سمت چپ می‌بریم. ۲- نمودار مرحلهٔ ۱ را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم. ۳- نمودار مرحلهٔ ۲ را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.



درس دوم: تابع درجه سوم، توابع یکنوا، بخش‌پذیری و تقسیم

تابع چندجمله‌ای درجهٔ n

اگر n یک عدد صحیح نامنفی و $a_0,a_1,\dots,a_n$ اعداد حقیقی باشند که $a_n\neq 0$ آن‌گاه تابع $f(x)$ زیر، یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ n نامیده می‌شود.

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_2x^2+a_1x^1+a_0\ ,\ a_n\neq 0$$

در حالت‌های خاص:

① $n=0 \Rightarrow f(x)=c$ (تابع ثابت)

② $n=1 \Rightarrow \begin{cases} f(x)=ax+b \\ a\neq 0 \end{cases}$ (تابع خطی درجه‌اول)

③ $n=2 \Rightarrow \begin{cases} f(x)=ax^2+bx+c \\ a\neq 0 \end{cases}$ (تابع درجهٔ ۲ سهمی)

④ $n=3 \Rightarrow \begin{cases} f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \\ a\neq 0 \end{cases}$ (تابع درجهٔ ۳)

مثال درجهٔ چندجمله‌ای زیر را مشخص کنید.

الف) $f(x)=(x-1)^2x^3$

ب) $g(x)=(x-2)^2+1$

پ) $h(x)=3$

پاسخ درجهٔ چندجمله‌ای یعنی بزرگ‌ترین توان x:

الف) $f(x)=(x-1)^2x^3=(x^2-2x+1)(x^3)=x^5-2x^4+x^3$

پس درجهٔ $f(x)$ برابر ۵ است.

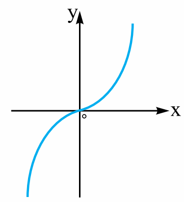
ب) $g(x)=(x-2)^2+1=x^2-4x+4+1=x^2-4x+5$

پس درجهٔ $g(x)$ برابر ۲ است.

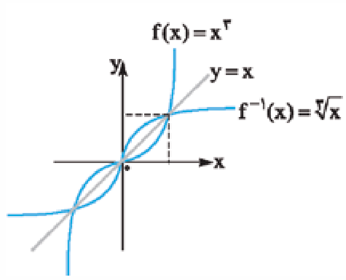
پ) درجهٔ $h(x)$ برابر صفر است.

تابع درجهٔ ۳

تابع $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$، $a\neq 0$ را تابع درجهٔ سوم می‌نامیم. یکی از توابع چندجمله‌ای درجهٔ سوم، تابع $f(x)=x^3$ است که نمودار آن بصورت مقابل است:



این تابع یک‌به‌یک است و در نتیجه وارون‌پذیر است. برای رسم وارون آن، نمودار اولیه را نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه می‌کنیم.



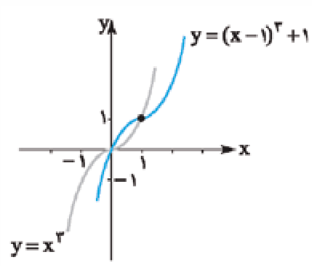
مثال **نمودار تابع $y=x^3-3x^2+3x$ را به کمک نمودار تابع $y=x^3$ رسم کنید.**

پاسخ ابتدا تابع داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$y=\underbrace{x^3-3x^2+3x-1}_{\text{اتحاد مکعب}}+1$$

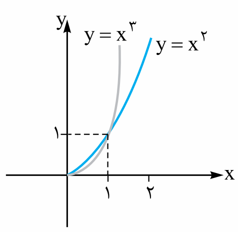
$$y=(x-1)^3+1$$

به کمک انتقال، نمودار اولیه را یک واحد به سمت راست در راستای محور xها و یک واحد به سمت بالا در راستای محور yها انتقال می‌دهیم.



تفاوت نمودار x^2 و x^3

دو تابع $y=x^2$ و $y=x^3$ در فاصلهٔ $[0,1]$ و برای $x\geq 1$ به صورت زیر هستند:



با توجه به نمودار داریم:

در بازهٔ $[0,1)$: $x^2>x^3$

در بازهٔ $(1,+\infty)$: $x^3>x^2$

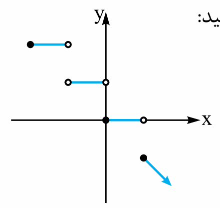
و در $x=1$: $x^2=x^3$ می‌باشد.

توابع صعودی و نزولی

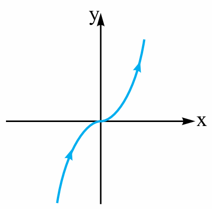
- اگر برای هر دو نقطهٔ a و b از دامنهٔ تابع f که $a<b$، داشته باشیم $f(a)\leq f(b)$، آن‌گاه f را تابعی صعودی می‌نامیم.
- اگر برای هر دو نقطهٔ a و b از دامنهٔ تابع f که $a<b$، داشته باشیم $f(a)\geq f(b)$، آن‌گاه f تابعی نزولی است.

تذکر در توابع صعودی با حرکت روی نمودار از چپ به راست، رو به پایین نخواهیم رفت (یعنی یا نمودار ثابت است یا رو به بالا) و در توابع نزولی با حرکت روی نمودار از چپ به راست، رو به بالا نخواهیم رفت. (یعنی یا نمودار ثابت است یا رو به پایین)

مثال‌های زیر را ببینید:

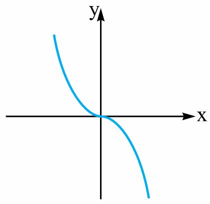


نزولی

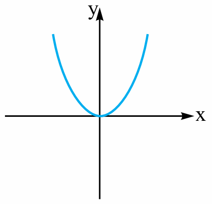


صعودی

تذکر تابع یکنوا تابعی است که در یک بازه فقط صعودی یا فقط نزولی باشد.

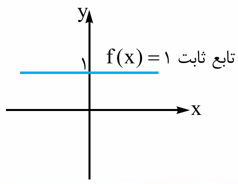


یکنوا



غیر یکنوا

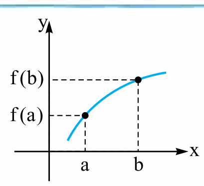
تابع ثابت: تابع $f(x)=c$ را یک تابع ثابت می‌نامیم که نمودار آن یک خط افقی است. تابع ثابت هم صعودی و هم نزولی می‌باشد.



توابع اکیداً صعودی و اکیداً نزولی

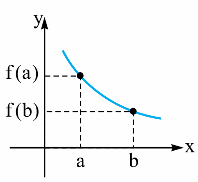
تابع f را در یک بازه، اکیداً صعودی می‌گوییم هرگاه، برای هر دو مقدار a و b در این بازه:

$$a<b\ \Rightarrow\ f(a)<f(b)$$



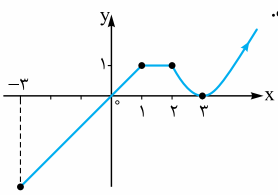
تابع f را در یک بازه اکیداً نزولی گوییم هرگاه، برای هر دو مقدار a و b در این بازه:

$$a<b\ \Rightarrow\ f(a)>f(b)$$



تذکر به تابعی که در یک بازه، فقط اکیداً صعودی یا فقط اکیداً نزولی باشد، اکیداً یکنوا می‌گوییم.

مثال **در هر بازه نوع نمودار تابع را مشخص کنید.**



پاسخ در بازهٔ $[-3,1]$ تابع اکیداً صعودی، در بازهٔ $[1,2]$ تابع ثابت، در بازهٔ $[2,3]$ تابع اکیداً نزولی، در بازهٔ $[3,+\infty)$ تابع اکیداً صعودی، در بازهٔ $[-3,2]$ تابع صعودی و در بازهٔ $[1,3]$ تابع نزولی است.

مثال **نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\leq 0\\ 3 & 0<x<3\\ x & x\geq 3\end{cases}$ را رسم کرده، سپس تعیین کنید در هر بازه نوع نمودار چگونه است؟**

پاسخ ابتدا نمودار هر ضابطه را در بازهٔ داده‌شده رسم می‌کنیم:

x	3	4	5
$y=x$	3	4	5

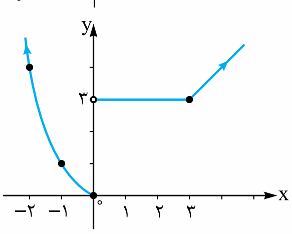
،

x	0	3
$y=3$	3	3

،

x	−2	−1	0
$y=x^2$	4	1	0

تابع f در بازهٔ $(-\infty,0]$ اکیداً نزولی، در بازهٔ $(0,3)$ ثابت، در بازهٔ $[3,+\infty)$ اکیداً صعودی و در بازهٔ $(3,+\infty)$ صعودی است.



مثال: **الف) اگر $\log(x+۱)\le\log(۲x-۳)$، حدود x را به دست آورید.**

ب) اگر $(\frac{۱}{۲})^{۳x-۲}\le\frac{۱}{۶۴}$ حدود x را به دست آورید.

پاسخ: الف) می‌دانیم هرگاه مبنای لگاریتم بیشتر از یک باشد، لگاریتم تابعی صعودی خواهد بود، پس داریم:

$$\log(x+۱)\le\log(۲x-۳) \Rightarrow (x+۱)\le(۲x-۳)$$

یعنی جهت نامساوی عوض نمی‌شود و داریم:

$$\Rightarrow x-۲x\le-۳-۱ \Rightarrow -x\le-۴ \Rightarrow x\ge۴$$

ب) می‌دانیم در تابع نمایی، هرگاه پایه کوچک‌تر از یک باشد، تابع نزولی خواهد بود پس داریم:

$$(\frac{۱}{۲})^{۳x-۲}\le\frac{۱}{۶۴}=(\frac{۱}{۲})^{۶} \Rightarrow ۳x-۲\ge۶$$

یعنی جهت نامساوی عوض می‌شود و داریم:

$$\Rightarrow ۳x\ge۸ \Rightarrow x\ge\frac{۸}{۳}$$

تقسیم و بخش‌پذیری

اگر $f(x)$ و $p(x)$ توابع چندجمله‌ای باشند و درجهٔ $p(x)$ از صفر بیشتر باشد، آن‌گاه توابع چندجمله‌ای یکتای $q(x)$ و $r(x)$ هستند که: $f(x)=p(x)q(x)+r(x)$

$q(x)$ را خارج قسمت و $r(x)$ را باقی‌ماندهٔ تقسیم می‌نامیم. در حالت خاص، اگر $r(x)=۰$ باشد، آن‌گاه گوییم f بر p بخش‌پذیر است.

نکتهٔ مهم: باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $ax+b$ برابر است با $f(\frac{-b}{a})$.

در حالت خاص، اگر $f(\frac{-b}{a})=۰$، آن‌گاه گوییم $f(x)$ بر $ax+b$ بخش‌پذیر است.

مثال: **نشان دهید $f(x)=x^۳-۲۷$ بر $x-۳$ بخش‌پذیر است.**

پاسخ: ابتدا $x-۳$ را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$x-۳=۰ \Rightarrow x=۳$$

$$f(۳)=۳^۳-۲۷=۰$$

پس $x^۳-۲۷$ بر $x-۳$ بخش‌پذیر است.

مثال: **اگر چندجمله‌ای $۲x^۲+mx-۳$ بر $x-m$ بخش‌پذیر باشد، مقدار m را بیابید.**

پاسخ: ابتدا $x-m$ را برابر صفر قرار داده، سپس ریشهٔ حاصل را در چندجمله‌ای اولیه جای‌گذاری می‌کنیم و برابر صفر قرار می‌دهیم و m را محاسبه می‌کنیم:

$$x-m=۰ \Rightarrow x=m$$

$$۲(m)^۲+m(m)-۳=۰ \Rightarrow ۲m^۲+m^۲=۳ \Rightarrow ۳m^۲=۳$$

$$\Rightarrow m^۲=۱ \Rightarrow m=\pm۱$$

مثال: **مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که چندجمله‌ای $x^۳+ax^۲+bx+۲$ بر $x-۱$ و $x+۲$ بخش‌پذیر باشد.**

پاسخ:

$$x-۱=۰ \Rightarrow x=۱$$

$$x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲$$

اگر چندجمله‌ای داده‌شده را با $f(x)$ نشان دهیم آن‌گاه، $f(-۲)=۰, f(۱)=۰$.

$$f(۱)=۱+a+b+۲=۰ \Rightarrow a+b=-۳$$

$$f(-۲)=-۸+۴a-۲b+۲=۰ \Rightarrow ۴a-۲b=۶$$

از حل دستگاه $\begin{cases}a+b=-۳\\ ۴a-۲b=۶\end{cases}$ داریم: $a=۰ \ , \ b=-۳$

نکته: تجزیهٔ x^n-a^n به صورت زیر است:

$$x^n-a^n=(x-a)(x^{n-۱}+ax^{n-۲}+a^۲x^{n-۳}+\cdots+a^{n-۲}x+a^{n-۱})$$

اگر n زوج باشد:

$$x^n-a^n=(x+a)(x^{n-۱}-ax^{n-۲}+ax^{۲n-۳}+...+a^{۲-n}x-a^{n-۱})$$

در حالت خاص:

$$n=۲ \Rightarrow x^۲-a^۲=(x-a)(x+a)$$

$$n=۳ \Rightarrow x^۳-a^۳=(x-a)(x^۲+ax+a^۲)$$

$$n=۴ \Rightarrow x^۴-a^۴=(x-a)(x^۳+ax^۲+a^۲x+a^۳)$$

مثال: **$x^۶-۱$ را تجزیه کنید.**

پاسخ:

$$x^۶-۱=(x-۱)(x^۵+x^۴+x^۳+x^۲+x+۱)$$

نکته: برای nهای فرد، تجزیهٔ x^n+a^n به صورت زیر است:

$$x^n+a^n=(x+a)(x^{n-۱}-ax^{n-۲}+a^۲x^{n-۳}-\cdots-a^{n-۲}x+a^{n-۱})$$

در حالت خاص:

$$n=۳ \Rightarrow x^۳+a^۳=(x+a)(x^۲-ax+a^۲)$$

$$n=۵ \Rightarrow x^۵+a^۵=(x+a)(x^۴-ax^۳+a^۲x^۲-a^۳x+a^۴)$$

مثال: **چند جمله‌ای $x^۵+۳۲$ را با عامل $x+۲$ تجزیه کنید.**

پاسخ:

$$x^۵+۳۲=(x+۲)(x^۴-۲x^۳+۴x^۲-۸x+۱۶)$$

تذکر: برای nهای زوج، عبارت x^n+a^n تجزیه نمی‌شود.