

کتاب شب امتحان آمار و احتمال یازدهم از ۴ قسمت اصلی تشکیل شده است که به صورت زیر است:

(۱) **آزمون‌های نوبت اول:** آزمون‌های شماره ۱ تا ۵ این کتاب مربوط به مباحث نوبت اول است که خودش به دو قسمت تقسیم می‌شود:

**الف) آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده:** آزمون‌های شماره ۱ و ۲ را فصل به فصل طبقه‌بندی کرده‌ایم. بنابراین شما به راحتی می‌توانید پس از خواندن هر فصل از درس‌نامه تعدادی سؤال را بررسی کنید. حواستان باشد این آزمون‌ها هم، ۲۰ نمره‌ای و مثل یک آزمون کامل هستند. در کنار سؤال‌های این آزمون‌ها نکات مشاوره‌ای نوشته‌ایم. این نکات به شما در درس خواندن قبل از امتحان و پاسخگویی به آزمون در زمان امتحان کمک می‌کند.

**ب) آزمون طبقه‌بندی‌نشده:** آزمون‌های شماره ۳ تا ۵ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم تا دو آزمون نوبت اول مشابه آزمونی را که معلمان از شما خواهد گرفت، ببینید.

(۲) **آزمون‌های نوبت دوم:** آزمون‌های شماره ۶ تا ۱۳ از کل کتاب و مطابق امتحان پایان سال طرح شده‌اند. این قسمت هم، خودش به ۲ بخش تقسیم می‌شود:

**الف) آزمون‌های طبقه‌بندی‌شده:** آزمون‌های شماره ۶ تا ۹ را که برای نوبت دوم طرح شده‌اند هم طبقه‌بندی کرده‌ایم. با این کار باز هم می‌توانید پس از خواندن هر فصل تعدادی سؤال مرتبط را پاسخ دهید. هر کدام از این آزمون‌ها هم، ۲۰ نمره دارند در واقع در این بخش، شما ۴ آزمون کامل را می‌بینید. این آزمون‌ها هم نکات مشاوره‌ای دارند.

**ب) آزمون‌های طبقه‌بندی‌نشده:** آزمون‌های شماره ۱۰ تا ۱۳ را طبقه‌بندی نکرده‌ایم؛ پس، در این بخش با ۴ آزمون نوبت دوم، مشابه آزمون پایان سال معلمان مواجه خواهید شد.

(۳) **پاسخ‌نامه تشریحی آزمون‌ها:** در پاسخ تشریحی آزمون‌ها تمام آن‌چه را که شما باید در امتحان بنویسید تا نمره کامل کسب کنید، برایتان نوشته‌ایم.

(۴) **درس‌نامه کامل شب امتحانی:** این قسمت برگ برنده شما نسبت به کسانی است که این کتاب را نمی‌خوانند. در این قسمت تمام آن‌چه را که شما برای گرفتن نمره عالی در امتحان آمار و احتمال نیاز دارید، تنها در ۱۶ صفحه آورده‌ایم، بخوانید و لذتش را ببرید! **یک راهکار:** موقع امتحان‌های نوبت اول می‌توانید از سؤال‌های فصل‌های ۱ و ۲ آزمون‌های ۶ تا ۹ هم استفاده کنید.



## بازم‌بندی درس آمار و احتمال

شماره فصل	نوبت اول	نوبت دوم
۱	۱۲	۴/۵
۲	۸ (تا آخر صفحه ۴۷)	۵/۵
۳	-	۶
۴	-	۴
جمع	۲۰	۲۰

## فهرست

نوبت	آزمون	پاسخ‌نامه
اول	۳	۱۶
اول	۴	۱۷
اول	۵	۱۸
اول	۶	۱۹
اول	۷	۲۰
دوم	۸	۲۱
دوم	۹	۲۲
دوم	۱۰	۲۳
دوم	۱۱	۲۵
دوم	۱۲	۲۶
دوم	۱۳	۲۷
دوم	۱۴	۲۸
دوم	۱۵	۲۹

شماره	kheilisabz.com	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	رشته: ریاضی فیزیک	آمار و احتمال
نمره	نوبت اول پایه یازدهم دوره متوسطه دوم			ردیف
<b>آزمون شماره ۲</b>				
<b>فصل اول</b>				
۱	اصطلاحات زیر را تعریف کنید.			۱
	الف) گزاره‌ها      ب) نقیض گزاره			
۱	جاهای خالی را با عبارت مناسب تکمیل کنید.			۲
	الف) در گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ به گزاره $p$ ..... و به گزاره $q$ ..... می‌گویند. ب) گزاره‌های کلی (گزاره‌های با سور عمومی) فقط زمانی درست هستند که .....			
۱/۵	ترکیب فصلی « $\vee$ » را تعریف نموده و جدول ارزش آن را رسم کنید.			۳
۱/۵	ارزش گزاره‌های سوری را تعیین کنید و سپس نقیض هر یک را بنویسید.			۴
	الف) $\forall x \in (-\infty, 0); x - \frac{1}{x} \leq -2$ ب) $\exists x \in \mathbb{R}; \frac{x-3}{5} = 0$			
۱/۵	مجموعه $A$ دارای ۶۲ زیرمجموعه سره ناتهی است. تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی $A$ چند برابر تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی آن است؟ <i>به عبارت زیرمجموعه سره ناتهی فیلی فیلی دقت کنید.</i>			۵
۱/۵	الف) فرض کنید: $A \subseteq \emptyset$ . ثابت کنید $A = \emptyset$ ب) فرض کنید: $U \subseteq A$ . ثابت کنید $A = U$			۶
۲	درستی برابری‌های زیر را با استفاده از جبر مجموعه‌ها ثابت کنید: الف) $A - (B \cup C) = (A - B) - C$ ب) $A \cap (A \cup B) = A$ <i>در قسمت (ب) به <math>A</math> اول اجتماع تهی رو اضافه کنیم، اصل مسئله تغییری نمی‌کند.</i>			۷
۲	هرگاه $A = \{x \in \mathbb{N}   x^2 \leq 10\}$ و $B = \{2^k   k \in \mathbb{Z}, k^2 \leq 1\}$ : آن‌گاه مطلوب است، اعضای مجموعه‌های: $A, B, A^c, A \times B$ و $A^c - A \times B$ .			۸
<b>فصل دوم</b>				
۲	اگر $A$ و $B$ دو پیشامد باشند به طوری که $A \subseteq B$ ، ثابت کنید: الف) $P(B - A) = P(B) - P(A)$ ب) $P(A) \leq P(B)$			۹
۱/۵	احتمال این‌که شخصی ناراحتی کلیه داشته باشد $0/23$ ، ناراحتی قلبی داشته باشد $0/24$ و احتمال این‌که دست‌کم یکی از این دو نوع بیماری را داشته باشد $0/38$ است. احتمال این‌که هر دو نوع بیماری را دارا باشد، چه قدر است؟ <i>احتمال دست‌کم یا احتمال حداقل یکی از دو نوع را دارا بودن همون احتمال اجتماع هست.</i>			۱۰
۱/۵	تاسی به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد فرد سه برابر احتمال وقوع هر عدد زوج است. اگر در یک پرتاب این تاس، پیشامد $A = \{2, 3\}$ باشد، $P(A)$ را بیابید.			۱۱
۱/۵	ظرفی شامل ۳ مهره آبی، ۲ مهره سفید و ۵ مهره قرمز است. مهره‌ای به تصادف بیرون می‌آوریم. اگر این مهره آبی نباشد با کدام احتمال مهره قرمز است؟			۱۲
۱/۵	اگر $A$ و $B$ دو پیشامد از فضای نمونه $S$ باشند، به طوری که $P(A B') = 0/4$ و $P(B) = 0/3$ آن‌گاه مطلوب است: $P(A \cup B)$ . <i>از احتمال شرطی، <math>P(A) - P(A \cap B)</math> رو به دست بیآورید.</i>			۱۳
۲۰	موفق باشید			جمع نمرات

شماره	kheilisabz.com	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	رشته: ریاضی فیزیک	آمار و احتمال															
ردیف	آزمون شماره ۱۰			نوبت دوم پایه یازدهم دوره متوسطه دوم															
۱/۵	ارزش گزاره‌های مرکب زیر را تعیین کنید. الف) $(x^2 + 4 = 0) \vee (x > 2)$ ب) ۷ عدد اول نیست اگر و تنها اگر ۷ مربع کامل باشد.			۱															
۱/۵	اگر دو عضو از مجموعه A حذف شود، تعداد زیرمجموعه‌های A، ۳۸۴ واحد کم می‌شود. مجموعه توانی A چند عضو دارد؟			۲															
۱/۵	با استفاده از قوانین جبر مجموعه‌ها ثابت کنید: $(A - B)' = A' \cup B$			۳															
۱	اگر A و B دو پیشامد دلخواه از فضای نمونه S باشند، آنگاه ثابت کنید: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$			۴															
۱	تاسی به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد زوج دو برابر احتمال وقوع هر عدد فرد است. اگر A پیشامد وقوع عددی کم‌تر از ۵ باشد، احتمال وقوع پیشامد A چه قدر است؟			۵															
۱/۲۵	در شهری ۶۰ درصد راننده‌ها مرد و ۴۰ درصد آن‌ها زن هستند. احتمال این که یک راننده مرد چراغ قرمز را رد کند ۰/۰۵ و زن‌ها چنین تخلفی را کنند ۰/۰۱ است. راننده‌ای به خاطر رد کردن چراغ قرمز جریمه شده است احتمال آن را بیابید که راننده زن باشد.			۶															
۱	آزمایش‌ها نشان می‌دهد که احتمال بهبودی شخص A بعد از عمل جراحی ۸۰٪ و همین احتمال برای شخص B، ۶۰٪ است. احتمال آن که حداقل یکی از دو نفر بعد از عمل جراحی بهبود یابد چه قدر است؟			۷															
۱/۲۵	در جعبه‌ای ۳ مهره سفید و ۲ مهره سیاه و ۵ مهره قرمز موجود است. اگر ۲ مهره از آن بیرون آوریم، با کدام احتمال این دو مهره هم‌رنگ نیستند؟			۸															
۱	در یک نمودار دایره‌ای که نشان‌دهنده معدل‌های ۴۸ نفر از دانش‌آموزان یک مدرسه است زاویه مرکزی مربوط به دانش‌آموزان با معدل ۱۵، برابر ۴۵° است. تعداد آن‌ها چه قدر بوده است؟			۹															
۱/۵	میانگین موزون درصد دانش‌آموزی مطابق جدول، ۵۸ است. نمره زبان او چند درصد است؟			۱۰															
	<table border="1"> <thead> <tr> <th>زبان</th> <th>معارف</th> <th>عربی</th> <th>ادبیات</th> <th>درس</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>x</td> <td>۷۰</td> <td>۵۲</td> <td>۶۵</td> <td>درصد</td> </tr> <tr> <td>۲</td> <td>۳</td> <td>۲</td> <td>۴</td> <td>ضریب</td> </tr> </tbody> </table>				زبان	معارف	عربی	ادبیات	درس	x	۷۰	۵۲	۶۵	درصد	۲	۳	۲	۴	ضریب
زبان	معارف	عربی	ادبیات	درس															
x	۷۰	۵۲	۶۵	درصد															
۲	۳	۲	۴	ضریب															
۱	معدل ۵ درس دانش‌آموزی ۱۷ است. چنانچه دو نمره ۱۷ و ۱۱ را از نمرات او حذف کنیم معدل جدید او چه قدر می‌شود؟			۱۱															
۱/۵	در ۲۵ داده آماری، میانگین و انحراف معیار به ترتیب ۳۰ و ۸ است. اگر داده‌های ناجور ۱۰ و ۱۵ و ۴۵ و ۵۰ از بین آن‌ها حذف شوند، واریانس داده‌های باقی‌مانده را محاسبه کنید.			۱۲															
۱	واریانس داده‌های مقابل را محاسبه کنید.			۱۳															
	<table border="1"> <tbody> <tr> <td>۹</td> <td>۷</td> <td>۵</td> <td>۳</td> <td>۱</td> <td>مرکز دسته</td> </tr> <tr> <td>۳</td> <td>۵</td> <td>۳</td> <td>۷</td> <td>۲</td> <td>فراوانی</td> </tr> </tbody> </table>				۹	۷	۵	۳	۱	مرکز دسته	۳	۵	۳	۷	۲	فراوانی			
۹	۷	۵	۳	۱	مرکز دسته														
۳	۵	۳	۷	۲	فراوانی														
۱	جاهای خالی را با واژه مناسب تکمیل کنید. فرض کنید می‌خواهیم برخی از ویژگی‌های موش‌های سرگردان شهر تهران را بررسی کنیم. هر موش سرگردان در شهر معرف ..... است. همه موش‌های شهر تهران که کل واحدهای آماری هستند، ..... را تشکیل می‌دهند. ۱۰۰ موش سرگردان در شهر معرف یک ..... است.			۱۴															
۱/۵	پارامتر و آماره را تعریف کرده و با مثال مناسبی تفاوت این دو را بیان کنید.			۱۵															
۱/۵	اگر در یک نمونه تصادفی ۲۵ نفری از دانشجویان یک دانشگاه میانگین سن آن‌ها ۲۲ برآورد شود و انحراف معیار سن کل دانشجویان دانشگاه بر اساس اطلاعات قبلی ۱/۹ باشد، بازه اطمینان ۹۵ درصدی برای میانگین سن جامعه چه قدر است؟			۱۶															
۲۰	موفق باشید			جمع نمرات															

برای مشخص کردن اعضای B نیز ابتدا مقادیر k را شناسایی می‌کنیم:

$$k \in \mathbb{Z}, k^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq k \leq 1 \Rightarrow k = \{-1, 0, 1\}$$

$$\Rightarrow B = \{2^k \mid k = -1, 0, 1\} = \{\frac{1}{2}, 1, 2\}$$

برای نوشتن  $A^2$  زوج‌مرتب‌هایی با اعضای A می‌نویسیم:

$$A^2 = \left\{ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3) \right\}$$

همچنین  $A \times B$  شامل زوج‌مرتب‌هایی است که مؤلفه اول از A و مؤلفه دوم از B انتخاب می‌شوند.

$$A \times B = \left\{ (1, \frac{1}{2}), (1, 1), (1, 2), (2, \frac{1}{2}), (2, 1), (2, 2), (3, \frac{1}{2}), (3, 1), (3, 2) \right\}$$

اما  $A^2 - A \times B$  یعنی از  $A^2$  آن عضوهایی که در  $A \times B$  نیز قرار دارند باید حذف شوند، در نتیجه زوج‌مرتب‌های  $(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)$  حذف می‌شوند.

$$A^2 - A \times B = \{(1, 3), (2, 3), (3, 3)\}$$

۹- الف) اگر  $A \subseteq B$  باشد، آن‌گاه:  $(B-A) \cup A = B$   
 $(B-A) \cap A = \emptyset$

اکنون از قانون اجتماع استفاده می‌کنیم:

$$P((B-A) \cup A) = P(B) \Rightarrow P(B-A) + P(A) - P(\underbrace{(B-A) \cap A}_{\emptyset}) = P(B)$$

می‌دانیم  $P(\emptyset) = 0$  در نتیجه:

$$\Rightarrow P(B-A) + P(A) = P(B)$$

$$\Rightarrow P(B-A) = P(B) - P(A)$$

(ب) چون  $P(B-A) \geq 0$  پس:  $P(B) - P(A) \geq 0$

$$\Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

۱۰- A: داشتن ناراحتی کلیه  $\leftarrow \frac{0}{23}$

B: داشتن ناراحتی قلبی  $\leftarrow \frac{0}{24}$

احتمال دست‌کم یکی، یعنی احتمال اجتماع دو پیشامد A و B که طبق فرض  $P(A \cup B) = \frac{0}{38}$  طبق قانون اجتماع داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\frac{0}{38} = \frac{0}{23} + \frac{0}{24} - x \Rightarrow x = \frac{0}{09}$$

$$P(\text{زوج}) = 2P(\text{فرد}) \quad -11$$

$$P(\text{زوج}) = x \Rightarrow P(\text{فرد}) = 3x$$

مجموع همه احتمالات باید برابر ۱ باشد:

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$

$$3x + x + 3x + x + 3x + x = 1$$

$$12x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{12} \Rightarrow P(A) = x + 3x = 4x = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

۱۲- برای ساختن ظرف شرطی مهره‌های آبی را حذف می‌کنیم.

$$\text{ظرف شرطی} = \frac{2 \text{ مهره سفید}}{5 \text{ مهره قرمز}} \Rightarrow \text{کل} = 7$$

$$\Rightarrow \frac{5}{2+5} = \frac{5}{7}$$

۱۳- فرمول شرطی را برای A و B' به کار می‌بریم:

$$P(A | B') = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} = \frac{P(A-B)}{1-P(B)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1-P(B)}$$

$$\Rightarrow \frac{0}{4} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - \frac{0}{3}} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{\frac{0}{7}}$$

$$\Rightarrow P(A) - P(A \cap B) = \frac{0}{28}$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = \frac{P(B)}{\frac{0}{3}} + \frac{P(A) - P(A \cap B)}{\frac{0}{28}} = \frac{0}{58}$$

۱- الف) گزاره‌نما: جمله‌ای است خبری که شامل یک یا چند متغیر است. گزاره‌نمای شامل x را با P(x) و گزاره‌نمای شامل x و y را با P(x, y) نشان می‌دهند.

ب) نقیض یک گزاره: گزاره‌ای است که ارزش آن دقیقاً مخالف ارزش خود گزاره باشد. نقیض یک گزاره مثل P را با نماد  $\sim P$  نشان می‌دهند و می‌خوانند «چنین نیست که P».

۲- الف) مقدم - تالی

(ب) مجموعه جوابشان با دامنه متغیرشان مساوی باشد.

۳- اگر دو گزاره ساده با حرف «یا» به هم مربوط شوند آن را ترکیب فصلی دو گزاره می‌نامیم و با نماد  $p \vee q$  نشان می‌دهیم.

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

۴- الف) نادرست. اگر  $x = -1$  باشد، آن‌گاه  $-2 \leq 0 \leq -1 - \frac{1}{-1}$  که نادرست است.

نقیض:  $\exists x \in (-\infty, 0); x - \frac{1}{x} > -2$

(ب) درست است، زیرا به ازای  $x = 3$  رابطه برقرار است.

نقیض:  $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{x-3}{5} \neq 0$

۵- اگر  $\emptyset$  و خود A را به زیرمجموعه‌های سره نتهی اضافه کنیم، آن‌گاه A در کل دارای ۶۴ زیرمجموعه است. می‌دانیم یک مجموعه n عضوی دارای  $2^n$  تا زیرمجموعه است. پس داریم:

$$\Rightarrow 2^n = 64 = 2^6 \Rightarrow n = 6$$

$$\left. \begin{aligned} \text{تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی} &= \binom{6}{4} = \frac{6!}{4!2!} = 15 \\ \text{تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی} &= \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!4!} = 15 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{15}{15} = 1$$

یعنی تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی، با تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی یک مجموعه ۶ عضوی برابر است.

۶- می‌دانیم دو مجموعه A و B با هم برابرند هرگاه  $A \subseteq B$  و  $B \subseteq A$  باشد.

الف) واضح است که  $\emptyset \subseteq A$  و طبق فرض  $A \subseteq \emptyset$  پس طبق نکته بالا  $A = \emptyset$ .

ب) واضح است که  $A \subseteq U$  و طبق فرض  $U \subseteq A$  پس طبق نکته بالا:  $A = U$ .

مرجع

۷- الف) اولاً:  $A - (B \cup C) = A \cap (B \cup C)'$

$$(B \cup C)' = B' \cap C'$$

در نتیجه:  $A \cap (B \cap C)' = A \cap (B' \cap C')$

حال طبق خاصیت شرکت‌پذیری می‌توان پرانتزها را جابه‌جا کرد:

$$\Rightarrow (A \cap B') \cap C'$$

$$= (A - B) - (C)' = (A - B) - C$$

و از آن‌جا طبق قانون تفاضل

(ب) در اجتماع بی‌تأثیر است، پس  $A = A \cup \emptyset$  را در طرف چپ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$A \cap (A \cup B) = (A \cup \emptyset) \cap (A \cup B)$$

$$\Rightarrow A \cup (\emptyset \cap B)$$

اکنون از (AU) فاکتور می‌گیریم:

$$\emptyset \cap B = \emptyset \text{ پس } \emptyset \cap B = \emptyset$$

$$\Rightarrow A \cup \emptyset = A$$

۸- ابتدا اعضای مجموعه A را مشخص می‌کنیم:

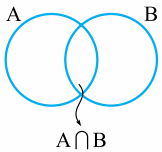
$$A = \{x \in \mathbb{N}, x^2 \leq 10\}$$

$$\Rightarrow x^2 \leq 10 \Rightarrow -\sqrt{10} \leq x \leq \sqrt{10}$$

اعداد طبیعی در این بازه عبارتند از:  $x = 1, 2, 3 \Rightarrow A = \{1, 2, 3\}$



۴- با توجه به شکل مقابل:



$A \cup B = (A - (A \cap B)) \cup (B - (A \cap B)) \cup (A \cap B)$   
از طرفی سه مجموعه  $A - (A \cap B)$  و  $B - (A \cap B)$  و  $A \cap B$  جدا از هم هستند.

در نتیجه:

$$P(A \cup B) = P(A - (A \cap B)) + P(B - (A \cap B)) + P(A \cap B)$$

اما  $A \cap B \subseteq B$  و  $A \cap B \subseteq A$  در نتیجه:

$$P(A - (A \cap B)) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(B - (A \cap B)) = P(B) - P(A \cap B)$$

با جای گذاری این دو رابطه خواهیم داشت:

$$P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$+ P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(\text{زوج}) = 2P(\text{فرد}) = 2x \quad -5$$

در تاس مجموع همه احتمالها برابر ۱ است:

$$P(1) + P(2) + \dots + P(6) = 1$$

$$\Rightarrow x + 2x + x + 2x + x + 2x = 1$$

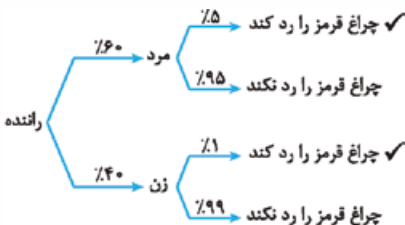
$$\Rightarrow 9x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{9} \Rightarrow P(\text{فرد}) = \frac{1}{9} \Rightarrow P(\text{زوج}) = \frac{2}{9}$$

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\Rightarrow P(A) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4)$$

$$= x + 2x + x + 2x = 6x = 6 \times \frac{1}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

۶- با توجه به نمودار درختی:



$$P(\text{راننده چراغ قرمز را رد کند}) = \frac{60}{100} \times \frac{5}{100} + \frac{40}{100} \times \frac{1}{100} = \frac{34}{1000}$$

$$\frac{P(\text{چراغ قرمز را رد کند و زن})}{P(\text{چراغ قرمز را رد کند})} = \frac{\frac{40}{100} \times \frac{1}{100}}{\frac{34}{1000}} = \frac{4}{34} = \frac{2}{17}$$

۷-  $A$  و  $B$  دو پیشامد مستقل از هم هستند. پس:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{10} + \frac{6}{10} - \frac{1 \times 6}{100}$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{6}{10} - \frac{6}{100} = \frac{14}{10} - \frac{6}{100} = \frac{94}{100} = 94\%$$

-۸

دو مهره هم رنگ نباشند:

- ۳ مهره سفید
- ۲ مهره سیاه
- ۵ مهره قرمز

$$P(A) = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1} + \binom{3}{1}\binom{5}{1} + \binom{2}{1}\binom{5}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{6 + 15 + 10}{45} = \frac{31}{45}$$

$$\alpha_i = \frac{f_i}{n} \times 360 \Rightarrow 45^\circ = \frac{f_i}{48} \times 360 \Rightarrow f_i = \frac{48 \times 45}{360} = 6$$

$$\bar{x}_w = \frac{4 \times 65 + 2 \times 52 + 3 \times 70 + 2 \times x}{4 + 2 + 3 + 2} \quad -10$$

$$\Rightarrow 58 = \frac{260 + 104 + 210 + 2x}{11} \Rightarrow 638 = 574 + 2x$$

### آزمون شماره ۱۰ (نوبت دوم)

۱- یک گزاره‌نمای نادرست است.  $q: x^2 + 4 = 0$

درست:  $p: 1 > 2$

درست:  $p \vee q$

(ترکیب فصلی دو گزاره فقط زمانی نادرست است که هر دو گزاره نادرست باشند.)

غلط:  $q$ : ۷ مربع کامل است:  $p$ : غلط: ۷ عدد اول نیست: (ب)

$$p \Leftrightarrow q \equiv \underbrace{p}_{T} \wedge \underbrace{q}_{T}$$

اکنون ترکیب عطفی دو گزاره درست همواره درست است.

(منظور از  $T$ : «درست» می باشد)

۲- فرض می کنیم مجموعه  $A$ ,  $n$  عضو داشته باشد، پس  $2^n$  تا زیرمجموعه دارد. طبق

فرض با کم کردن ۲ عضو از  $n$  عضو مجموعه  $A$ , ۳۸۴ واحد از تعداد زیرمجموعه‌های  $A$

$$2^n - 384 = 2^{n-2} \Rightarrow 2^n - 384 = 2^n \times \frac{1}{4}$$

کم می شود. پس:

$$\Rightarrow 2^n - \frac{1}{4} \times 2^n = 384$$

$$\frac{3}{4} \times 2^n = 3 \times 2^7 \Rightarrow 2^n = 2^9 \Rightarrow n = 9$$

پس در ابتدا  $A$  دارای ۹ عضو بوده است و  $P(A)$  دارای  $2^9$  عضو (۵۱۲ عضو) است.

۳- اولاً:  $A - B = A \cap B'$  در نتیجه:

$$(A - B)' = (A \cap B)'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B$$

ثانیاً: طبق دمورگان:

$$(A - B)' = A' \cup B$$

در نتیجه:

توجه داریم که  $(B')' = B$ .

$$\Rightarrow 2x = 64 \Rightarrow x = 32$$

یعنی درس زبان را ۳۲ درصد زده است.

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \overbrace{11+17}^{28}}{5} = 17 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 5(17) - 28 \quad -11$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 85 - 28 = 57 \Rightarrow \bar{x}_{\text{جدید}} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{57}{3} = 19$$

۱۲- توجه داریم که میانگین داده‌های ناجور حذف شده هم ۳۰ است. (اکثرأ این اتفاق می‌افتد.)

$$n = 25 \quad \bar{x} = 30 \quad \sigma = 8 \Rightarrow \sigma^2 = 64$$

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - 30)^2 + (x_2 - 30)^2 + \dots + (x_{21} - 30)^2}{25}$$

$$+ \frac{(15 - 30)^2 + (45 - 30)^2 + (50 - 30)^2 + (10 - 30)^2}{25}$$

$$\Rightarrow 64 = \frac{(x_1 - 30)^2 + \dots + (x_{21} - 30)^2 + 400 + 225 + 225 + 400}{25}$$

$$\Rightarrow (x_1 - 30)^2 + \dots + (x_{21} - 30)^2 + 1250 = 1600$$

$$\Rightarrow (x_1 - 30)^2 + \dots + (x_{21} - 30)^2 = 350$$

$$\sigma_{\text{جدید}}^2 = \frac{350}{21} = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}$$

تعداد داده‌های باقی‌مانده

۱۳- ابتدا میانگین را حساب می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{2 + 21 + 15 + 35 + 27}{2 + 7 + 3 + 5 + 3} = \frac{100}{20} = 5$$

$$\sigma^2 = \frac{(1-5)^2 \times 2 + (3-5)^2 \times 7 + (5-5)^2 \times 3 + (7-5)^2 \times 5}{20}$$

$$+ \frac{(9-5)^2 \times 3}{20} = \frac{32 + 28 + 0 + 20 + 48}{20} = \frac{128}{20} = 6\frac{4}{5}$$

۱۴- یک واحد آماری - جامعه آماری - نمونه تصادفی

۱۵- پارامتر: یک مشخصه عددی که توصیف‌کننده جنبه‌ای خاص از کل جامعه است را

پارامتر جامعه نامند.

آماره: یک مشخصه عددی که توصیف‌کننده جنبه‌ای خاص از یک نمونه تصادفی جامعه

است را یک آماره نامند.

۱۶- اگر داده‌های مربوط به همه کوهنوردان کوه دنا را داشته باشیم (کل جامعه)

آن‌گاه نسبت مردان کوهنورد به کل جامعه کوهنوردان یک پارامتر است. اما اگر فقط

داده‌های بعضی از کوهنوردان را داشته باشیم (نمونه) آن‌گاه نسبت مردان کوهنورد به

کوهنوردان نمونه، یک آماره خواهد بود.

$$\bar{x}_{\text{نمونه}} = 22 \quad n = 25 \quad \sigma_{\text{جامعه}} = 1/9 \quad -16$$

$$\bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 22 - \frac{2(1/9)}{\sqrt{25}} \leq \mu \leq 22 + \frac{2(1/9)}{\sqrt{25}}$$

$$\Rightarrow 22 - \frac{3/8}{5} \leq \mu \leq 22 + \frac{3/8}{5} \Rightarrow 22 - 0/76 \leq \mu \leq 22 + 0/76$$

$$\Rightarrow 21/24 \leq \mu \leq 22/76 \Rightarrow (21/24, 22/76)$$

# درس نامه توپ برای شب امتحان



## آشنایی با مبانی ریاضیات

### (۱) آشنایی با منطق ریاضی

**منطق ریاضی (منطق نمادین):** دستور زبان ریاضی یا مطالعه و تحلیل ساختار جمله‌هایی است که در ریاضی به کار برده می‌شوند. در منطق ریاضی، استدلال‌ها بررسی می‌شوند تا درستی یا نادرستی آن‌ها مشخص شود.

**گزاره:** جمله‌ای است خبری که یا راست است یا دروغ.

**تکذیب:** جملات پرسشی، امری و عاطفی گزاره نیستند زیرا خبری را به ما نمی‌رسانند. مانند: «بیشتر درس بخوان.» که جمله امری است. «چه ماشین زیبایی» که جمله عاطفی است. «شما امسال کنکور نمی‌دهید؟» که جمله پرسشی است. معمولاً گزاره‌ها را با حروف  $p, q, r$  و ... نشان می‌دهند.

### ارزش گزاره

درست یا نادرست بودن یک گزاره را ارزش گزاره می‌گوییم.

ارزش درست گزاره با نماد «د» و ارزش نادرست گزاره با نماد «ن» نشان داده می‌شود.

اگر  $p$  یک گزاره باشد آن‌گاه ارزش آن ۲ حالت دارد:

p
د
ن

ارزش‌های دو گزاره  $p$  و  $q$ ، طبق جدول زیر دارای ۴ حالت است:

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

**تکذیب:** اگر  $n$  گزاره داشته باشیم، در این صورت جدول ارزش گزاره‌ها  $2^n$  حالت دارد. مثلاً جدول ارزش گزاره‌های  $p, q, r$  دارای  $2^3 = 8$  حالت است.

**نقیض یک گزاره:** گزاره‌ای است که ارزش آن دقیقاً مخالف ارزش گزاره اولیه باشد. نقیض گزاره  $p$  را با نماد  $\sim p$  نشان می‌دهند و آن را «چنین نیست که  $p$ » می‌خوانند.

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

**مثال:** نقیض گزاره «۲ عددی زوج است» را بنویسید.

**پاسخ:** «چنین نیست که ۲ عددی زوج باشد.» یا «۲ عددی زوج نیست.»

**تکذیب:** ارزش گزاره  $p$  با ارزش گزاره  $\sim(\sim p)$  یکسان است در این صورت گوییم دو گزاره هم‌ارز هستند و می‌نویسیم:

مثلاً: گزاره  $p$ : «۹ عددی مربع کامل است.»  
گزاره  $\sim p$ : «۹ عددی مربع کامل نیست.»  
گزاره  $\sim(\sim p)$ : «۹ عددی مربع کامل است.»

**گزاره‌نما:** هر جمله خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جای گذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل شود، گزاره‌نما نامیده می‌شود. گزاره‌نماها را برحسب تعداد متغیرهای به کار رفته در آن‌ها، یک متغیره، دو متغیره و ... می‌نامند.

مثلاً « $x$  یک عدد اول است» گزاره‌نمای یک متغیره و « $3 < x - 2y$ » یک گزاره‌نمای دو متغیره است.

**دامنه متغیر گزاره‌نما:** در هر گزاره‌نما، به مجموعه مقادیری که می‌توان آن‌ها را به جای متغیرهای آن قرار داد تا گزاره‌نما به گزاره تبدیل شود، دامنه متغیر گزاره‌نما می‌گویند و با حرف  $D$  نمایش می‌دهند.

**مجموعه جواب:** در هر گزاره‌نما، به زیرمجموعه‌ای از دامنه متغیر که به ازای اعضای آن‌ها، گزاره‌نما به یک گزاره با ارزش درست تبدیل شود، مجموعه‌جواب گزاره‌نما گویند و با حرف  $S$  نمایش می‌دهند. پس همواره  $S \subseteq D$ .

**مثال:** دامنه متغیر گزاره‌نماهای زیر داده شده است. مجموعه‌جواب هر یک را مشخص کنید.

الف)  $x$  مضرب ۵ است. ( $D = \mathbb{N}$ )      ب)  $\frac{2x+1}{x-1} = 1$  ( $D = \mathbb{R} - \{1\}$ )

**پاسخ:** الف) مجموعه‌جواب، آن اعداد طبیعی است که مضرب ۵ باشند، پس:

$$S = \{5, 10, 15, \dots\}$$

ب) مجموعه‌جواب،  $x$ هایی است که تساوی را برقرار کنند:

$$\frac{2x+1}{x-1} = 1 \rightarrow 2x+1 = x-1 \Rightarrow 2x-x = -1-1 \Rightarrow x = -2$$

چون  $-2$  به مجموعه دامنه داده‌شده تعلق دارد پس قابل قبول است. در نتیجه:  $S = \{-2\}$ .

**ترکیب گزاره‌ها:** در کتاب درسی ترکیب گزاره‌ها با ۴ رابط «و»، «یا»، «اگر ..... آن‌گاه .....» و «اگر ..... آن‌گاه .....» انجام می‌شود.

**ترکیب عطفی:** اگر دو گزاره ساده  $p$  و  $q$  با حرف «و» به هم مربوط شوند آن را ترکیب عطفی می‌نامند و با نماد  $p \wedge q$  نشان می‌دهند. جدول ارزش گزاره  $p \wedge q$  به صورت زیر است:

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

**خلاصه جدول ارزش:**  $p \wedge q$  فقط زمانی درست است که هر دو گزاره  $p$  و  $q$  درست باشند. **مثال:** ارزش گزاره عطفی زیر را مشخص کنید.

«۹۰ مربع کامل است و کوچک‌ترین عدد طبیعی اول ۲ است.»

**پاسخ:** گزاره «۹۰ مربع کامل است» را  $p$  بنامید. چون ۹۰ جذر کامل ندارد پس ارزش گزاره نادرست است.

گزاره «کوچک‌ترین عدد طبیعی اول، ۲ است» را  $q$  بنامید. ارزش این گزاره درست است.

p	q	$p \wedge q$
ن	د	ن

**ترکیب فصلی:** اگر دو گزاره ساده  $p$  و  $q$  با حرف «یا» به هم مربوط شوند آن را ترکیب فصلی می‌نامند و با نماد  $p \vee q$  نشان می‌دهند.

جدول ارزش گزاره  $p \vee q$  به صورت زیر است:

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن



p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
د	د	د	ن	ن	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	د	د

طبق جدول ستون‌های سوم و ششم با هم یکسان هستند، پس:  $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$



۱- هرگاه p و q دو گزاره باشند آن‌گاه ترکیب شرطی « $p \Rightarrow p \vee q$ » همواره درست است.

۲- هرگاه p و q دو گزاره باشند آن‌گاه ترکیب شرطی « $p \wedge q \Rightarrow p$ » همواره درست است.

**ترکیب دوشروطی:** اگر p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب  $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$  را

به صورت « $p \Leftrightarrow q$ » نوشته و آن را ترکیب دو شرطی p و q می‌نامیم و می‌خوانیم:

«p اگر و تنها اگر q»

**مثال:**  $(x > 2) \Leftrightarrow (3x - 5 > 1)$  یک گزاره دو شرطی است.

### هم‌ارزی‌های منطقی بین گزاره‌های مرکب:

$$\begin{cases} (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r) \\ (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \end{cases}$$

الف) شرکت‌پذیری (جاب‌جایی پرانتزها):

$$\begin{cases} p \vee q \equiv q \vee p \\ p \wedge q \equiv q \wedge p \end{cases}$$

ب) جاب‌جایی (جاب‌جایی گزاره‌ها):

پ) پخش (پخش کردن یک گزاره بین دو گزاره):

$$\begin{cases} p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{cases}$$

**سور:** سورها علامت‌هایی هستند که قبل از گزاره‌نماها قرار می‌گیرند و متغیرهای گزاره‌نما را به یک مجموعه معین محدود می‌کنند و بدین ترتیب گزاره‌نما را به یک گزاره تبدیل می‌کنند که این گزاره می‌تواند ارزش درست یا نادرست داشته باشد.

**انواع سور:** عبارت‌های «به ازای هر» یا «به ازای جمیع مقادیر» را سور عمومی نامند و با نماد « $\forall$ » نشان می‌دهند. هم‌چنین عبارت‌های «وجود دارد» یا «به ازای بعضی مقادیر» را سور وجودی نامند و با نماد « $\exists$ » نشان می‌دهند.

### گزاره‌های با سور عمومی:

گزاره‌های زیر داده شده‌اند:

● هر عدد طبیعی، مثبت است.

● هر مستطیل، متوازی‌الاضلاع است.

● هر عدد اول، فرد است.

در هر یک از این گزاره‌ها، در واقع خاصیتی را به تمام اعضای یک مجموعه نسبت داده‌ایم. چنین گزاره‌هایی را گزاره‌های با سور عمومی می‌نامند.

«هر X ای خاصیت p را دارد.»  $\forall x : p(x)$

توجه شود که گزاره‌هایی با سور عمومی وقتی درست هستند که مجموعه جواب آن‌ها با دامنه متغیرشان یکسان باشد.

مثلاً گزاره «هر عدد اول، فرد است» نادرست است زیرا عدد ۲، اول است در حالی که زوج است نه فرد.

**مثال:** ارزش گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

الف)  $\forall x \in \mathbb{R}; x^2 \geq 0$     ب)  $\forall x \in \mathbb{R}^-; x^2 < 0$     پ)  $\forall x \in \mathbb{Z}; \frac{x}{4} < x$

**بسته:** الف) درست؛ زیرا همواره  $x^2$  عددی مثبت یا صفر است.

ب) نادرست؛ زیرا توان دوم هیچ عددی منفی نیست.

پ) نادرست؛ زیرا برای اعداد صحیح منفی برقرار نیست.

مثلاً اگر  $x = -2$  باشد آن‌گاه  $-2 < -\frac{2}{4}$  نادرست است.

### گزاره‌هایی با سور وجودی:

گزاره‌هایی هستند که خاصیتی را حداقل به یک عضو از مجموعه نسبت می‌دهند.

**خلاصه جدول ارزش:**  $p \vee q$  فقط زمانی نادرست است که هر دو گزاره p و q نادرست باشند.

**مثال:** ارزش گزاره فصلی زیر را مشخص کنید.

«معادله  $x^2 - 4 = 0$  در مجموعه اعداد حقیقی دو ریشه دارد یا ۲۵ مضرب ۵ است.»

**بسته:** گزاره « $x^2 - 4 = 0$  در مجموعه اعداد حقیقی دو ریشه دارد» را p بنامید.

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2, x = -2$$

پس ارزش گزاره درست است.

$$25 = 5 \times 5$$

گزاره «۲۵ مضرب ۵ است.» را q بنامید.

پس ارزش گزاره q نیز درست است.

p	q	$p \vee q$
د	د	د

**مثال:** جدول ارزش گزاره  $\sim p \vee (p \wedge \sim q)$  را تشکیل دهید.

**بسته:** دو گزاره p و q را در نظر می‌گیریم. گفتیم که جدول ارزش آن‌ها  $2^2 = 4$  حالت دارد.

دو ستون رسم کرده و این ۴ حالت را مشخص می‌کنیم. سپس گزاره‌های

$\sim p, \sim q, \sim p \vee (p \wedge \sim q)$  و ترکیب فصلی  $\sim p \vee (p \wedge \sim q)$  را در

ستون‌های بعد جای‌گذاری می‌کنیم:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim p \vee (p \wedge \sim q)$
د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	د	د
ن	د	د	ن	ن	د
ن	ن	د	د	ن	د

**ترکیب شرطی:** هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب « $p \Rightarrow q$ » که خوانده

می‌شود «اگر p آن‌گاه q» را ترکیب شرطی دو گزاره می‌گویند. p را مقدم (فرض) و q را

تالی (حکم) می‌نامند.

جدول ارزش گزاره  $p \Rightarrow q$  به صورت زیر است:

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

**خلاصه جدول ارزش:** گزاره شرطی  $p \Rightarrow q$  فقط زمانی نادرست است که p درست و q نادرست باشد.

**مثال:** ارزش این گزاره را مشخص کنید. «اگر چهارضلعی ABCD یک مستطیل باشد آن‌گاه قطرهاش با هم برابر است.»

**بسته:** گزاره «چهارضلعی ABCD یک مستطیل است» همان فرض یا مقدم است که گزاره درستی است.

گزاره «قطرهای مستطیل با هم برابر است.» همان حکم یا تالی است که این هم گزاره درستی است. پس:

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د

**تذکره:** گزاره « $q \Rightarrow p$ » عکس ترکیب شرطی « $p \Rightarrow q$ » است. هم‌چنین گزاره

$\sim q \Rightarrow \sim p$  عکس نقیض ترکیب شرطی « $p \Rightarrow q$ » است.

**مثال:** به کمک جدول ارزش گزاره‌ها نشان دهید:  $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

**بسته:** باید جدولی رسم کنیم که ستون‌هایش به ترتیب: p, q,  $p \Rightarrow q, \sim q, \sim p$  و  $\sim p \Rightarrow \sim q$  باشد:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim p \Rightarrow \sim q$
د	د	د	ن	ن	د





**مثال ۱** یک مجموعه  $n$  عضوی دارای ۳۵ زیرمجموعه ۳ عضوی است. مطلوب است:

(الف)  $n$  تعداد زیرمجموعه‌ها

(ب) تعداد زیرمجموعه‌های دوعضوی

(الف)  $\binom{n}{3} = 35 \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2} = 35$

$\Rightarrow n(n-1)(n-2) = 6 \times 7 \times 5 = 7 \times 6 \times 5 \Rightarrow n = 7$

(ب) تعداد کل زیر مجموعه‌ها:

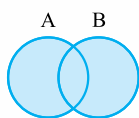
$2^7 = 128$

(پ) تعداد زیرمجموعه‌های سه:

$\binom{7}{3} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$

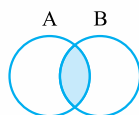
**نکته**

**۱- اجتماع دو مجموعه: (حداقل یکی)**



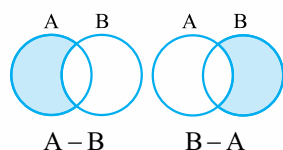
$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$

**۲- اشتراک دو مجموعه: (هر دو مجموعه با هم)**



$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$

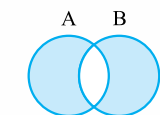
**۳- تفاضل دو مجموعه:**



(فقط A)  $A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$

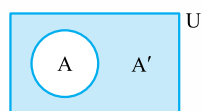
(فقط B)  $B - A = \{x | x \in B \wedge x \notin A\}$

**۴- تفاضل متقارن دو مجموعه: (فقط یکی)**



$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$   
 $= (A \cup B) - (A \cap B)$

متتم یک مجموعه:



$A' = \{x | x \in U \wedge x \notin A\}$

**روش عضوگیری دلخواه:**

یک روش مفید برای این که نشان دهیم  $A \subset B$  این است که ثابت کنیم برای عضو دلخواه  $x$  از  $A$ ، این عضو در  $B$  نیز قرار دارد.

**مثال:** به روش عضوگیری نشان دهید:

الف) اگر  $A \subset B$  آن گاه  $B' \subset A'$

ب) اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه دلخواه از مجموعه مرجع  $U$  باشند آن گاه  $A \subset A \cup B$ .

**نکته:** الف) عضو دلخواه  $x$  را در  $B'$  در نظر می‌گیریم. طبق تعریف متتم این عضو در  $A$  قرار ندارد.  $x \in B' \Rightarrow x \notin B$

چون  $A \subset B$  پس  $x \notin A$  یعنی  $x \in A'$  در نتیجه:  $B' \subset A'$

ب)  $x \in A \Rightarrow x \in A$  یا  $x \in B$

لذا طبق تعریف اجتماع خواهیم داشت:

$x \in A \cup B$

در نتیجه:

**دو مجموعه مساوی:** دو مجموعه  $A$  و  $B$  برابرند اگر و فقط اگر اعضایشان یکی باشد و می‌نویسیم  $A = B$ .

به عبارت ریاضی:  $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

**مثال:** نشان دهید اگر  $A \subset B$  آن گاه  $A - B = \emptyset$ .

**نکته:** طبق تعریف  $A - B$  داریم:

$A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$

اما  $A \subset B$  پس اگر  $x \in A$  باشد حتماً  $x \in B$  نیز خواهد بود در نتیجه:

$A - B = \{x | x \in B \wedge x \notin B\}$

چون  $x$  هم‌زمان نمی‌تواند هم عضو  $B$  باشد و هم عضو  $B'$ ، بنابراین  $A - B = \emptyset$

«حداقل یک  $x$  هست که خاصیت  $p$  را دارد.»  $\exists x : p(x)$  توجه کنید که گزاره‌های با سور وجودی زمانی درست هستند که مجموعه جواب آن‌ها ناتهی باشد. مثلاً گزاره « $\exists x \in \mathbb{Z} ; x^2 = x$ » یک گزاره درست است زیرا برای اعداد صحیح  $x = 0, 1$  تساوی  $x^2 = x$  برقرار است.

اما گزاره « $\exists x \in \mathbb{N} ; \sqrt{x} > x$ » یک گزاره نادرست است؛ زیرا هیچ عدد طبیعی وجود ندارد که در رابطه  $\sqrt{x} > x$  صدق کند.

**نقیض گزاره‌های سوری:**

الف) نقیض گزاره‌های با سور عمومی:  $\sim [\forall x : p(x)] \equiv \exists x : \sim p(x)$

ب) نقیض گزاره‌های با سور وجودی:  $\sim [\exists x : p(x)] \equiv \forall x : \sim p(x)$

**مثال:** الف) نقیض گزاره «هر انسانی کوشا است» را بنویسید.

**نکته:** بعضی انسان‌ها کوشا نیستند.

ب) نقیض گزاره «بعضی از اعداد اول زوج‌اند» را بنویسید.

**نکته:** هر عدد اولی فرد است.

**مثال:** ارزش گزاره‌های زیر را مشخص کرده و نقیض آن‌ها را بنویسید.

الف)  $p : \exists x \in \mathbb{N} : 3 < x < 5$

ب)  $q : \exists y \in \mathbb{R} : y < 0 \wedge y^2 \leq 1$

پ)  $p : \forall x \in \mathbb{N} : x + 1 \geq 2$

**نکته:** الف) گزاره  $p$  به ازای  $x = 4$  درست است.

$\sim p : \forall x \in \mathbb{N} : x \leq 3, x \geq 5$

ب) درست است زیرا  $y = -1$  جواب است.  $\sim q : \forall y \in \mathbb{R} ; y \geq 0 \wedge y^2 > 1$

پ) درست است. (همواره درست)  $\sim p : \exists x \in \mathbb{N} : x + 1 < 2$

**۲) مفاهیم اولیه مجموعه‌ها**

**مفهوم مجموعه:** دسته یا گروهی از اشیای کاملاً مشخص را مجموعه گویند.

**عضو:** هر عدد یا شیء داخل مجموعه را عضو می‌نامند.  $x \in A$ ، یعنی  $x$  متعلق به مجموعه  $A$  است.

**تهی:** مجموعه‌ای که عضو ندارد و با  $\emptyset$  یا  $\{\}$  نمایش داده می‌شود.

**مرجع:** مجموعه‌ای که تمام مجموعه‌های مسئله زیرمجموعه آن باشند و با  $M$  یا  $U$  نشان می‌دهیم.

**زیرمجموعه:** مجموعه  $B$  زیرمجموعه  $A$  است هرگاه تمام اعضای  $B$  در  $A$  باشند.

$(\forall x \in B \Rightarrow x \in A) \Leftrightarrow B \subseteq A$

$(\exists x \in A \wedge x \notin B) \Leftrightarrow A \not\subseteq B$

**زیرمجموعه سره:** اگر  $B \subseteq A$  ولی  $A \neq B$  آن گاه  $B$  زیرمجموعه سره  $A$  نامیده می‌شود.

**مجموعه توانی:** مجموعه همه زیرمجموعه‌های  $A$ ، مجموعه توانی  $A$  نامیده می‌شود و با  $P(A)$  نمایش داده می‌شود.

**مثال:** اگر  $A = \{1, \emptyset, \{1\}\}$  باشد، مجموعه  $P(A)$  را بنویسید.

**نکته:** تمام زیر مجموعه‌های  $A$  را نوشته و در یک مجموعه قرار می‌دهیم:

$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{\emptyset\}, \{\{1\}\}, \{1, \emptyset\}, \{\emptyset, \{1\}\}, \{1, \emptyset, \{1\}\}$

**مثال:** اگر  $A = \{1, \{1\}, \{1, \{1\}\}\}$ ، کدام عبارت درست و کدام یک نادرست است؟

الف)  $\{1\} \subseteq A$  ب)  $\{\{1\}\} \in A$

**نکته:** برای عضویت ( $\in$ )، عضو داده‌شده باید عیناً در مجموعه دیده شود و برای زیرمجموعه بودن ( $\subseteq$ )، داخل مجموعه داده‌شده باید عیناً در مجموعه دوم دیده شود. الف) درست، زیرا  $1 \in A$  است.

ب) نادرست، زیرا  $A$  چنین عضوی ندارد.

**نکته:** اگر  $A$  یک مجموعه  $n$  عضوی باشد، آن گاه:

۱) تعداد کل زیرمجموعه‌های  $A: 2^n$

۲) تعداد زیرمجموعه‌های سره  $A: 2^n - 1$

۳) تعداد زیرمجموعه‌های سره و ناتهی  $A: 2^n - 2$

۴) تعداد زیرمجموعه‌های  $k$  عضوی  $A: \binom{n}{k}$