مقدمهٔ ناشر

قطعاً بیشترین علامت‌هایی که در درس‌های ریاضی (به خصوص حسابان) دیده می‌شد ایناست؛=، ≠، > و <. یه جورایی می‌شه گفت ریاضی بیشتر دنبال اینه که بگه چی با چی مساویه، چی با چی مساوی نیست. تساوی‌های مطلقِ ریاضی، دقیق و براساس منطق جبریه و مو لای درزش نمی‌ره. به نظرم یکی از چیزایی که ریاضی رو جذاب کرده، همینه که برابریش واقعاً برابریه! اما تساوی بازی‌ها، تساوی حقوق آدما، تساوی همگان در برابر قانون و ...!

برابری‌هایی که خیلی وقتا برابر نیستند! مثلاً می‌بینید که دو تیم با هم مساوی می‌کنن ولی یکیشون حذف می‌شه. اون یکی می‌ره مرحلهٔ بعد. می‌گن بازی با تساوی به پایان رسید ولی به دلیل گل زدهٔ بیشتر در خانهٔ حریف، فلان تیم می‌ره مرحلهٔ بعد! خب پس در واقع منظورشون اینه که این بازیِ مساوی، مساوی نشده! داوری و ناداوری و سلیقهٔ شخصی و ... رو هم اضافه کنید به این داستان. از این مثال تو بازی‌ها و مسابقات فراوونه. اوضاع توی تساوی آدم‌ها و حق و حقوقشون خیلی پیچیده‌تر و عجیب‌تره؛ به قول جورج اورول در کتاب قلعهٔ حیوانات (که کتابی بس جذاب است):

all animals are equal but some animals are more equal than others!

بی‌خیال تا گیج‌تر نشدم بریم سر همون ریاضی خودمون که لااقل راست و حسینی مساویش مساویه، نامساویش هم نامساوی!

ممنونم از مؤلفای بی‌نظیرمون که با نوشتن این کتاب فرصتی برای موفقیت بیشتر علاقمندان به ریاضی فراهم کردند.

ممنونم از آقای محسن فراهانی عزیز که برای آماده‌شدن این کتاب واقعاً جنگید.

ممنونم از خانم زهرا خردمند به خاطر زحماتی که برای این کتاب کشیدند.

ممنونم از ویراستاران خوبمون که می‌دونم تمام تلاششون رو کردن تا کتاب بی‌غلط بشه.

ممنونم از تیم منسجم و منظم تولیدمون که در خاورمیانه همتا ندارن!

ما دوستتون داریم > آن‌چه شما فکر می‌کنید

تقدیم به همه دانش‌آموزان و معلم‌های خوب ایران

مقدمهٔ مولفان

به کتاب حسابان ۲ خیلی‌سبز خوش آمدید.

نحوهٔ استفاده از کتاب:

الف اگر به مدرسه یا کلاس می‌روید در مورد استفاده از کتاب حتماً از معلمتان بپرسید. ما به شدت اعتقاد داریم که «**درس معلم زمزمهٔ محبت و موفقیت است**»، پس از معلمتان در مورد ترتیب خواندن درس‌نامه‌ها و حل‌کردن تست‌ها و بررسی پاسخ‌ها، کمک بگیرید.

ب اگر به شکل خودآموز از کتاب استفاده می‌کنید توصیهٔ ما این است که: ۱ اول درس‌نامه را خوب و کامل بخوانید. ۲ چیزهایی که از درس‌نامه مهم است مشخص کنید یا برای خودتان یادداشت بردارید و خلاصه کنید. ۳ یک بار دیگر فقط تست‌های درس‌نامه را حل کنید. ۴ بروید سراغ تست‌ها، پاسخ تست‌ها را اول از پاسخنامهٔ کلیدی چک کنید و بعد بروید پاسخ‌ها را بخوانید. خیلی از وقت‌ها خواندن پاسخ تست‌هایی که درست حل کرده‌اید هم بسیار کمکتان می‌کند.

ساختار کتاب:

۱ فصل‌های کتاب، به ترتیب فصل‌های حسابان ۲ (دوازدهم) آمده‌اند. در اول هر فصل مباحث مهم و پرسؤال و مباحث پیش‌نیاز را آورده‌ایم. حواستان باشد که وقتی می‌گوییم پیش‌نیاز منظورمان این است که بهتر است روش‌های اصلی و مطالب بنیادی مباحث پیش‌نیاز را قبل از خواندن فصل مورد نظر بلد باشید. ممکن است لازم باشد مباحث پیش‌نیاز را از مطالب کتاب‌های سال‌های پیش یاد بگیرید.

۲ در تست‌های هر درس، کنار تست‌های عادی یک آیکن گذاشته‌ایم. قرار است شما بعد از حل تست‌ها و بررسی پاسخ‌نامه این آیکن‌ها را به یا یا تبدیل کنید:

یعنی تست آسان　　یعنی تست متوسط　　یعنی تست دشوار

این نمادگذاری باعث می‌شود تا بعداً که خواستید فصل را دوره کنید بتوانید تصمیم بگیرید که از کدام تست‌ها برای دوره استفاده کنید و روی سؤال‌ها با نماد مورد نظر تمرکز کنید تا خوب یادشان بگیرید. (البته برای این‌ها از هر نماد دیگری هم که خودتان می‌خواهید می‌توانید استفاده کنید چون هدف اصلی این است که بتوانید بعداً به این سؤال‌ها برگردید)

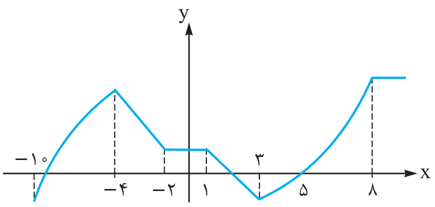
برای بعضی از تست‌ها هم نماد داریم که نشان‌دهندهٔ تست‌های دشوار است. این تست‌ها مختص دانش‌آموزان علاقه‌مند است و قرار نیست همهٔ دانش‌آموزان به این تست‌ها پاسخ دهند.

۳ نماد کنار بعضی از تست‌ها به رنگ آبی () آمده است. این‌ها تست‌های نشان‌دار هستند برای دورهٔ سریع فصل و دوتا کاربرد دارند: الف دوره و جمع‌بندی فصل ب اگر قبل از یک آزمون وقت خیلی کمی دارید می‌توانید فقط این تست‌ها را حل کنید. ما معتقدیم که جمع‌بندی واقعی با این روش انجام می‌شود نه با جدول، نمودار و ... .

۴ در تست‌ها کامنت‌هایی به رنگ آبی می‌بینید. این‌ها صرفاً برای یک یادآوری سادهٔ مطالب درس‌نامه یا یک اشارهٔ کوچک به استراتژی حل تست است. کامنت‌ها را با فونت ریز و کم‌رنگ آورده‌ایم که اگر نخواستید برای بار اول حل تست‌ها از رویشان رد شوید.

فهرست

درس سوم توابع یکنوا



نمودار روبه‌رو را ببینید:

۱) هر وقت با حرکت روی نمودار در یک بازه، **مقدار y افزایش** پیدا کند (یا نمودار رو به **بالا** برود)، می‌گوییم تابع در آن بازه **صعودی اکید** است.

مثلاً بازه‌های $[-۱۰,-۴]$ و $[۳,۸]$ در نمودار روبه‌رو.

۲) هر وقت با حرکت روی نمودار در یک بازه، **مقدار y کاهش** پیدا کند (یا نمودار رو به **پایین** برود)، می‌گوییم تابع در آن بازه **نزولی اکید** است.

مثلاً بازه‌های $[-۴,-۲]$ و $[۱,۳]$ در نمودار بالا.

نکته اگر تابعی در بازه‌ای صعودی اکید یا نزولی اکید باشد، می‌گوییم تابع در آن بازه یکنوا اکید است.

مثلاً نمودار رسم‌شده در بازه‌های $\underbrace{[-۱۰,-۴]}_{\text{صعودی اکید}}$، $\underbrace{[-۴,-۲]}_{\text{نزولی اکید}}$، $\underbrace{[۱,۳]}_{\text{نزولی اکید}}$ و $\underbrace{[۳,۸]}_{\text{صعودی اکید}}$ ، یکنوا اکید است.

۳) هر وقت با حرکت روی نمودار در یک بازه، **مقدار y افزایش پیدا کند یا ثابت بماند** (نمودار رو به **بالا یا ثابت** باشد)، می‌گوییم تابع در آن بازه **صعودی** است. مثلاً بازه‌های $[-۱۰,-۴]$ و $[۳,+\infty)$ در نمودار بالا.

۴) هر وقت با حرکت روی نمودار در یک بازه، **مقدار y کاهش پیدا کند یا ثابت بماند** (نمودار رو به **پایین یا ثابت** باشد)، می‌گوییم تابع در آن بازه **نزولی** است. مثلاً بازه‌های $[-۴,۳]$ و $[۸,+\infty)$ در نمودار بالا.

نکته اگر تابعی در بازه‌ای صعودی یا نزولی باشد، می‌گوییم تابع در آن بازه یکنوا است.

مثلاً نمودار رسم‌شده در بازه‌های $\underbrace{[-۱۰,-۴]}_{\text{صعودی}}$، $\underbrace{[-۴,۳]}_{\text{نزولی}}$ و $\underbrace{[۳,+\infty)}_{\text{صعودی}}$ یکنوا است.

اشاره *در تعریف تابع صعودی، در جملهٔ «مقدار y افزایش پیدا کند یا ثابت بماند» به کلمهٔ «یا» دقت کنید؛ یعنی هر کدامش اتفاق بیفتد، صعودی است، حتی اگر فقط یک خط افقی باشد. (برای تابع نزولی، عکس همین جمله)*

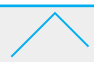
۵) اگر در بازه‌ای، نمودارمان یک خط افقی باشد، تابع در آن بازه ثابت است. مثلاً بازه‌های $[-۲,۱]$ و $[۸,+\infty)$ در نمودار بالا.

نکته تابع ثابت تنها تابعی است که هم صعودی محسوب می‌شود و هم نزولی. پس اگر گفتند «تابع $f(x)=\sqrt{۲}$، تابعی صعودی و نزولی است»، جملهٔ درستی است.

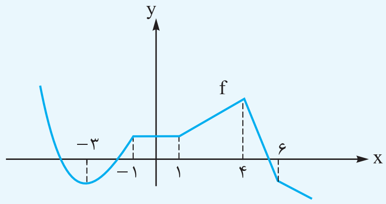
اشاره *فرق بین «صعودی» و «صعودی اکید» در آن است که صعودی اکید فقط نمودار رو به بالا حرکت می‌کند ولی در صعودی، تابع می‌تواند هم رو به بالا برود و هم ثابت بماند (فقط حق ندارد رو به پایین برود). پس می‌توانیم نتیجه بگیریم «هر صعودی اکیدی، حتماً صعودی هم است» ولی عکسش درست نیست.*

۶) اگر در بازه‌ای، قسمتی از نمودار صعودی اکید و قسمتی از آن نزولی اکید باشد، تابع در آن بازه **غیریکنوا** است. مثلاً تابع رسم‌شده در بازهٔ $[-۶,-۳]$ غیریکنواست، چون در بازهٔ $[-۶,-۴]$ صعودی اکید و در بازهٔ $[-۴,-۳]$ نزولی اکید است.

جمع‌بندی در جدول زیر خلاصهٔ مطالب صفحهٔ قبل را ببینید:

	نوع یکنوایی	وضعیت نمودار	مثال نموداری	تعریف ریاضی
یکنوا اکید	صعودی اکید	فقط رو به بالا می‌رود.		$a > b \Leftrightarrow f(a) > f(b)$
	نزولی اکید	فقط رو به پایین می‌رود.		$a > b \Leftrightarrow f(a) < f(b)$
یکنوا	صعودی	یا رو به بالا می‌رود یا ثابت است.		$a > b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$
	نزولی	یا رو به پایین می‌رود یا ثابت است.		$a > b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$
	ثابت	روی یک خط افقی است.		$a, b \in D_f \Rightarrow f(a) = f(b)$
غیریکنوا	غیریکنوا	قسمتی رو به بالا و قسمتی رو به پایین		

تست | با توجه به نمودار رسم‌شده، چه تعداد از جملات زیر درست است؟



الف) f در بازهٔ [−۳,۴] صعودی است.

ب) f در بازهٔ [۵,۹] یکنوا اکید است.

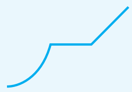
پ) f در بازهٔ [−۱,۱] هم صعودی است و هم نزولی.

ت) f در بازهٔ [۲,۵] غیریکنوا است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

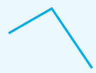
پاسخ ۴ | همهٔ جملات را بررسی می‌کنیم.

الف) چون نمودار در این بازه یا رو به بالا رفته یا ثابت بوده، پس صعودی است.



ب) در بازهٔ [۵,۹] نمودار فقط رو به پایین رفته، پس نزولی اکید است. تابعی که نزولی اکید است، یکنوا اکید هم می‌باشد.

پ) در بازهٔ [−۱,۱] تابع ثابت می‌باشد پس هم صعودی هم نزولی است.



ت) در بازهٔ [۲,۵]، قسمتی از نمودار صعودی اکید و قسمتی نزولی اکید است، پس غیریکنواست:

پس هر ۴ جمله درست بودند.

بررسی یکنوایی توابع (به کمک ضابطه)

در جدول زیر معروف‌ترین توابع یکنوا آورده شده‌اند.

اسم تابع	ضابطه	شرط اکیداً صعودی بودن	شرط اکیداً نزولی بودن
خطی	$y = mx + h$	$m > 0$	$m < 0$
درجه۳	$y = a(x+\alpha)^3 + \beta$	$a > 0$	$a < 0$
رادیکالی	$y = \sqrt{ax+b} + c$	$a > 0$	$a < 0$
نمایی	$y = a^x$	$a > 1$	$0 < a < 1$
لگاریتمی	$y = \log_a x$	$a > 1$	$0 < a < 1$
آبشاری	$y = \|x-a\| - \|x-b\|$	$b \geq a$ (صعودی)	$a \geq b$ (نزولی)

اشاره | *تابع آبشاری، اکیداً یکنوا نیست، بلکه فقط یکنوا است.*

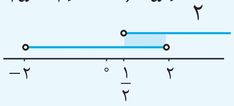
تست | اگر تابع $f(x) = (4-a^2)x + a - 1$ و $g(x) = \sqrt{(2a-1)x+3} - a$ توابعی اکیداً صعودی باشند، محدودهٔ کامل a کدام است؟

۱) $\frac{1}{2} < a < 2$ ۲) $\frac{1}{2} \leq a < 1$ ۳) $0 < a < \frac{1}{2}$ ۴) $-2 < a < \frac{1}{2}$

پاسخ ۱ | ۱) f تابعی خطی است، برای اکیداً صعودی بودن باید شیب مثبت باشد: $4 - a^2 > 0 \Rightarrow a^2 < 4 \Rightarrow |a| < 2 \Rightarrow -2 < a < 2$

۲) g تابعی رادیکالی به فرم $y = \sqrt{Ax+B} + C$ است. برای اکیداً صعودی بودن باید ضریب x مثبت باشد: $2a - 1 > 0 \Rightarrow a > \frac{1}{2}$

بین شرط (۱) و (۲) اشتراک می‌گیریم: $\Rightarrow (1) \cap (2) = (\frac{1}{2}, 2)$



تست تابع $f(x)=(\frac{a}{3}-2)^{-x}$ یک تابع صعودی است. a چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ ۳ ابتدا ضابطه را به شکل $y=A^x$ درمی‌آوریم:

$$f(x)=(\frac{a}{3}-2)^{-x}=(\frac{a-6}{3})^{-x}=(\frac{3}{a-6})^{x}$$

برای آن‌که f صعودی باشد (دقت کنید نگفته f نماییه و کلمهٔ اکیداً هم نیامده)، پس $\frac{3}{a-6}$ باید بزرگ‌تر یا مساوی ۱ باشد. (اگر بزرگ‌تر از ۱ باشد، تابع نمایی اکیداً صعودی و اگر ۱ باشد، تابع ثابت $y=1$ می‌شود.)

$$\frac{3}{a-6}\geq 1 \Rightarrow \frac{3}{a-6}-1\geq 0 \Rightarrow \frac{3-a+6}{a-6}\geq 0 \Rightarrow \frac{-a+9}{a-6}\geq 0 \xrightarrow{\times(-1)} \frac{a-9}{a-6}\leq 0$$

$\Rightarrow$

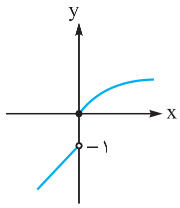
	۶		۹	
+	ت‌ن	−	۰	+

$\xrightarrow{\leq 0} 6<a\leq 9$

پس مقادیر صحیح a، سه عدد ۷، ۸ و ۹ هستند.

بررسی یکنوایی توابع (به کمک رسم نمودار)

خیلی وقت‌ها تشخیص یکنوایی از روی ضابطه کار سختی است. در این صورت باید سراغ رسم نمودار برویم.



مثلاً تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geq 0\\ x-1 & x<0\end{cases}$ را در نظر بگیرید. نمودارش را رسم می‌کنیم:

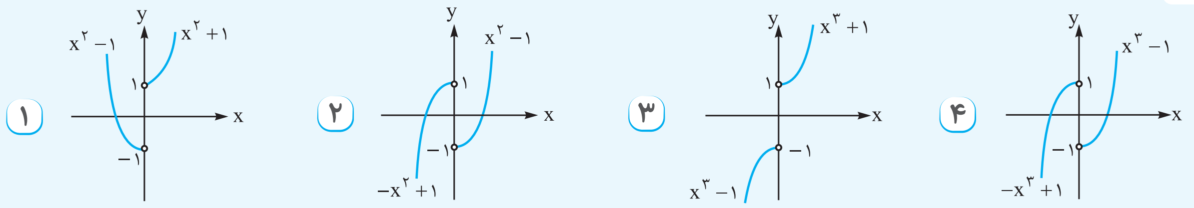
همان‌طور که معلوم است وقتی روی نمودار از چپ به راست حرکت می‌کنیم، نمودار فقط رو به بالا می‌رود، پس تابع ما یک تابع اکیداً صعودی است.

اشاره *برای جواب‌دادن به سؤالات این قسمت باید نمودار توابع معروف را بلد باشید.*

تست کدام گزینه یک تابع اکیداً یکنوا است؟

۱) $y=x^2+\frac{x}{|x|}$ ۲) $y=x|x|-\frac{|x|}{x}$ ۳) $y=x^3+\frac{x}{|x|}$ ۴) $y=x^3-\frac{x}{|x|}$

پاسخ ۳ اول هر تابع را دوضابطه‌ای می‌نویسیم، بعد نمودار هر ۴ گزینه را رسم می‌کنیم.



با توجه به نمودارها، گزینه‌های ۱، ۲ و ۴ غیریکنوا هستند ولی ۳، چون نمودار فقط رو به بالا حرکت کرده، تابعی اکیداً صعودی است.

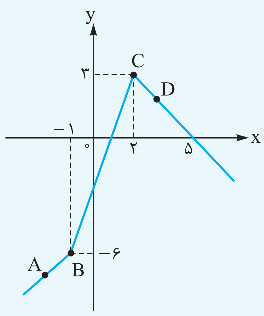
بعضی وقت‌ها بازه‌های یکنوایی را می‌خواهند. مثلاً می‌پرسند تابع در کدام بازه، اکیداً نزولی است؟ نمودار را می‌کشیم و بازه را پیدا می‌کنیم.

تست بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $f(x)=|x+1|-|2x-4|$ در آن اکیداً نزولی است، کدام بازه می باشد؟

۱) $(-\infty,-1]$ ۲) $(-\infty,2]$ ۳) $[-1,+\infty)$ ۴) $[2,+\infty)$

پاسخ ۴ ریشهٔ قدرمطلق‌ها را پیدا می‌کنیم و با نقطه‌یابی، نمودار f را رسم می‌کنیم:

	A قبلی	B ریشه	C ریشه	D بعدی
x	−۲	−۱	۲	۳
y	−۷	−۶	۳	۲



۴ نقطهٔ بالا را به ترتیب به هم وصل می‌کنیم تا نمودار f به دست آید.

بزرگ‌ترین بازه‌ای که نمودار رو به پایین می‌رود (اکیداً نزولی می باشد)، بازهٔ $[2,+\infty)$ است.

یکی از توابع مورد علاقهٔ طراحان سؤال در این قسمت، توابع به فرم $y=$ خط $\pm$ |خط| هستند. برای بررسی یکنوایی آن‌ها، می‌توانیم آن‌ها را دوضابطه‌ای بنویسیم و بعد از نکتهٔ زیر استفاده کنیم.

تابع به فرم $y=$ خط $\pm$ |خط| را اگر دوضابطه‌ای بنویسیم، به دو معادلهٔ خط می‌رسیم. حالا با توجه به علامت شیب‌ها:

۱) اگر هر دو مثبت باشند، تابع اکیداً صعودی است.
۲) اگر هر دو منفی باشند، تابع اکیداً نزولی است.
۳) اگر یکی مثبت و یکی صفر باشد، تابع صعودی است.
۴) اگر یکی منفی و یکی صفر باشد، تابع نزولی است.
۵) اگر یکی مثبت و یکی منفی باشد، تابع غیریکنواست.

مثلاً تابع $y=|۲x-۴|+۳x$ را در نظر بگیرید. با توجه به ریشهٔ قدرمطلق $(x=۲)$، آن را دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$y=|۲x-۴|+۳x=\begin{cases}(۲x-۴)+۳x & x\geq ۲\\(-۲x+۴)+۳x & x<۲\end{cases}=\begin{cases}۵x-۴ & x\geq ۲\\x+۴ & x<۲\end{cases}$$

چون شیب هر دو ضابطه مثبت شد پس تابع اکیداً صعودی است.

تست | اگر تابع $f(x)=|۲x+۱|+ax$ تابعی اکیداً نزولی باشد، محدودهٔ a کدام است؟

۱) $a<-۲$ ۲) $a>-۲$ ۳) $-۲<a<۲$ ۴) $a<۲$

پاسخ | ۱ شیب ضابطه‌ها مهم است. شیب یکی $a+۲$ و شیب دیگری $a-۲$ می‌شود.

باید هر دو منفی باشند:

$$\left.\begin{array}{l}a+۲<۰\Rightarrow a<-۲\\a-۲<۰\Rightarrow a<۲\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{اشتراک}} a<-۲$$

بررسی یکنوایی در نمایش زوج مرتبی

برای بررسی یکنوایی تابعی با نمایش زوج مرتبی، ابتدا زوج مرتب‌ها را از x کوچک به بزرگ مرتب می‌نویسیم.

الان ۵ حالت ممکن است رخ دهد:

۱) با افزایش xها، yها هم زیاد شوند. ← اکیداً صعودی

۲) با افزایش xها، yها یا زیاد شوند یا ثابت بمانند. ← صعودی

۳) با افزایش xها، yها هم کم شوند. ← اکیداً نزولی

۴) با افزایش xها، yها یا کم شوند یا ثابت بمانند. ← نزولی

۵) با افزایش xها، yها هم کم شوند، هم زیاد. ← غیریکنوا

تست | تابع $f=\{(۲,۵-m),(-۱,m+۱۱),(۶,۲m-۱)\}$ تابعی اکیداً نزولی است. محدودهٔ m کدام است؟

۱) $m>۲$ ۲) $m<-۳$ ۳) $-۳<m<۲$ ۴) $-۳\leq m\leq ۲$

پاسخ | ۳ زوج مرتب‌ها را از x کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

$$f=\{(-۱,m+۱۱),(۲,۵-m),(۶,۲m-۱)\}$$

در تابع اکیداً نزولی با افزایش xها، yها کم می‌شوند، پس:

$$m+۱۱>۵-m>۲m-۱$$

نامعادلهٔ بالا تبدیل به دو نامعادله می‌شود:

$$m+۱۱>۵-m\Rightarrow ۲m>-۶\Rightarrow m>-۳\quad(۱)$$

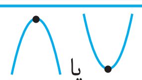
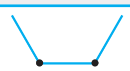
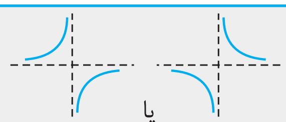
$$۵-m>۲m-۱\Rightarrow -۳m>-۶\Rightarrow m<۲\quad(۲)$$

بین دو شرط بالا، اشتراک می‌گیریم:

$$-۳<m<۲$$

معروف‌ترین توابع غیریکنوا

قبل از این در یک جدول توابع یکنوای معروف را دیدیم. الان می‌خواهیم معروف‌ترین توابع غیریکنوا را بررسی کنیم. در این توابع، بازه‌های یکنوایی مهم هستند؛ یعنی بدانیم کجا صعودی و کجا نزولی هستند. در جدول زیر این توابع را می‌بینیم:

تابع	ضابطه	نمودار	نقطهٔ مرزی بازه‌های یکنوایی
سهمی	$y=ax^۲+bx+c$		رأس
قدرمطلقی خطی	$y=\pm\|ax+b\|$		ریشهٔ داخل قدرمطلق
گلدانی	$y=\|x-a\|+\|x-b\|$		ریشه‌های داخل قدرمطلق
هموگرافیک	$y=\frac{ax+b}{cx+d}$		ریشهٔ مخرج

مثلاً در سهمی $y=x^۲-۶x+۱$ که دهانه‌اش رو به بالاست، طول رأس برابر است با:

$$x_S=\frac{-b}{۲a}=\frac{۶}{۲}=۳$$

$x=۳$

با توجه به نمودار، در بازهٔ $(-\infty,۳]$ تابع نزولی و در بازهٔ $[۳,+\infty)$ صعودی است.

تست | سهمی $y=-x^۲+(m-۳)x+۱$ در بازهٔ $[-۳,۲]$، صعودی است. محدودهٔ m کدام است؟

۱) $m\geq ۷$ ۲) $m\geq -۱$ ۳) $m<۷$ ۴) $m>۱$

پاسخ | ۱ طول رأس، نقطهٔ مهم داستان است:

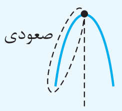
$$x_S=\frac{-b}{۲a}=\frac{-m+۳}{-۲}=\frac{m-۳}{۲}$$

چون $a < ۰$ است، پس سهمی این‌شکلی می‌شود:

پس بازهٔ $[-۳,۲]$ باید در شاخهٔ صعودی باشد، یعنی باید $x = ۲$ (انتهای بازه)، قبل یا روی x_S باشد:

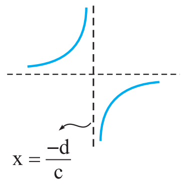
$$x_S = \frac{m-۳}{۲}$$

$$۲ \le \frac{m-۳}{۲} \Rightarrow m-۳ \ge ۴ \Rightarrow m \ge ۷$$

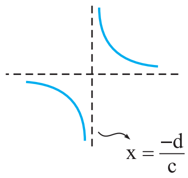


نکته نمودار هر تابع هموگرافیک با ضابطهٔ $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ از دو شاخه تشکیل شده است. در مورد یکنوایی آن بدانید:

(۱) اگر $ad - bc > ۰$ باشد، تابع در هر شاخه‌اش صعودی اکید است و در کل غیریکنواست.



(۲) اگر $ad - bc < ۰$ باشد، تابع در هر شاخه‌اش نزولی اکید است و در کل غیریکنواست.



(۳) تابع در بازه‌هایی که قبل و بعد از ریشهٔ مخرج هستند، یکنوای اکید است: $(\frac{-d}{c}, +\infty), (-\infty, \frac{-d}{c})$

مثلاً در تابع $y = \frac{۲x-۱}{x+۳}$، اول $ad - bc$ را تشکیل می‌دهیم: $۲(۳) - (-۱)(۱) = ۷$

چون مثبت شد، پس در هر شاخه‌اش صعودی است و در کل غیریکنواست. ریشهٔ مخرج $x = -۳$ است، یعنی در بازه‌های $(-\infty, -۳)$ و $(-۳, +\infty)$ به طور جداگانه، صعودی اکید است.

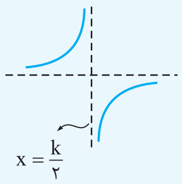
تست | تابع $f(x) = \frac{-۴x+۸}{۲x-k}$ در بازهٔ $(۳, +\infty)$ اکیداً صعودی است. محدودهٔ k کدام است؟

۱) $(۴,۶]$ ۲) $[۵,۷)$ ۳) $[۶,۸)$ ۴) $[۲,۴)$

پاسخ ۱ | ریشهٔ مخرج را حساب می‌کنیم:

$$۲x - k = ۰ \Rightarrow x = \frac{k}{۲}$$

قرار است تابع هموگرافیکمان، در هر شاخه اکیداً صعودی باشد، این‌شکلی:



پس الان دوتا شرط لازم است:

۱) $ad - bc$ مثبت باشد: $(-۴)(-k) - ۸(۲) > ۰ \Rightarrow ۴k - ۱۶ > ۰ \Rightarrow k > ۴$

۲) بازهٔ $(۳, +\infty)$ بعد از $x = \frac{k}{۲}$ باشد، یعنی ۳ باید بزرگ‌تر یا مساوی $\frac{k}{۲}$ باشد: $۳ \ge \frac{k}{۲} \Rightarrow k \le ۶$

اشتراک شرط (۱) و (۲) را می‌گیریم: $(k > ۴) \cap (k \le ۶) = ۴ < k \le ۶$

کاربرد یکنوایی در حل نامعادلات

یک بار دیگر تعریف ریاضی توابع اکیداً یکنوا را ببینید:

تابع اکیداً صعودی	$a > b \Leftrightarrow f(a) > f(b)$
تابع اکیداً نزولی	$a > b \Leftrightarrow f(a) < f(b)$

نکته دو جملهٔ بالا را به زبان دیگری می‌گوییم. از این دو جمله در حل نامعادلات و برخی سؤال‌های دامنه استفاده می‌کنیم.

(۱) اگر f اکیداً صعودی و $f(a) > f(b)$، با حذف fها، جهت عوض نمی‌شود: $a > b$

(۲) ولی اگر f اکیداً نزولی و $f(a) > f(b)$، با حذف fها، جهت عوض می‌شود: $a < b$

مثلاً اگر f اکیداً صعودی و $f(۳x) > f(x+۲)$، آن‌گاه $۳x > x+۲$ و در نتیجه $x > ۱$ است.

تست | اگر f تابعی اکیداً نزولی با دامنهٔ $\mathbb{R}$ باشد، در چه بازه‌ای نمودار تابع $f(x^۲+۱)$ بالای نمودار تابع $f(۲x+۹)$ قرار دارد؟

۱) $\mathbb{R} - [-۲,۴]$ ۲) $\mathbb{R} - [-۴,۲]$ ۳) $(-۲,۴)$ ۴) $(-۴,۲)$

پاسخ ۳ | قرار است تابع $f(x^۲+۱)$ بالای تابع $f(۲x+۹)$ باشد:

$$f(x^۲+۱) > f(۲x+۹)$$

چون f اکیداً نزولی است، پس با حذف fها، جهت تغییر می‌کند:

$$x^۲+۱ < ۲x+۹$$

نامعادله را حل می‌کنیم:

$$x^۲ - ۲x - ۸ < ۰ \Rightarrow (x-۴)(x+۲) < ۰ \xrightarrow{\text{بین ریشه‌ها}} -۲ < x < ۴$$

ممکن است این موضوع را با دامنهٔ یک تابع رادیکالی ادغام کنند. یک تست ببینید.

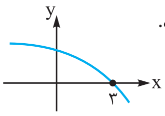
تست توابع $f(x)=-(x-۱)^۳+۱۲$ و $g(x)=\sqrt{f(|x|)-f(|۲x-۱|)}$ مفروض‌اند. اگر دامنهٔ تابع g به صورت $\mathbb{R}-(a,b)$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) $\frac{-۲}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

پاسخ ۳ برای دامنهٔ تابع رادیکالی g، باید زیرش را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار دهیم:
$$f(|x|)-f(|۲x-۱|)\ge ۰ \Rightarrow f(|x|)\ge f(|۲x-۱|)$$
حالا باید بگوییم چون f نزولی است (چون ضریب $x^۳$ منفی می‌شود)، پس با حذف fها، جهت عوض می‌شود:
$$f(|x|)\ge f(|۲x-۱|) \xrightarrow{\text{f نزولی}} |x|\le|۲x-۱|$$
برای حل نامعادله‌های به فرم $|A|\ge|B|$، بهترین راه توان ۲ رساندن است (هیچ محدودیتی ایجاد نمی‌کند):
$$|x|\le|۲x-۱| \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^۲\le ۴x^۲-۴x+۱ \Rightarrow ۳x^۲-۴x+۱\ge ۰ \xrightarrow[\text{نابین ریشه‌ها}]{a+b+c=۰} x\ge ۱ \text{ یا } x\le\frac{۱}{۳}$$
پس:
$$D_g=\mathbb{R}-(\underset{a}{\frac{۱}{۳}},\underset{b}{۱})$$
در نتیجه:
$$a+b=\frac{۱}{۳}+۱=\frac{۴}{۳}$$

اگر هم لازم شد یک نمودار فرضی برای تابع اکیداً صعودی (یا اکیداً نزولی) f بکشید و بعد حل نامعادله یا محاسبهٔ دامنه را انجام دهید.

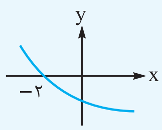
مثلاً اگر گفته شده بود، f اکیداً نزولی و $f(۳)=۰$، شکل روبه‌رو را می‌کشیم:



تست اگر f تابعی اکیداً نزولی با دامنهٔ $\mathbb{R}$ و $f(-۲)=۰$ باشد، جواب نامعادلهٔ $\frac{x^۳-۹x}{f(x)}\ge ۰$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۳   ۲) ۴   ۳) ۵   ۴) ۶

پاسخ ۳ برای f یک شکل فرضی که نزولی باشد و محور xها را در ۲− قطع کند، می‌کشیم و نامعادله را ساده‌تر می‌نویسیم:



$$\frac{x^۳-۹x}{f(x)}\ge ۰ \Rightarrow \frac{x(x^۲-۹)}{f(x)}\ge ۰ \Rightarrow \frac{\overset{۰}{x}(\overset{۳}{x-۳})(\overset{-۳}{x+۳})}{\underset{-۲}{f(x)}}\ge ۰$$

با توجه به ریشه‌ها و نمودار f، کل کسر را تعیین علامت می‌کنیم:

اشاره برای تعیین علامت $f(x)$، قسمت‌هایی که نمودار بالای محور xهاست، مثبت و قسمت‌هایی که زیر محور xهاست، منفی شده است.

		-۳		-۲		۰		۳	
$x^۳-۹x$	$-$	۰	$+$		$+$	۰	$-$	۰	$+$
$f(x)$	$+$		$+$	۰	$-$		$-$		$-$
کل	$-$	۰	$+$	ت	$-$	۰	$+$	۰	$-$
			جواب				جواب		

قسمت‌های مثبت و صفر جدول، جواب است: $[-۳,-۲)\cup[۰,۳]$

بازهٔ بالا شامل ۵ عدد صحیح است: $\{-۳,۰,۱,۲,۳\}$

یکنوایی و اعمال جبری

فرض کنید وضعیت یکنوایی توابع f و g را می‌دانیم و دنبال وضعیت یکنوایی توابع $-f$ یا $f+g$ یا $f-g$ یا $f\times g$ یا ... هستیم. تعداد حالت‌های بررسی زیاد می‌شود. مهم‌ترین حالت‌ها را در جدول روبه‌رو می‌بینید:

f	g	f+g	f−g	fg
ص	ص	ص		
ص	ن		ص	
ن	ص		ن	
ن	ن	ن		

اشاره خانه‌های خالی جدول مقابل، یعنی وضعیت تابع نامشخص است (و هر چیزی می‌تونه بشه! صعودی، نزولی، غیریکنوا)

حالا نکات زیر را بخوانید:

۱) f و $-f$ در یکنوایی کاملاً برعکس هم هستند. یعنی اگر f اکیداً صعودی باشد، $-f$ اکیداً نزولی است.

۲) f و $\frac{۱}{f}$ **به شرطی که f تغییر علامت ندهد**، در یکنوایی برعکس هم هستند ولی اگر f تغییر علامت بدهد، $\frac{۱}{f}$ غیریکنوا می‌شود.

۳) اگر دو تابع f و g هر دو اکیداً صعودی (یا نزولی) باشند، جمعشان یعنی $f+g$ هم اکیداً صعودی (یا نزولی) می‌ماند ولی تفریقشان نامعلوم است.

۴) برای تفریق دو تابع، می‌توانیم از نکتهٔ (۳) استفاده کنیم، مثلاً اگر f صعودی و g نزولی باشد، آن‌گاه چون $-g$ صعودی است، می‌توانیم $f-g$ را به شکل $f+(-g)$ ببینیم که مجموع دو تابع صعودی است و در نتیجه صعودی می‌شود.

۵) یکی از خطرناک‌ترین اشتباهات در قسمت ضرب دو تابع صعودی رخ می‌دهد که بچه‌ها فکر می‌کنند ضرب دو تابع صعودی، تابعی صعودی است ولی این‌طور نیست! مثلاً x و ۲x هر دو صعودی‌اند ولی ضربشان $۲x^۲$ یک سهمی است که غیریکنواست.

جملهٔ درست این قسمت این است: «ضرب دو تابع صعودی با مقادیر مثبت، تابعی صعودی است.»

مثلاً $y=2^x$ و $y=\sqrt{x}$ هر دو توابعی صعودی و مقادیرشان مثبت است، پس تابع $y=2^x\sqrt{x}$ تابعی صعودی است.

تست؟ | تابع $y=x^3+2x-6$ از نظر یکنوایی چگونه است؟

۱) اکیداً صعودی ۲) اکیداً نزولی ۳) ابتدا صعودی، سپس نزولی ۴) ابتدا نزولی، سپس صعودی

پاسخ ۱ | تابع داده‌شده را به صورت جمع دو تابع x^3 و $2x-6$ ببینیم:

$$y=(x^3)+(2x-6)$$

x^3 که اکیداً صعودی است. $2x-6$ هم خطی با شیب مثبت است، پس اکیداً صعودی می‌باشد.

جمع دو تابع اکیداً صعودی، تابعی اکیداً صعودی است:

$$y=\underbrace{x^3}_{\text{صعودی اکید}}+\underbrace{2x-6}_{\text{صعودی اکید}}$$

پس $y=x^3+2x-6$ اکیداً صعودی است.

دامنهٔ توابع $f\pm g$ (و $f\times g$) از اشتراک دامنهٔ f و g به دست می‌آید. ممکن است از توابع f و g، یکی غیریکنوا باشد ولی محدودشدن دامنه باعث یکنواشدنش شود و بعد بتوانیم از نکات گفته‌شده استفاده کنیم. یک تست ببینید:

تست؟ | تابع $y=\log(2-x)+x^2-4x$ از نظر یکنوایی چگونه است؟

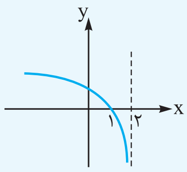
۱) اکیداً صعودی ۲) اکیداً نزولی

۳) ابتدا صعودی، سپس نزولی ۴) ابتدا نزولی، سپس صعودی

پاسخ ۲ | تابع داده‌شده را به صورت جمع دو تابع می‌نویسیم:

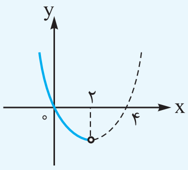
$$y=\underbrace{\log(2-x)}_{f(x)}+\underbrace{x^2-4x}_{g(x)}$$

نمودار تابع $f(x)=\log(2-x)$ به صورت زیر است:



پس f نزولی است. از طرفی دامنهٔ f، به صورت $x<2$ می‌باشد. این دامنه روی سهمی $g(x)=x^2-4x$ هم اثر می‌گذارد.

سهمی $g(x)=x(x-4)$ را با دامنهٔ $x<2$ رسم می‌کنیم:



g هم در این بازه، اکیداً نزولی است. مجموع دو تابع اکیداً نزولی، تابعی اکیداً نزولی است:

$$y=\overbrace{\underbrace{\log(2-x)}_{\text{نزولی اکید}}+\underbrace{x^2-4x}_{\text{نزولی اکید}}}^{\text{نزولی اکید}}$$

نکته برای تعیین وضعیت ترکیب دو تابع یکنوا، از قانون «علامت ضرب دو عدد» می‌توانیم استفاده کنیم.

تابع صعودی را با علامت + و تابع نزولی را با علامت − نشان می‌دهیم. **مثلاً** اگر f صعودی و g نزولی باشد، fog هم نزولی است، چون مثبت ضربدر منفی می‌شود منفی.

$$fog \Rightarrow (+)\times(-)=(-)$$

کل حالات هم در جدول می‌بینید:

f	g	fog
ص +	ص +	ص +
ص +	ن −	ن −
ن −	ص +	ن −
ن −	ن −	ص +

تست؟ | اگر f تابعی اکیداً نزولی و gof تابعی اکیداً صعودی باشد، g کدام می‌تواند باشد؟

۱) $g(x)=2^x$ ۲) $g(x)=x^3-1$ ۳) $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ ۴) $g(x)=\sqrt[3]{x}$

پاسخ ۳ | چون منفی در منفی، می‌شود مثبت، پس g باید نزولی باشد. در بین گزینه‌ها فقط $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ اکیداً نزولی است.

دقت کنید $y=\sqrt{x}$ تابعی اکیداً صعودی است که تغییر علامت نمی‌دهد (چون $\sqrt{x}\geq 0$) پس $\frac{1}{\sqrt{x}}$ اکیداً نزولی می‌شود.

تست؟ | اگر f تابعی اکیداً صعودی و g اکیداً نزولی باشد، کدام تابع زیر قطعاً اکیداً نزولی است؟

۱) $(fogog)(x)$ ۲) $(gof)(-x)$ ۳) $(fof)(-x^2)$ ۴) $(gog)(-x^3)$

پاسخ ۴ همهٔ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $\underset{+}{f}\circ\underset{-}{g}\circ\underset{-}{g}(\underset{+}{x}) \Rightarrow (+)\times(-)\times(-)\times(+)=(+) \Rightarrow$ اکیداً صعودی

۲) $(\underset{-}{g}\circ\underset{+}{f})(\underset{-}{-x}) \Rightarrow (-)\times(+)\times(-)=(+) \Rightarrow$ اکیداً صعودی

۳) $(\underset{+}{f}\circ\underset{+}{f})(\underset{\text{غیریکنوا}}{-x^2}) \Rightarrow (+)\times(+)\times ?=? \Rightarrow$ نامشخص

۴) $(\underset{-}{g}\circ\underset{-}{g})(\underset{-}{-x^3}) \Rightarrow (-)\times(-)\times(-)=(-) \Rightarrow$ اکیداً نزولی

بُرد با یکنوایی

اگر f تابعی اکیداً یکنوا و پیوسته با دامنهٔ $[a,b]$ (یا $[a,b)$ یا $(a,b]$ یا (a,b)) باشد، با جای‌گذاری نقاط اول و آخر دامنه در ضابطهٔ تابع، به نقطهٔ اول و آخر برد می‌رسیم:

۱) f اکیداً صعودی و پیوسته $\xrightarrow{D_f=[a,b]} R_f=[f(a),f(b)]$

۲) f اکیداً نزولی و پیوسته $\xrightarrow{D_f=[a,b]} R_f=[f(b),f(a)]$

تست اگر $f(x)=2^{(\sqrt{x-4}-\sqrt{20-4x})}$ و برد f بازهٔ $[a,b]$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) $\frac{7}{4}$ ۲) 2 ۳) $\frac{9}{4}$ ۴) $\frac{5}{2}$

پاسخ ۳ عبارتی که در توان آمده است را بررسی می‌کنیم:

$$\underbrace{\underbrace{\sqrt{x-4}}_{\text{اکیداً صعودی}}-\underbrace{\sqrt{20-4x}}_{\text{اکیداً صعودی}}}_{\text{اکیداً صعودی}}$$

اگر A اکیداً صعودی باشد، 2^A هم اکیداً صعودی است. در نتیجه تابع f، اکیداً صعودی است.

تابع f، دو عبارت رادیکالی دارد، دامنه‌اش را حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases}\sqrt{x-4} \xrightarrow{\text{دامنه}} x\geq 4\\ \sqrt{20-4x} \xrightarrow{\text{دامنه}} x\leq 5\end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f=[4,5]$$

چون f اکیداً صعودی (و پیوسته) است، پس برای محاسبهٔ برد باید مقدارش را در $x=4$ و $x=5$ حساب کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} f(4)=2^{0-2}=2^{-2}=\frac{1}{4}\\ f(5)=2^{1-0}=2^{1}=2\end{array}\right\} \Rightarrow R_f=[\underset{a}{\frac{1}{4}},\underset{b}{2}] \Rightarrow a+b=\frac{1}{4}+2=\frac{9}{4}$$

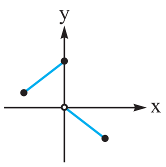
رابطهٔ یکنوایی و یک‌به‌یک بودن

رابطهٔ بین یکنوایی و یک‌به‌یک بودن را به صورت کامل‌تر در چند جمله آورده‌ایم:

۱) هر تابع اکیداً یکنوا حتماً یک‌به‌یک است.

۲) هر تابع غیر یک‌به‌یک حتماً اکیداً یکنوا نیست. (عکس نقیض جملهٔ (۱))

۳) هر تابع یک‌به‌یکی لزوماً یکنوا نیست، مثل شکل روبه‌رو:



۴) هر تابع یک‌به‌یک و پیوسته‌ای، حتماً اکیداً یکنوا است. (یعنی جملهٔ ۳، شرط پیوستگی را کم داشت.)

مثلاً تابع $y=x^3+x-3$ تابعی یک‌به‌یک است، زیرا:

$$y=\underbrace{\underbrace{x^3}_{\text{صعودی اکید}}+\underbrace{x-3}_{\text{صعودی اکید}}}_{\text{صعودی اکید}}$$

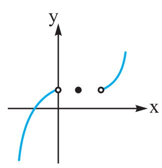
توابع x^3 و $x-3$ صعودی اکیدند و مجموعشان نیز صعودی اکید است:

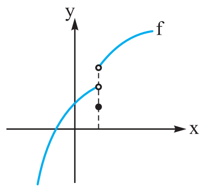
گفتیم هر تابع یکنوا اکیدی، یک‌به‌یک است، پس تابع بالا یک‌به‌یک است.

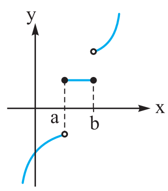
درس سوم: توابع یکنوا

۹۶- کدام تابع صعودی است اما اکیداً صعودی نیست؟

۱) $f=\{(۱,۲),(-۱,۰),(۳,۳)\}$

۲)


۳)


۴)


بررسی یکنوایی توابع

اگر با توابعی که همیشه یکنوا هستند، آشنا نیستید حتماً درس‌نامه را نگاه کنید.

۹۷- اگر تابع $f(x)=(۱-a^۲)x+a+۳$، تابعی اکیداً صعودی باشد، عرض نقطهٔ برخورد f با محور yها در چه بازه‌ای است؟

۱) $(۱,۳)$ ۲) $(۲,۴)$ ۳) $(۳,۵)$ ۴) $(۴,۶)$

۹۸- کدام تابع زیر، اکیداً صعودی است؟

۱) $y=\sqrt{-۲x+۴}$ ۲) $y=-(۲-x)^۳-۱$ ۳) $y=\log_{۰/۱} x$ ۴) $y=(\cos\frac{\pi}{۶})^x$

۹۹- به ازای $k\in(a,b)$، تابع نمایی $y=(\frac{k+۱}{۳-k})^x$ تابعی صعودی است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰۰- به ازای چند مقدار صحیح m، تابع $f(x)=(\frac{۳m+۱}{۴})^x$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$، نزولی است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ مقدار m

۱۰۱- اگر تابع $f(x)=|x+۲m-۱|-|x-m+۵|$ تابعی نزولی باشد، محدودهٔ کامل m کدام است؟

۱) $m\geq ۲$ ۲) $m\leq ۲$ ۳) $m>۲$ ۴) $m<۲$

برای تعیین یکنوایی توابعی که چندضابطه‌ای، قدرمطلق یا براکتی هستند، همیشه تابع را رسم می‌کنیم.

۱۰۲- تابع $f(x)=\begin{cases} x^۳+۱ & x\leq ۰ \\ -x^۲ & x>۰ \end{cases}$ چگونه است؟

۱) اکیداً صعودی ۲) اکیداً نزولی ۳) ابتدا صعودی و سپس نزولی ۴) ابتدا نزولی و سپس صعودی

۱۰۳- تابع $f(x)=\log_۲ \sqrt[۳]{x}$ از نظر یکنوایی چگونه است؟

۱) صعودی ۲) نزولی ۳) نه صعودی، نه نزولی ۴) هم صعودی، هم نزولی

۱۰۴- تابع $f(x)=\log_{۰/۵} x^۲$ از نظر یکنوایی چگونه است؟

۱) صعودی ۲) نزولی ۳) نه صعودی، نه نزولی ۴) هم صعودی، هم نزولی

۱۰۵- تابع $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^۳}}$ چگونه تابعی است؟

۱) ابتدا صعودی، سپس نزولی ۲) ابتدا نزولی، سپس صعودی ۳) همواره صعودی ۴) همواره نزولی

۱۰۶- کدام‌یک از توابع زیر در دامنهٔ خود اکیداً صعودی نیست؟

۱) $f(x)=\frac{|x|}{x}+x$ ۲) $f(x)=x-\frac{x}{|x|}$ ۳) $f(x)=۲x-|x-۱|$ ۴) $f(x)=\begin{cases} -x^۲ & x\leq ۰ \\ x^۲-۱ & x>۱ \end{cases}$

۱۰۷- کدام‌یک از توابع زیر در دامنهٔ خود اکیداً نزولی است؟

۱) $f(x)=x^۲|x|$ ۲) $f(x)=-x^۲|x|$ ۳) $f(x)=x|x|$ ۴) $f(x)=-x|x|$

۱۰۸- یکنوایی تابع $\begin{cases} f:(-۱,۱)-\{۰\}\to\mathbb{R} \\ f(x)=x|x|+\frac{x}{|x|} \end{cases}$ چگونه است؟

۱) صعودی ۲) نزولی ۳) ابتدا صعودی، سپس نزولی ۴) ابتدا نزولی، سپس صعودی

۱۰۹- تابع $x\geq ۰$ و $f(x)=|x^۲-۲x|$ در بازهٔ (a,b) نزولی اکید است. حداکثر مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۱۰- بازهٔ $[a,b]$، بزرگ‌ترین بازه‌ای است که تابع $f(x)=x|x-۲|$ در آن اکیداً نزولی است. کدام خط، نمودار f را در ۳ نقطه قطع می‌کند؟

۱) $y=b$ ۲) $y=a$ ۳) $y=\frac{a}{b}$ ۴) $y=\frac{b}{a}$

۱۱۱- اگر $f(x)=x^۳+x^۲$ و $g(x)=|x|$ باشد، تابع $\frac{f}{g}$ در چه بازه‌ای نزولی است؟

۱) $(-۱,\frac{-۱}{۲})$ ۲) $(\frac{-۱}{۲},۰)$ ۳) $(۰,\frac{۱}{۲})$ ۴) $(\frac{۱}{۲},۱)$

۱۱۲- تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x+۱|-|x-۲|$، در کدام بازه، اکیداً صعودی است؟ (تجربی خارج ۹۸)

۱) $(-\infty,۲)$ ۲) $(-۱,+\infty)$ ۳) $(-۱,۲)$ ۴) $(۲,+\infty)$

۱۱۳- تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x+۲|+|x-۱|$ در کدام بازه، اکیداً نزولی است؟ (تجربی ۹۸)

۱) $(-\infty,-۲)$ ۲) $(-\infty,۱)$ ۳) $(-۲,۱)$ ۴) $(۱,+\infty)$

۱۱۴- تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲+۱ & x\geq ۰ \\ ۳x+a & x<۰ \end{cases}$ بر دامنه‌اش اکیداً صعودی است. حداکثر مقدار a کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) -۲

۱۱۵- به ازای چه حدودی از k، تابع $f(x)=\begin{cases}۴-|x-۱| & x\le ۰\\ k+x^{۲} & x>۰\end{cases}$، تابعی اکیداً یکنواست؟

۱) $k>۳$ ۲) $k\le ۳$ ۳) $k\ge ۳$ ۴) $k<۳$

۱۱۶- اگر $f(x)=\begin{cases}x^{۲} & x\le -۱\\ g(x) & x>-۱\end{cases}$ تابعی نزولی باشد، ضابطهٔ g کدام می‌تواند باشد؟

۱) $y=|x|$ ۲) $y=-x^{۲}$ ۳) $y=-|x|-x$ ۴) $y=x+|x|$

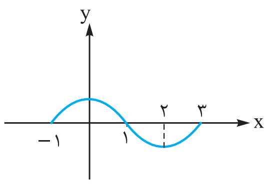
۱۱۷- کدام تابع اکیداً یکنواست؟

۱) $y=|۲x|+x$ ۲) $y=|۲x-۴|-x$ ۳) $y=|x+۱|+۲x$ ۴) $y=|x-۱|+x$

۱۱۸- اگر تابع $f(x)=ax+۴-|\frac{x}{۲}+۱|$، تابعی غیریکنوا باشد، محدودهٔ a کدام است؟

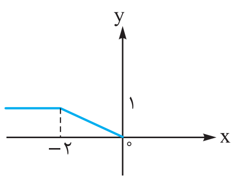
۱) $a>\frac{-۱}{۲}$ ۲) $a<\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{-۱}{۲}<a<\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{-۱}{۲}\le a\le \frac{۱}{۲}$

۱۱۹- شکل مقابل نمودار تابع $y=f(x)$ است. نمودار تابع $y=f(۱-x)$ در کدام فاصله اکیداً نزولی است؟



۱) $(-۳,-۱)$
۲) $[-۴,-۳]$
۳) $(-۱,۱)$
۴) $[۱,۲]$

۱۲۰- نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. اگر $g(x)=۲-|x|$، آن‌گاه تابع fog در کدام‌یک از بازه‌های زیر صعودی است؟



۱) $(-۲,۲)$ ۲) $(-۴,۰)$
۳) $(-۱,۳)$ ۴) $(۱,۵)$

۱۲۱- اگر $f(x)=\frac{|x|+x^{۲}}{۱+|x|}$، $g(x)=۲x^{۲}+x-۱$ و تابع fog در بازهٔ $[-a^{۲},-b^{۲}]$ صعودی باشد، بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۰/۷۵ ۲) ۱ ۳) ۱/۲۵ ۴) ۱/۵

۱۲۲- اگر $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{|x|} & x\ne ۰\\ ۱ & x=۰\end{cases}$، $g(x)=x^{۲}-x$ و تابع $(fog)(x+۱)$ در بازهٔ $(a,+\infty)$ صعودی باشد، کم‌ترین مقدار a کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

۱۲۳- تابع $f(x)=|a+x^{۳}|$ در بازهٔ $(-\infty,a-۲)$ نزولی است. چند عدد طبیعی در مجموعه مقادیر a وجود دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

در نمایش زوج مرتبی، ابتدا باید زوج مرتب‌ها را از x کوچک به بزرگ بنویسیم.

۱۲۴- اگر تابع $f=\{(۱,۱),(۳,۶),(\sqrt{۲},m^{۲}-۲),(۱۰,۲۰)\}$ اکیداً صعودی باشد، حدود m شامل چند عدد صحیح است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۲۵- اگر $f=\{(۱,۳a+۱),(-۱,a+۱),(۲,۴a+۳)\}$ تابعی صعودی باشد، مقادیر a در کدام بازه است؟

۱) $(-\infty,۰]$ ۲) $(-\infty,۰)$ ۳) $(۰,+\infty)$ ۴) $[۰,+\infty)$

۱۲۶- توابع $f=\{(۲,۳m),(-۳,m),(۵,-m),(۱,m^{۲}-۱)\}$ و $g=\{(-۳,۱۲),(۱,۱),(۴,-m),(۵,۲)\}$ مفروض‌اند. اگر $f+g$ تابعی نزولی باشد، چند مقدار صحیح برای m وجود دارد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

بازه‌های یکنوایی توابع غیریکنوا

در سهمی‌ها، یک سمت رأس صعودی و سمت دیگر رأس نزولی است.

۱۲۷- تابع $f(x)=۳x^{۲}-۶x+۲$ روی بازهٔ $[-۱,۲]$ چگونه است؟

۱) ابتدا صعودی سپس نزولی ۲) ابتدا نزولی سپس صعودی ۳) نزولی ۴) صعودی

۱۲۸- مقادیر تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^{۲}-۲x-۳$ با دامنهٔ $\{x:|x-۱|<۲\}$ همواره چگونه است؟ (سراسری ۹۱)

۱) نزولی ۲) مثبت ۳) صعودی ۴) منفی

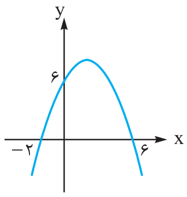
۱۲۹- تابع $f(x)=x^{۲}-(۲m+۱)x+۱$ در بازهٔ $[-۱,۲]$ غیریکنوا است. بازهٔ m کدام است؟

۱) $-۱\le m\le \frac{۱}{۲}$ ۲) $-۱<m<\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}\le m\le \frac{۳}{۲}$ ۴) $-\frac{۳}{۲}<m<\frac{۳}{۲}$

۱۳۰- اگر تابع $f(x)=(\frac{1}{m})x^2-x+3$ در بازه $[1,+\infty)$ اکیداً صعودی باشد، محدودهٔ m کدام است؟

۱) $-2\le m<0$ ۲) $0<m\le 2$ ۳) $m\le -2$ ۴) $m\ge 2$

۱۳۱- با توجه به نمودار سهمی $y=f(x)$، اگر تابع $g(x)=kx^2+4f(x)$ تابعی اکیداً یکنوا باشد، مقدار k کدام است؟



۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۴ ۴) $\frac{1}{2}$

تابع هموگرافیک، هیچ‌گاه یکنوا نیست، مگر این‌که دامنهٔ تابع، محدود شده باشد.

۱۳۲- تابع $f(x)=\frac{2x+1}{x-3}$ در بازهٔ $(-\infty,a)$ اکیداً نزولی است. حداکثر a کدام است؟

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) ۳

۱۳۳- تابع $f(x)=\frac{-1}{x-2}$ در بازهٔ $(-\infty,a]$ اکیداً صعودی است. حداکثر مقدار صحیح a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۳۴- کدام‌یک از توابع زیر در بازهٔ $(-2,+\infty)$ اکیداً صعودی است؟

۱) $y=\frac{x-1}{x+3}$ ۲) $y=\frac{2x-3}{x+1}$ ۳) $y=\frac{-x+1}{x+3}$ ۴) $y=\frac{2x+1}{x-1}$

۱۳۵- اگر در بازهٔ $(1,+\infty)$ تابع $f(x)=\frac{x+1}{2x-a}$ اکیداً یکنوا باشد، حدود a کدام است؟

۱) $(-\infty,2)$ ۲) $(-\infty,2]$ ۳) $(-\infty,2)-\{-2\}$ ۴) $(-\infty,2]-\{-2\}$

۱۳۶- تابع $f(x)=\frac{2x+b}{3x+d}$ در بازه‌های $(-2,+\infty)$ و $(-\infty,-2)$ یکنوا اکید است و محور xها را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع می‌کند. کدام تابع زیر اکیداً صعودی است؟

۱) $y=d^{-x}$ ۲) $y=bx^3$ ۳) $y=dx+b|x|$ ۴) $y=bx+d$

کاربرد یکنوایی در حل نامعادلات

۱۳۷- اگر f تابعی نزولی با دامنهٔ $\mathbb{R}$ و $f(5-a)>f(2a-1)$ باشد، محدودهٔ a کدام است؟

۱) $a\ge 2$ ۲) $a\le 2$ ۳) $a>2$ ۴) $a<2$

۱۳۸- اگر $g(x)=\sqrt{f(2x+1)-f(x-2)}$ و f اکیداً نزولی باشد، دامنهٔ تابع $g(x)$ کدام است؟ $(D_f=\mathbb{R})$

۱) $[-3,+\infty)$ ۲) $(-3,+\infty)$ ۳) $(-\infty,-3]$ ۴) $(-\infty,-3)$

۱۳۹- اگر $f(x)=\frac{1-x}{x}$، آن‌گاه در کدام‌یک از بازه‌های زیر، نمودار تابع $y=f(1+x^4)$ بالای نمودار تابع $y=f(3+x^2)$ قرار دارد؟

۱) $(-1,1)$ ۲) $(0,2)$ ۳) $(1,3)$ ۴) $(2,4)$

۱۴۰- اگر $f(x)=-x^3+2$ باشد، جواب نامعادلهٔ $(fof)(x)>f(x^2)$ کدام است؟

۱) $(1,+\infty)$ ۲) $(-\infty,1)$ ۳) $(-1,1)$ ۴) $\mathbb{R}-[-1,1]$

۱۴۱- اگر f یک تابع اکیداً نزولی بوده و $f(3)=0$ باشد، دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟ $(D_f=\mathbb{R})$

۱) $[0,3]$ ۲) $\mathbb{R}-(0,3)$ ۳) $(-\infty,3]$ ۴) $[3,+\infty)$

۱۴۲- اگر f تابعی اکیداً صعودی و $f(2)=0$ باشد، دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{(x^2-x)f(x)}$ شامل چند عدد طبیعی نیست؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۴۳- اگر $f(x)=2^x$ باشد، دامنهٔ تابع $y=\sqrt{f(\frac{1}{x})-f(x)}$ به کدام صورت است؟ (خارج ۹۳)

۱) $\mathbb{R}-(-1,1)$ ۲) $[-1,0)\cup(0,1]$ ۳) $[-1,0)\cup[1,+\infty)$ ۴) $(-\infty,-1]\cup(0,1]$

۱۴۴- اگر $f(x)=4-(\frac{1}{2})^x$ باشد، دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{xf(x)}$ کدام بازه است؟ (سراسری ۹۳ با تغییر)

۱) $[-2,0]$ ۲) $\mathbb{R}-(-2,0)$ ۳) $[0,2]$ ۴) $\mathbb{R}-(0,2)$

یکنوایی و اعمال جبری

۱۴۵- چندتا از عبارات زیر درست است؟

الف) اگر f صعودی و g نزولی باشد، $f+g$ یک تابع ثابت است.

ب) اگر f صعودی اکید و g صعودی باشد، $f+g$ صعودی اکید است.

پ) اگر f صعودی اکید و g نزولی باشد، $f-g$ صعودی اکید است.

ت) اگر f تابعی صعودی اکید و g تابعی ثابت باشد، $f\times g$ اکیداً صعودی است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۴۶- اگر $f(x)$ تابعی اکیداً نزولی باشد، تابع $y=f(-x^3)$ چگونه تابعی است؟

۱) اکیداً نزولی ۲) اکیداً صعودی ۳) غیریکنوا ۴) نامشخص می‌باشد.

۱۴۷- اگر f تابعی اکیداً صعودی و g اکیداً نزولی باشد، کدام‌یک از توابع زیر نزولی است؟

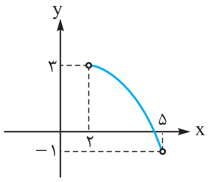
۱) $y=f(x)+\sqrt{x}$ ۲) $y=gog(x)$ ۳) $y=g(x^2)$ ۴) $y=(fogof)(x)$

۱۴۸- تابع $y=\dfrac{1}{\sqrt{2-x}+1}$ چگونه است؟

۱) اکیداً صعودی ۲) اکیداً نزولی ۳) ابتدا صعودی، سپس نزولی ۴) ابتدا نزولی، سپس صعودی

۱۴۹- اگر f تابعی اکیداً نزولی و زیر محور xها باشد، توابع $g(x)=-xf(x)$ و $h(x)=\dfrac{1}{f(-x)}$ به ترتیب چگونه‌اند؟

۱) صعودی ـ صعودی ۲) صعودی ـ نزولی ۳) نزولی ـ صعودی ۴) نزولی ـ نزولی



۱۵۰- در شکل مقابل، نمودار تابع f به طور کامل رسم شده است. برد تابع $y=[\sqrt{x}-f(x)]$ چند عضو دارد؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

۱۵۱- توابع $f(x)=\dfrac{-1}{x}+\sqrt{x}$ و $g(x)=|x|+\sqrt{-x}$ به ترتیب چگونه‌اند؟

۱) غیریکنوا ـ غیریکنوا ۲) غیریکنوا ـ نزولی ۳) صعودی ـ غیریکنوا ۴) صعودی ـ نزولی

۱۵۲- تابع $f(x)=x^2-2x+\sqrt{1-x}$ از نظر یکنوایی چگونه است؟

۱) اکیداً صعودی ۲) اکیداً نزولی ۳) ابتدا صعودی، سپس نزولی ۴) ابتدا نزولی، سپس صعودی

۱۵۳- کدام عبارت، برای تابع $f(x)=2\sqrt{x}-\dfrac{3}{2\sqrt[3]{x^2}-1}$ درست است؟ (سراسری ۱۴۰۰)

۱) تابع f در بازهٔ $(0,1)\cup(1,\infty)$ صعودی است.
۲) تابع f در بازه‌های $(1,\infty)$ و $(0,1)$ صعودی است.
۳) تابع f در بازهٔ $(1,\infty)$ صعودی و در بازهٔ $(0,1)$ نزولی است.
۴) تابع f در بازهٔ $(1,\infty)$ نزولی و در بازهٔ $(0,1)$ صعودی است.

برد با یکنوایی

۱۵۴- برد تابع $f(x)=2x+1+\sqrt{x-1}$ شامل چند عدد طبیعی نمی‌شود؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۵۵- اگر برد تابع $f(x)=2\sqrt{2+x}-\sqrt{7-x}$ بازهٔ $[a,b]$ باشد، مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۱۵۶- اگر برد تابع $f(x)=-x^3+\sqrt{-x}+1$ با دامنهٔ $[-4,-1)$ به صورت $(a,b]$ باشد، $b-a$ کدام است؟

۱) ۶۲ ۲) ۶۴ ۳) ۶۶ ۴) ۶۸

۱۵۷- فرض کنید برد تابع $f(x)=2^{\sqrt[3]{9\cos^2(x)-1}}-2^{\sqrt[3]{1-9\cos^2(x)}}$ به صورت $[a,b]$ باشد، مقدار $b-a$ کدام است؟ (سراسری ۱۴۰۰)

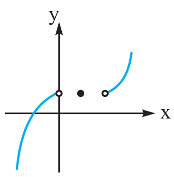
۱) $\frac{9}{4}$ ۲) $\frac{15}{4}$ ۳) $\frac{9}{2}$ ۴) $\frac{21}{4}$

هر تابع اکیداً یکنوا، حتماً یک‌به‌یک است.

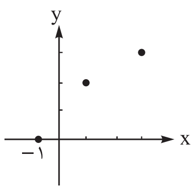
۱۵۸- کدام‌یک از تابع‌های زیر یک‌به‌یک است؟ (سراسری ۹۷)

۱) $f(x)=x+\sqrt{x}$ ۲) $g(x)=x-\sqrt{x}$ ۳) $h(x)=2x+\dfrac{1}{x}$ ۴) $p(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

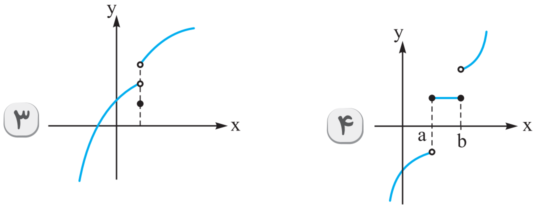
۹۶. **گزینه ۴** نمودارها را کنار هم ببینید:



۲



۱



در گزینه‌های (۱) و (۲) وقتی از چپ به راست حرکت می‌کنیم، نمودار فقط رو به بالا رفته، پس صعودی اکیدند.

در (۳)، ابتدا نمودار رو به بالا رفته و سپس در یک نقطه به پایین آمده، پس غیریکنواست.

در (۴)، نمودار یا رو به بالا رفته یا ثابت بوده، پس صعودی است ولی صعودی اکید نیست.

۹۷. گزینه ۲ تابع خطی زمانی اکیداً صعودی است که شیبش مثبت باشد، پس:

$$1-a^2>0 \Rightarrow a^2<1 \Rightarrow |a|<1 \Rightarrow -1<a<1$$

عرض از مبدأ خط $f(x)=(1-a^2)x+(a+3)$، می‌شود $a+3$.

به کمک $-1<a<1$، محدودهٔ عرض از مبدأ درمی‌آید:

$$-1<a<1 \xrightarrow{+3} 2<a+3<4 \Rightarrow 2<\text{عرض از مبدأ}<4$$

۹۸. گزینه ۲ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

(۱) $y=\sqrt{ax+b}$ با شرط $a<0$، اکیداً نزولی است، پس $y=\sqrt{-2x+4}$ اکیداً نزولی می‌باشد.

(۲) چون توان فرد است، منفی را می‌توانیم به داخل پرانتز ببریم:

$$y=-(2-x)^3-1=(x-2)^3-1$$

توابع به فرم $y=a(x+\alpha)^3+\beta$ با شرط $a>0$ اکیداً صعودی هستند، پس این تابع اکیداً صعودی است.

(۳) تابع لگاریتمی $y=\log_{0/1}x$، چون مبنایش بین صفر و ۱ است، اکیداً نزولی است.

(۴) می‌دانیم $\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6}$. پس با تابع نمایی $y=(\frac{\sqrt{3}}{2})^x$ طرفیم که چون پایه‌اش بین ۰ و ۱ است، تابعی اکیداً نزولی محسوب می‌شود.

۹۹. گزینه ۲ تابع نمایی $y=A^x$ با شرط $A>1$، تابعی صعودی (یا اکیداً صعودی) است. پس در تابع $y=(\frac{k+1}{3-k})^x$، باید پایه بزرگ‌تر از ۱ باشد:

$$\frac{k+1}{3-k}>1 \Rightarrow \frac{k+1}{3-k}-1>0 \Rightarrow \frac{k+1-3+k}{3-k}>0 \Rightarrow \frac{2k-2}{3-k}>0$$

ریشهٔ صورت ۱ و ریشهٔ مخرج ۳ است. جدول تعیین علامت می‌کشیم:

	۱		۳	
−	۰	+	ت‌ن	−

قسمت‌های مثبت را می‌خواهیم:

$$k\in(\underset{a}{1},\underset{b}{3})$$

پس:

$$\max(b-a)=3-1=2$$

۱۰۰. گزینه ۲ برای آن‌که تابع $y=A^x$ نزولی باشد باید $0<A\le 1$ باشد.

> **اشاره** اگر در صورت سؤال، می‌گفت تابع نماییِ فلان، نزولی باشد، شرطمان $0<A<1$ می‌شد. پس در تابع $f(x)=(\frac{3m+1}{4})^x$ برای نزولی‌شدن، باید:
>
> $$0<\frac{3m+1}{4}\le 1 \xrightarrow{\times 4} 0<3m+1\le 4 \xrightarrow{-1} -1<3m\le 3 \xrightarrow{\div 3} -\frac{1}{3}<m\le 1$$

پس m دو مقدار صحیح دارد: صفر و ۱

۱۰۱. گزینه ۲ تابع آبشاری $y=|x-a|-|x-b|$، به شرطی که ریشهٔ قدرمطلق اولش بزرگ‌تر از ریشهٔ قدرمطلق دوم باشد نزولی است (یعنی $a>b$):

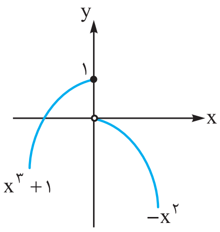
در هر دو شرط بالا، اگر مساوی قرار دهیم، نمودارمان به یک تابع ثابت تبدیل می‌شود که هم صعودی است و هم نزولی. ریشهٔ قدرمطلق‌ها را حساب می‌کنیم:

$$f(x)=|x+\underset{\text{ریشه}:\,-2m+1}{2m-1}|-|x-\underset{\text{ریشه}:\,m-5}{m+5}|$$

شرط نزولی‌بودن را اعمال می‌کنیم:

$$\text{ریشهٔ اولی}\ge\text{ریشهٔ دومی} \Rightarrow -2m+1\ge m-5 \Rightarrow -3m\ge -6 \Rightarrow m\le 2$$

۱۰۲. گزینه ۳ اول نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

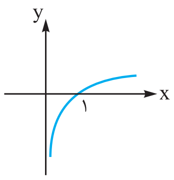


با توجه به نمودار، تابع ابتدا صعودی (در $x\le 0$ رو به بالا) و سپس نزولی (در $x>0$ رو به پایین) است.

۱۰۳. گزینه ۱ ابتدا ضابطه را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\log_2\sqrt[3]{x}=\log_2 x^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\log_2 x$$

نمودار تابع $y=\log_2 x$ به صورت روبه‌رو است:



تابع صعودی اکید است. اگر عددی مثبت مثل $\frac{1}{3}$ در ضابطه ضرب شود، تغییری در یکنوایی ایجاد نمی‌کند.

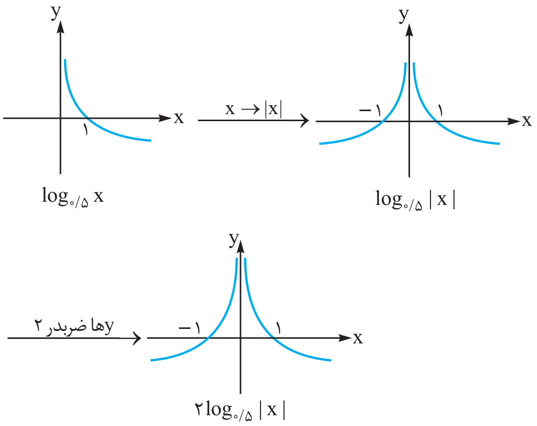
۱۰۴. گزینه ۳

> **نکته**
>
> $$\begin{cases}\log x^2=2\log|x| & (\text{توان زوج})\\ \log x^3=3\log x & (\text{توان فرد})\end{cases}$$

ابتدا ضابطه را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\log_{0/5}x^2=2\log_{0/5}|x|$$

نمودار f را مرحله‌به‌مرحله رسم می‌کنیم:



چون تابع f، در قسمت‌هایی صعودی اکید ($x<0$) و در قسمت‌هایی نزولی اکید ($x>0$) است، پس غیریکنواست.

۱۰۵. گزینه ۴ دامنه تابع f را حساب می‌کنیم:

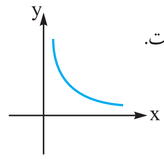
$$\left.\begin{array}{l}x\ge 0\\ x^3>0 \Rightarrow x>0\end{array}\right\}\xrightarrow{\cap} x>0 \Rightarrow D_f=(0,+\infty)$$

ضابطهٔ f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{|x|\sqrt{x}}=\frac{1}{|x|}\xrightarrow{x>0} f(x)=\frac{1}{x}$$

پس ضابطهٔ f، به صورت $f(x)=\frac{1}{x}$ با دامنهٔ $x>0$ است.

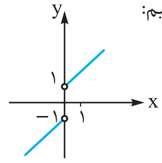
نمودارش به شکل روبه‌رو است:



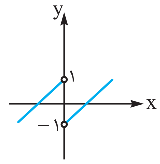
پس f، همواره نزولی است.

۱۰۶. گزینهٔ ۲ نمودار هر یک از گزینه‌ها را رسم می‌کنیم:

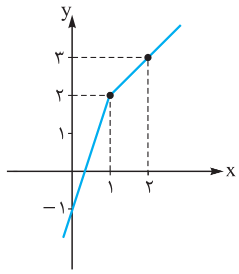
(۱) $f(x)=\frac{|x|}{x}+x=\begin{cases}1+x & x>0\\ -1+x & x<0\end{cases}$



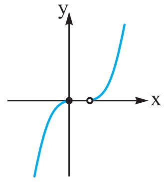
(۲) $f(x)=x-\frac{x}{|x|}=\begin{cases}x-1 & x>0\\ x+1 & x<0\end{cases}$



(۳) $f(x)=2x-|x-1|=\begin{cases}x+1 & x\ge 1\\ 3x-1 & x<1\end{cases}$



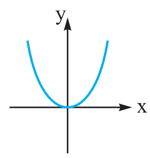
(۴) $f(x)=\begin{cases}-x^2 & x\le 0\\ x^2-1 & x>1\end{cases}$



با توجه به نمودارها، $f(x)=x-\frac{x}{|x|}$ غیریکنوا است و بقیهٔ تابع‌ها صعودی اکید هستند.

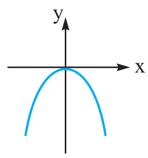
۱۰۷. گزینهٔ ۴ نمودار تمام توابع را رسم می‌کنیم:

(۱) $y=x^2|x|=\begin{cases}x^3 & x\ge 0\\ -x^3 & x<0\end{cases}$



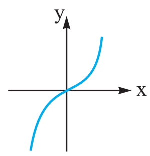
$\Rightarrow$ غیریکنوا

(۲) $y=-x^2|x| \Rightarrow$ شکل بالا را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.



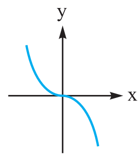
$\Rightarrow$ غیریکنوا

(۳) $y=x|x|=\begin{cases}x^2 & x\ge 0\\ -x^2 & x<0\end{cases}$



$\Rightarrow$ اکیداً صعودی

(۴) $y=-x|x| \Rightarrow$ شکل بالا را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.

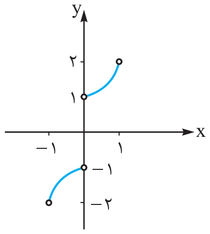


$\Rightarrow$ اکیداً نزولی

۱۰۸. گزینهٔ ۱ با توجه به ریشهٔ قدرمطلق $(x=0)$، تابع را دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

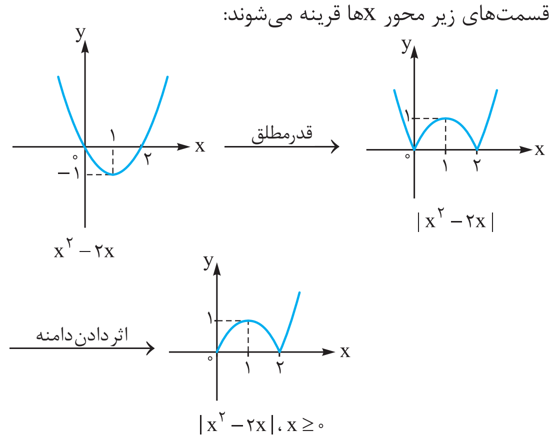
$$f(x)=x|x|+\frac{x}{|x|}=\begin{cases}x(x)+\frac{x}{x} & x>0\\ x(-x)+\frac{x}{-x} & x<0\end{cases}=\begin{cases}x^2+1 & x>0\\ -x^2-1 & x<0\end{cases}$$

تابع را در دامنهٔ $(-1,1)-\{0\}$ رسم می‌کنیم:



نمودار f فقط رو به بالا حرکت کرده، پس صعودی اکید (یا صعودی) است.

۱۰۹. گزینهٔ ۳ ابتدا سهمی $y=x(x-2)$ را با داشتن ریشه‌هایش $(x=2, x=0)$ و دهانهٔ رو به بالا رسم می‌کنیم. بعد که قدرمطلق را اثر می‌دهیم، قسمت‌های زیر محور xها قرینه می‌شوند:



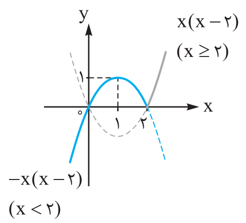
نمودار آخر در بازهٔ $(1,2)$ یا $[1,2]$ نزولی اکید است، پس:

$$\max(b-a)=2-1=1$$

۱۱۰. گزینهٔ ۳ اول تابع را دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

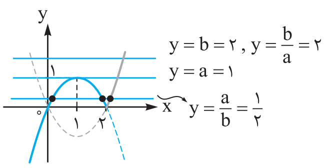
$$y=x|x-2|=\begin{cases}x(x-2) & x\ge 2\\ -x(x-2) & x<2\end{cases}$$

هر دو ضابطهٔ سهمی با ریشه‌های صفر و ۲ هستند. نمودار را رسم می‌کنیم:



تابع رسم‌شده در بازهٔ $[\underset{a}{1},\underset{b}{2}]$ نزولی اکید است.

خطوط داده‌شده در گزینه‌ها را رسم می‌کنیم:



فقط خط $y=\frac{a}{b}$ یعنی $y=\frac{1}{2}$، نمودار f را در ۳ نقطه قطع می‌کند.

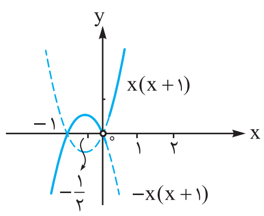
۱۱۱. گزینهٔ ۲ تابع $\frac{f}{g}$ را می‌نویسیم:

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{x^3+x^2}{|x|}=\begin{cases}\frac{x^3+x^2}{x} & x>0\\ \frac{x^3+x^2}{-x} & x<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}x^2+x & x>0\\ -(x^2+x) & x<0\end{cases}=\begin{cases}x(x+1) & x>0\\ -x(x+1) & x<0\end{cases}$$

هر دو ضابطه سهمی با ریشه‌های $x=0$ و $x=-1$ هستند. رأس هر دو سهمی هم میانگین ریشه‌ها یعنی $x=-\frac{1}{2}$ است.

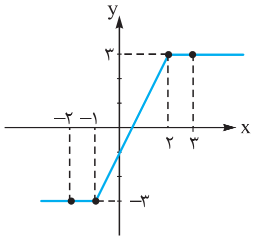
نمودار $\frac{f}{g}$ را رسم می‌کنیم:



پس تابع $\frac{f}{g}$ در بازهٔ $(-\frac{1}{2},0)$ نزولی است.

۱۱۲. گزینه ۳ نمودار رسم می‌کنیم. اگر یادتان باشد شکل این توابع، آبشاری می‌شد! کافی است چهارتا نقطه بدهیم:

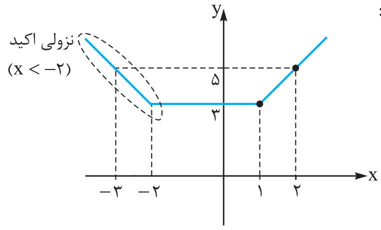
	کوچک‌تر	ریشه	ریشه	بزرگ‌تر
x	-2	-1	2	3
y	-3	-3	3	3



این تابع در بازهٔ $[-1,2]$ یا $(-1,2)$ اکیداً صعودی است.

> **اشاره** اگر جای «اکیداً صعودی» می‌گفت «صعودی»، جواب $\mathbb{R}$ می‌شد.

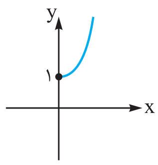
۱۱۳. گزینه ۱ تابع $f(x)=|x+2|+|x-1|$ یک تابع گلدانی است. با نقطه‌یابی آن را رسم می‌کنیم:



	کوچک‌تر	ریشه	ریشه	بزرگ‌تر
x	-3	-2	1	2
y	5	3	3	5

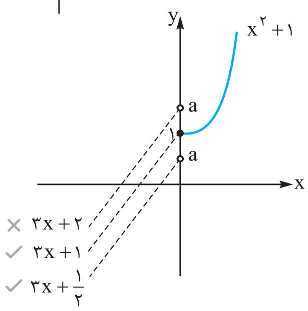
پس f در بازهٔ $(-\infty,-2)$ نزولی اکید است.

۱۱۴. گزینه ۲ ضابطهٔ اول قابل رسم است:



$y=x^2+1$ با دامنهٔ $x\ge 0$

ضابطهٔ دوم، یک خط با شیب مثبت می‌باشد (یعنی صعودی است) که عرض از مبدأش a است. باید $a\le 1$ انتخاب شود تا تابع صعودی اکید باشد:

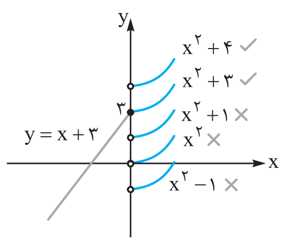


پس حداکثر مقدار a برابر با ۱ است.

۱۱۵. گزینه ۳ به ازای $x\le 0$، عبارت داخل قدرمطلق منفی می‌شود، پس ضابطهٔ بالا این‌جوری می‌شود: $4-|x-1|=4-(-x+1)=x+3$

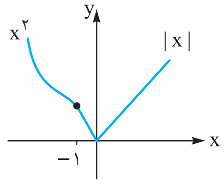
ضابطه تا این‌جا به شکل $f(x)=\begin{cases}x+3 & x\le 0\\ x^2+k & x>0\end{cases}$ درآمده.

ضابطهٔ اول را می‌توانیم رسم کنیم. ضابطهٔ دوم هم قسمت راست سهمی x^2 است که با توجه به مقدار k، از مبدأ بالا یا پایین می‌رود. با توجه به نمودار، فقط وقتی $k\ge 3$ انتخاب شود، نمودار رو به بالا می‌رود و صعودی اکید می‌شود.



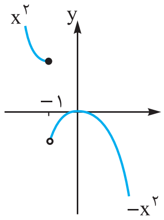
۱۱۶. گزینه ۳ نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\le -1\\ g(x) & x>-1\end{cases}$ را به ازای هر کدام از گزینه‌ها رسم می‌کنیم:

(۱) $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\le -1\\ |x| & x>-1\end{cases}\Rightarrow$



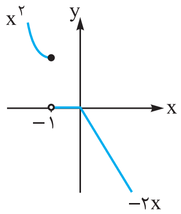
$\Rightarrow$ غیریکنوا

(۲) $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\le -1\\ -x^2 & x>-1\end{cases}\Rightarrow$



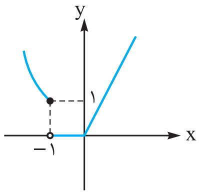
$\Rightarrow$ غیریکنوا

(۳) $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\le -1\\ -|x|-x & x>-1\end{cases}\Rightarrow$



$\Rightarrow$ نزولی

(۴) $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\le -1\\ x+|x| & x>-1\end{cases}\Rightarrow$



$\Rightarrow$ غیریکنوا

۱۱۷. گزینه ۳ در توابع خط $\pm$ |خط| $= y$ شرط اکیداً یکنوایی آن است که شیب هر دو ضابطه، هم‌علامت باشد.

(۱) $y=|2x|+x=\begin{cases}2x+x & x\ge 0\\ -2x+x & x<0\end{cases}=\begin{cases}3x & x\ge 0\\ -x & x<0\end{cases}$

(۲) $y=|2x-4|-x=\begin{cases}(2x-4)-x & x\ge 2\\ (-2x+4)-x & x<2\end{cases}=\begin{cases}x-4 & x\ge 2\\ -3x+4 & x<2\end{cases}$

(۳) $y=|x+1|+2x=\begin{cases}(x+1)+2x & x\ge -1\\ (-x-1)+2x & x<-1\end{cases}=\begin{cases}3x+1 & x\ge -1\\ x-1 & x<-1\end{cases}$

(۴) $y=|x-1|+x=\begin{cases}(x-1)+x & x\ge 1\\ (-x+1)+x & x<1\end{cases}=\begin{cases}2x-1 & x\ge 1\\ 1 & x<1\end{cases}$

فقط در (۳)، شیب هر دو ضابطه هم‌علامت (هر دو مثبت) شد، پس اکیداً یکنواست.

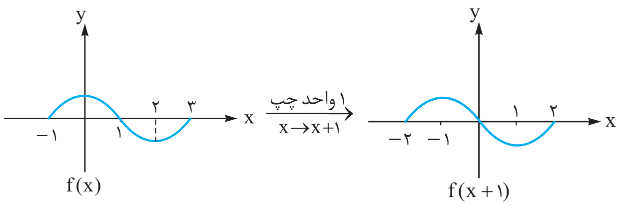
> **اشاره** در (۴)، شیب یکی از ضابطه‌ها ۲ و شیب دیگری صفر شد، پس صعودی (یکنوا) است ولی اکید نیست.

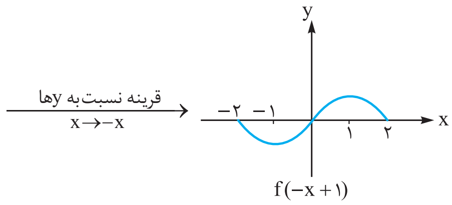
۱۱۸. گزینه ۳ برای آن‌که تابع خط $\pm$ |خط| $= y$، تابعی غیریکنوا باشد باید شیب ضابطه‌هایش هم‌علامت نباشد.

با توجه به ضابطهٔ $y=ax+4-|\frac{x}{2}+1|$، شیب ضابطه‌ها $a-\frac{1}{2}$ و $a+\frac{1}{2}$ است. برای هم‌علامت نبودن، باید ضربشان منفی شود:

$$(a-\frac{1}{2})(a+\frac{1}{2})<0 \xrightarrow{\text{بین ریشه‌ها}} -\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}$$

۱۱۹. گزینه ۴ مرحله‌به‌مرحله از نمودار $f(x)$ به $f(-x+1)$ می‌رسیم:

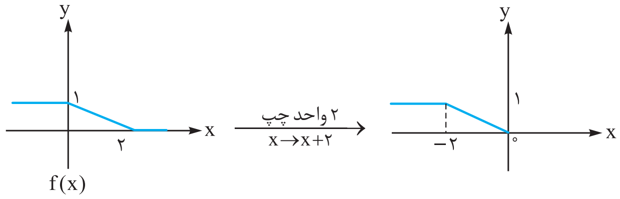


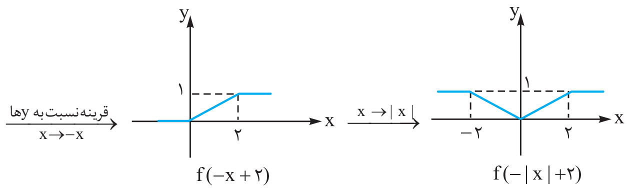


تابع نهایی در بازه‌های $[-۲,-۱]$ و $[۱,۲]$ اکیداً نزولی است.

۱۲۰. گزینهٔ ۴ با توجه به ضابطهٔ $g(x)=-|x|+۲$، ضابطهٔ fog به صورت مقابل می‌شود: $f(g(x))=f(-|x|+۲)$

مرحله‌به‌مرحله از نمودار $f(x)$ به $f(-|x|+۲)$ می‌رسیم:





نمودار نهایی در بین گزینه‌های داده‌شده در بازهٔ $(۱,۵)$ صعودی است (چون یا ثابت بوده یا رو به بالا حرکت کرده).

۱۲۱. گزینهٔ ۴ اگر جای $x^۲$، $|x|^۲$ را بنویسیم، ضابطهٔ f ساده می‌شود:

$$f(x)=\frac{|x|+x^۲}{۱+|x|}=\frac{|x|+|x|^۲}{۱+|x|}=\frac{|x|(۱+|x|)}{۱+|x|}=|x|$$

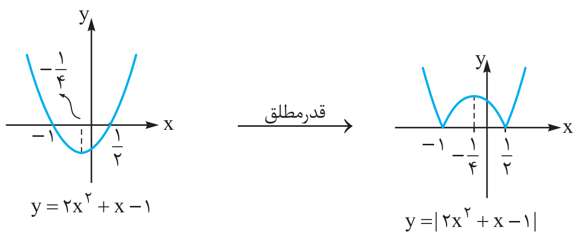
با توجه به این‌که مخرج f ریشه نداشت، پس دامنه هم $\mathbb{R}$ می‌ماند.

با توجه به $f(x)=|x|$ و $g(x)=۲x^۲+x-۱$، ضابطهٔ fog را تشکیل می‌دهیم: $f(g(x))=|g(x)|=|۲x^۲+x-۱|$

اول سهمی $y=۲x^۲+x-۱$ را رسم می‌کنیم و بعد قدرمطلق را اثر می‌دهیم.

با توجه به رابطهٔ $a+c=b$، ریشه‌های سهمی -۱ و $\frac{۱}{۲}$ هستند.

طول رأس برابر است با: $x_S=\dfrac{-۱+\frac{۱}{۲}}{۲}=-\dfrac{۱}{۴}$



با توجه به منفی‌بودن $-a^۲$ و $-b^۲$، باید دنبال یک بازهٔ دو سر منفی باشیم.

تابع نهایی در بازهٔ $[\underbrace{-۱}_{-a^۲},\underbrace{-\frac{۱}{۴}}_{-b^۲}]$ صعودی است، پس:

$$\begin{cases}-a^۲=-۱ \Rightarrow a=\pm۱\\ -b^۲=-\frac{۱}{۴} \Rightarrow b=\pm\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

بیشترین مقدار $b-a$ زمانی است که $b=\frac{۱}{۲}$ و $a=-۱$ باشد:

$$\frac{۱}{۲}-(-۱)=\frac{۳}{۲}=۱/۵$$

۱۲۲. گزینهٔ ۲ ضابطهٔ اول f را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$\frac{x}{|x|}=\begin{cases}۱ & x>۰\\ -۱ & x<۰\end{cases}$$

پس کل ضابطهٔ f به این صورت می‌شود:

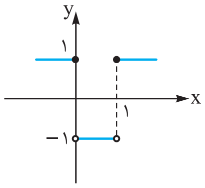
$$f(x)=\begin{cases}۱ & x>۰\\ -۱ & x<۰\\ ۱ & x=۰\end{cases}\xrightarrow{\text{ادغام ضابطهٔ اول و سوم}}\begin{cases}۱ & x\ge۰\\ -۱ & x<۰\end{cases}$$

با داشتن ضابطهٔ $g(x)=x^۲-x$، ضابطهٔ fog را تشکیل می‌دهیم:

جای تمام xهای ضابطهٔ f، $x^۲-x$ قرار می‌دهیم:

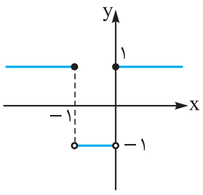
$$f(g(x))=\begin{cases}۱ & x^۲-x\ge۰\\ -۱ & x^۲-x<۰\end{cases}=\begin{cases}۱ & x\ge۱ \text{ یا } x\le۰\\ -۱ & ۰<x<۱\end{cases}$$

نمودار fog را رسم می‌کنیم:

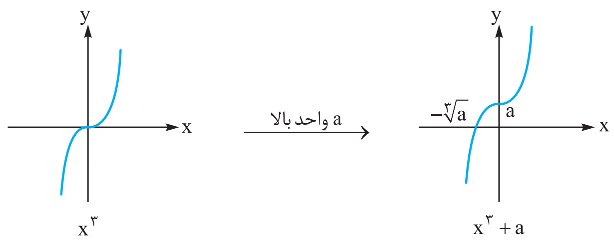


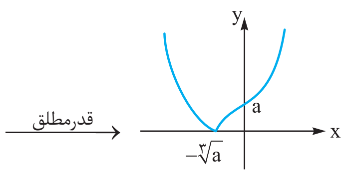
نمودار بالا را ۱ واحد به چپ می‌بریم تا به نمودار $(fog)(x+۱)$ برسیم:

تابع نهایی در بازهٔ $(-۱,+\infty)$ رو به بالا یا ثابت است، پس صعودی است. در نتیجه کم‌ترین مقدار a برابر -۱ است.



۱۲۳. گزینهٔ ۲ نمودار تابع $y=x^۳+a$، همان نمودار تابع $y=x^۳$ که a واحد بالا رفته است. (چون $a\in\mathbb{N}$) پس نمودار $f(x)=|x^۳+a|$ این‌شکلی می‌شود:





$|x^۳+a|$

برای به دست آوردن محل برخورد با محور xها، y را صفر می‌دهیم:

$$x^۳+a=۰ \Rightarrow x^۳=-a \Rightarrow x=-\sqrt[۳]{a}$$

تابع نهایی در بازهٔ $(-\infty,\sqrt[۳]{a}]$ و هر بازه‌ای که زیرمجموعه‌اش باشد، نزولی اکید است.

پس الان $(-\infty,a-۲)$ باید زیرمجموعهٔ $(-\infty,\sqrt[۳]{a})$ باشد، یعنی $a-۲$ باید کوچک‌تر یا مساوی از $-\sqrt[۳]{a}$ باشد: $a-۲\le-\sqrt[۳]{a} \Rightarrow a+\sqrt[۳]{a}-۲\le۰$

برای حل نامعادله، تغییر متغیر $\sqrt[۳]{a}=t$ را می‌دهیم:

$$t^۳+t-۲\le۰ \xrightarrow{\text{بر } t-۱ \text{ بخش‌پذیر}}$$

$$(t-۱)\underbrace{(t^۲+t+۲)}_{\Delta<۰,\,a>۰}\le۰ \xrightarrow[\text{همواره‌مثبت}]{\text{پرانتز دوم}} t-۱\le۰$$

$$\Rightarrow t\le۱ \xrightarrow{t=\sqrt[۳]{a}} \sqrt[۳]{a}\le۱ \Rightarrow a\le۱$$

پس a فقط یک مقدار طبیعی $a=۱$ را می‌تواند داشته باشد.

۱۲۴. گزینه ۲ زوج مرتب‌ها را از x کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

$(۱,۱),(\sqrt{۲},m^۲-۲),(۳,۶),(۱۰,۲۰)$

در تابع اکیداً صعودی، با افزایش xها، باید yها هم زیاد شوند:

$۱<m^۲-۲<۶<۲۰$

فقط باید $۱<m^۲-۲<۶$ را حل کنیم:

$۱<m^۲-۲<۶ \xrightarrow{+۲} ۳<m^۲<۸$

$\Rightarrow \sqrt{۳}<|m|<۲\sqrt{۲} \xrightarrow[۲\sqrt{۲}\simeq ۲/۸]{\sqrt{۳}\simeq ۱/۷} \begin{cases} ۱/۷<m<۲/۸ \\ \text{یا} \\ -۲/۸<m<-۱/۷ \end{cases}$

پس m فقط دو مقدار صحیح ±۲ را می‌گیرد.

۱۲۵. گزینه ۴ زوج مرتب‌ها را از x کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

$(-۱,a+۱)\ ,\ (۱,۳a+۱)\ ,\ (۲,۴a+۳)$

در تابع صعودی، با افزایش xها، باید yها یا زیاد شوند یا ثابت بمانند:

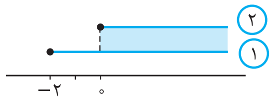
$\underbrace{a+۱\le ۳a+۱}_{(۱)}\le ۴a+۳$ ، $a+۱\le \overbrace{۳a+۱\le ۴a+۳}^{(۲)}$

نامعادلهٔ بالا به دو نامعادله تقسیم می‌شود:

$۱)\ a+۱\le ۳a+۱ \Rightarrow ۲a\ge ۰ \Rightarrow a\ge ۰$

$۲)\ ۳a+۱\le ۴a+۳ \Rightarrow a\ge -۲$

اشتراک می‌گیریم:



$۱ \cap ۲ = a\ge ۰$

۱۲۶. گزینه ۳ برای تشکیل $f+g$، اول دامنه‌اش را حساب می‌کنیم:

$D_{f+g}=D_f\cap D_g=\{-۳,۱,۵\}$

در xهای مشترک، مقدار $f+g$ را پیدا می‌کنیم:

$x=-۳: f(-۳)+g(-۳)=m+۱۲$

$x=۱: f(۱)+g(۱)=(m^۲-۱)+۱=m^۲$

$x=۵: f(۵)+g(۵)=-m+۲$

در تابع نزولی با افزایش xها، باید مقادیر y کم شوند یا ثابت بمانند:

$\underbrace{-m+۲\le m^۲}_{(۱)}\le m+۱۲$ ، $-m+۲\le \overbrace{m^۲\le m+۱۲}^{(۲)}$

دو نامعادله را حل می‌کنیم:

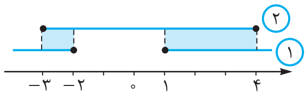
$۱)\ m^۲\ge -m+۲ \Rightarrow m^۲+m-۲\ge ۰$

$\Rightarrow (m+۲)(m-۱)\ge ۰ \xrightarrow[\text{ریشه‌ها}]{\text{نابین}} m\ge ۱$ یا $m\le -۲$

$۲)\ m^۲\le m+۱۲ \Rightarrow m^۲-m-۱۲\le ۰$

$\Rightarrow (m-۴)(m+۳)\le ۰ \xrightarrow{\text{بین}} -۳\le m\le ۴$

اشتراک می‌گیریم:



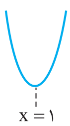
$۱\cap ۲=[-۳,-۲]\cup[۱,۴]$

$\xrightarrow{\text{اعداد صحیح}} \{-۳,-۲,۱,۲,۳,۴\} \Rightarrow$ ۶ مقدار

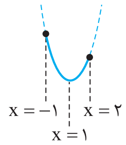
۱۲۷. گزینه ۲ طول رأس سهمی $f(x)=۳x^۲-۶x+۲$ مهم است:

$x_S=\dfrac{-b}{۲a}=\dfrac{۶}{۶}=۱$

دهانه هم که رو به بالاست. پس شکلش این‌جوری است:



بازهٔ $[-۱,۲]$ را روی سهمی مشخص می‌کنیم:



قسمت باقی‌مانده، ابتدا نزولی و سپس صعودی است.

۱۲۸. گزینه ۴ دامنهٔ تابع از حل نامعادلهٔ $|x-۱|<۲$ به دست می‌آید:

$|x-۱|<۲ \Rightarrow -۲<x-۱<۲ \xrightarrow{+۱} -۱<x<۳$

ریشه‌های سهمی $f(x)=x^۲-۲x-۳$ را حساب می‌کنیم:

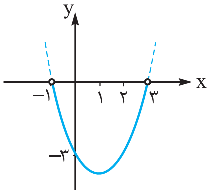
$(x-۳)(x+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۳ \\ x=-۱ \end{cases}$

طول رأس هم میانگین ریشه‌هاست:

$x_S=\dfrac{۳+(-۱)}{۲}=۱$

$y_S=f(۱)=-۴$

سهمی را رسم می‌کنیم:

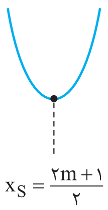


در دامنهٔ داده‌شده، سهمی غیریکنوا است و چون زیر محور xهاست، پس مقادیرش منفی است.

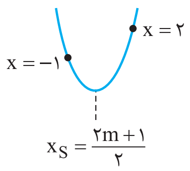
۱۲۹. گزینه ۴ طول رأس سهمی برابر است با:

$x_S=\dfrac{-b}{۲a}=\dfrac{۲m+۱}{۲}$

ضریب $x^۲$ مثبت است، پس دهانهٔ سهمی رو به بالاست:



برای آن‌که سهمی در بازهٔ $[-۱,۲]$ غیریکنوا باشد، باید x_S در این بازه قرار گیرد:



پس: $-۱<x_S<۲ \Rightarrow -۱<\dfrac{۲m+۱}{۲}<۲$

$\xrightarrow{\times ۲} -۲<۲m+۱<۴ \xrightarrow{-۱} -۳<۲m<۳$

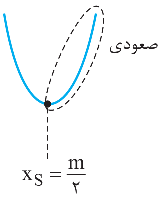
$\xrightarrow{\div ۲} \dfrac{-۳}{۲}<m<\dfrac{۳}{۲}$

۱۳۰. گزینه ۲ اول طول رأس سهمی $y=(\frac{۱}{m})x^۲-x+۳$ را پیدا می‌کنیم:

$x_S=\dfrac{-b}{۲a}=\dfrac{۱}{۲(\frac{۱}{m})}=\dfrac{m}{۲}$

چون علامت a را نداریم، باید در دو حالت بررسی کنیم:

۱) ضریب $x^۲$ یعنی $\frac{۱}{m}$ مثبت باشد $(m>۰)$. در این حالت سهمی این‌شکلی است:

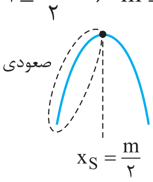


برای آن‌که در بازهٔ $[۱,+\infty)$ صعودی باشد باید ۱ یا روی رأس باشد یا بعد از رأس، پس:

$۱\ge \dfrac{m}{۲} \Rightarrow m\le ۲$

از اشتراک دو شرط $m>۰$ و $m\le ۲$ به $۰<m\le ۲$ می‌رسیم.

۲) ضریب $x^۲$ یعنی $\frac{۱}{m}$ منفی باشد $(m<۰)$. در این حالت سهمی این‌شکلی است:



که با کمی دقت متوجه می‌شویم که امکان ندارد تابع در بازهٔ $[1,+\infty)$ صعودی باشد، چون تابع در بازهٔ $[\frac{m}{2},+\infty)$ نزولی است، $\frac{m}{2}$ هر چه که باشد باز هم امکان ندارد که با $[1,+\infty)$ اشتراکی پیدا نکند! پس این حالت کلاً اتفاق نمی‌افتد.

حالا بین جواب‌های دو حالت، اجتماع می‌گیریم: $(1)\cup(2)=(0,2]\cup\varnothing=(0,2]$

۱۳۱. گزینه ۲ ضابطهٔ سهمی را با داشتن ریشه‌هایش می‌نویسیم:

$y=a(x-6)(x+2)$

سهمی رسم‌شده از نقطهٔ $(0,6)$ می‌گذرد، پس: $6=a(-6)(2) \Rightarrow a=\frac{-1}{2}$

در نتیجه ضابطهٔ سهمی به این شکل می‌شود:

$f(x)=\frac{-1}{2}(x-6)(x+2)=\frac{-1}{2}x^2+2x+6$

حالا ضابطهٔ g را تشکیل می‌دهیم: $g(x)=kx^2+4(\frac{-1}{2}x^2+2x+6)$

$=kx^2-2x^2+8x+24=(k-2)x^2+8x+24$

می‌دانیم توابع درجه۲، یکنوا نیستند، پس برای آن‌که g یکنوا باشد باید ضریب x^2 صفر باشد: $k-2=0 \Rightarrow k=2$

۱۳۲. گزینه ۴ ریشهٔ مخرج را حساب می‌کنیم: $x-3=0 \Rightarrow x=3$

پس تابع در بازه‌های $(-\infty,3)$ و $(3,+\infty)$ یکنواست.

با توجه به بازهٔ یکنوایی $(-\infty,a)$، حداکثر a برابر ۳ است. (دقت کنید که چون $ad-bc=-7<0$، پس تابع روی هر کدام از بازه‌ها نزولی است.)

۱۳۳. گزینه ۱ ریشهٔ مخرج تابع $y=\frac{-1}{x-2}$ را پیدا می‌کنیم.

$x-2=0 \Rightarrow x=2$

پس تابع در بازه‌های $(-\infty,2)$ و $(2,+\infty)$ اکیداً یکنواست.

با توجه به بسته‌بودن انتهای بازهٔ $(-\infty,a]$، حداکثر مقدار صحیح a، عدد ۱ است نه ۲.

(دقت کنید که $ad-bc=1>0$، پس تابع در هر یک از بازه‌های $(-\infty,+\frac{d}{c}),(\frac{d}{c},+\infty)$ صعودی است.)

۱۳۴. گزینه ۱ $ad-bc$ باید مثبت باشد.

(۱) $y=\frac{x-1}{x+3} \Rightarrow ad-bc=3+1=4$ ✓

(۲) $y=\frac{2x-3}{x+1} \Rightarrow ad-bc=2+3=5$ ✓

(۳) $y=\frac{-x+1}{x+3} \Rightarrow ad-bc=-3-1=-4$ ✗

(۴) $y=\frac{2x+1}{x-1} \Rightarrow ad-bc=-2-1=-3$ ✗

در بین دو گزینهٔ باقی‌مانده باید چک کنیم، ریشهٔ مخرج تابع، داخل بازهٔ $(-2,+\infty)$ نباشد.

(۱) $y=\frac{x-1}{x+3} \xrightarrow{x=-3} -3\notin(-2,+\infty)$ ✗

(۲) $y=\frac{2x-3}{x+1} \xrightarrow{x=-1} -1\in(-2,+\infty)$ ✗

پس جواب، (۱) است.

۱۳۵. گزینه ۴ ریشهٔ مخرج را حساب می‌کنیم:

$2x-a=0 \Rightarrow x=\frac{a}{2}$

کافی است ریشهٔ مخرج در بازهٔ $(1,+\infty)$ نباشد، پس $\frac{a}{2}$ باید از ۱ کوچک‌تر یا مساوی باشد: $\frac{a}{2}\le 1 \Rightarrow a\le 2$

چون می‌خواهیم تابع اکیداً یکنوا باشد، پس تابع ما نباید تابع ثابت باشد.

برای آن‌که تابع $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ ثابت نباشد، باید شرط $ad-bc\neq 0$ را داشته باشد، پس در تابع $f(x)=\frac{x+1}{2x-a}$ باید:

$(1)(-a)-(1)(2)\neq 0 \Rightarrow -a-2\neq 0 \Rightarrow a\neq -2$

از دو شرط $a\le 2$ و $a\neq -2$ به مجموعهٔ $(-\infty,2]-\{-2\}$ می‌رسیم.

۱۳۶. گزینه ۳ از آن‌جایی که تابع هموگرافیک $f(x)=\frac{2x+b}{3x+d}$ در بازه‌های $(-2,+\infty)$ و $(-\infty,-2)$ یکنوا اکید است، نتیجه می‌گیریم عدد ۲-، ریشهٔ مخرج است: $3(-2)+d=0 \Rightarrow d=6$

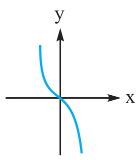
تا این‌جا ضابطهٔ f به شکل $f(x)=\frac{2x+b}{3x+6}$ درآمد. این تابع، محور xها را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع می‌کند:

$f(1)=0 \Rightarrow 2+b=0 \Rightarrow b=-2$

با جای‌گذاری $d=6$ و $b=-2$، یکنوایی گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

(۱) $y=6^{-x}=(\frac{1}{6})^x \xrightarrow{\text{نمایی با پایهٔ بین صفر و ۱}}$ نزولی اکید

(۲) $y=-2x^3 \xrightarrow{\text{نمودار}}$



$\rightarrow$ نزولی اکید

(۳) $y=6x-2|x|=\begin{cases}4x & x\ge 0\\ 8x & x<0\end{cases}$

چون شیب هر دو ضابطه مثبت شد و تابع ناپیوستگی ندارد، پس صعودی اکید است.

(۴) $y=-2x+6 \xrightarrow{\text{شیب‌منفی}}$ نزولی اکید

پس جواب (۳) است.

۱۳۷. گزینه ۴ چون f نزولی است، پس بعد از حذف f، جهت نامساوی عوض می‌شود: $f(2a-1)>f(5-a) \xrightarrow{\text{تغییرجهت}} 2a-1<5-a$

$\Rightarrow 3a<6 \Rightarrow a<2$

۱۳۸. گزینه ۳ برای دامنهٔ تابع رادیکالی g، باید زیرش را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار دهیم: $f(2x+1)-f(x-2)\ge 0 \Rightarrow f(2x+1)\ge f(x-2)$

حالا باید بگوییم چون f نزولی است، پس با حذف fها، جهت عوض می‌شود:

$f(2x+1)\ge f(x-2) \xrightarrow{\text{نزولی } f} 2x+1\le x-2 \Rightarrow x\le -3$

پس، $D_g=(-\infty,-3]$.

۱۳۹. گزینه ۱ $f(x)=\frac{-x+1}{x}$ یک تابع هموگرافیک است. $ad-bc$ را حساب می‌کنیم: $(-1)(0)-(1)(1)=-1$

ریشهٔ مخرج هم $x=0$ است.

پس این تابع در بازه‌های قبل و بعد ریشهٔ مخرج، اکیداً نزولی است.

با توجه به این‌که $1+x^4$ و $3+x^2$ هر دو بزرگ‌تر از صفر هستند، پس هر دو در شاخهٔ $(0,+\infty)$ قرار دارند. می‌خواهیم نمودار تابع $f(1+x^4)$ بالای نمودار $f(3+x^2)$ باشد: $f(1+x^4)>f(3+x^2)$

چون f اکیداً نزولی است (در شاخهٔ $(0,+\infty)$)، پس با حذف fها، جهت عوض می‌شود: $1+x^4<3+x^2 \Rightarrow x^4-x^2-2<0$

$\xrightarrow{\text{جمله‌مشترک}} (x^2-2)\underbrace{(x^2+1)}_{\text{همواره‌مثبت}}<0$

$\Rightarrow x^2-2<0 \Rightarrow x^2<2 \Rightarrow |x|<\sqrt{2} \Rightarrow -\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$

فقط بازهٔ $(-1,1)$، زیرمجموعهٔ بازهٔ $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ است.

۱۴۰. گزینه ۱ با توجه به ضابطهٔ $f(x)=-x^3+2$، می‌فهمیم f تابعی اکیداً نزولی است.

نامعادله را به شکل روبه‌رو می‌نویسیم: $f(f(x))>f(x^2)$

با حذف fها، جهت نامساوی عوض می‌شود: $f(x)<x^2$

حالا جای $f(x)$، ضابطه‌اش را می‌نویسیم:

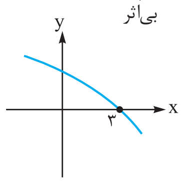
$-x^3+2<x^2 \Rightarrow x^3+x^2-2>0$

عبارت x^3+x^2-2 به ازای $x=1$ صفر می‌شود، پس بر $x-1$ بخش‌پذیر است. اگر x^3+x^2-2 را بر $x-1$ تقسیم کنیم، خارج قسمت x^2+2x+2 می‌شود، پس: $x^3+x^2-2>0 \Rightarrow (x-1)(x^2+2x+2)>0$

چون دلتای x^2+2x+2 منفی و ضریب x^2اش مثبت است، پس همواره مثبت است و می‌توانیم حذفش کنیم:

$(x-1)\underbrace{(x^2+2x+2)}_{\text{بی‌اثر}}>0 \Rightarrow x-1>0 \Rightarrow x>1$

۱۴۱. گزینه ۱ راه I برای f یک نمودار اکیداً نزولی که محور xها را در ۳ قطع کند، رسم می‌کنیم:



برای دامنهٔ تابع رادیکالی g، باید زیرش را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار دهیم: $xf(x)\ge 0$

برای رسم جدول تعیین علامت، ریشه‌های عبارت را پیدا می‌کنیم: $\underset{0}{x}\,\underset{3}{f(x)}\ge 0$

جدول می‌کشیم:

		۰		۳	
x	−		+		+
f(x)	+		+		−
کل	−		+		−
			جواب		

پس: $D_g=[0,3]$

راه II می‌توانیم برای f یک تابع مثال بزنیم. ساده‌ترین تابع، تابع خطی است پس $f(x)=-x+3$ را در نظر می‌گیریم (۳+ را برای این نوشتیم که تابع، محور xها را در نقطهٔ $x=3$ قطع کند). حالا دامنهٔ تابع $y=\sqrt{xf(x)}$ را پیدا می‌کنیم:

$y=\sqrt{x(-x+3)}$

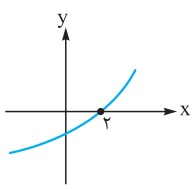
$x(-x+3)\ge 0$

$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}$

x	$-\infty$		۰		۳		$+\infty$
		−		+		−	

$\Rightarrow 0\le x\le 3$

۱۴۲. گزینه ۱ راه I برای f یک نمودار اکیداً صعودی که محور xها را در ۲ قطع کند، رسم می‌کنیم:



برای دامنهٔ تابع رادیکالی $g(x)=\sqrt{(x^2-x)f(x)}$، باید زیرش را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار دهیم:

$(x^2-x)f(x)\ge 0 \Rightarrow \underset{0}{x}\underset{1}{(x-1)}\,\underset{2}{f(x)}\ge 0$

جدول تعیین علامت می‌کشیم:

x		۰		۱		۲	
f(x)	−		−		−		+
(x^2-x)	+		−		+		+
کل	−		+		−		+
			جواب				جواب

پس: $D_g=[0,1]\cup[2,+\infty)$ و دامنهٔ g شامل تمام اعداد طبیعی می‌باشد.

راه II می‌توانیم برای f یک تابع ساده (مثلاً خطی) مثال بزنیم که اکیداً صعودی باشد و محور طول‌ها را در نقطهٔ $x=2$ قطع کند یعنی $f(x)=x-2$، حالا دامنهٔ تابع $y=\sqrt{(x^2-x)f(x)}$ را پیدا می‌کنیم:

$y=\sqrt{(x^2-x)(x-2)}=\sqrt{x(x-1)(x-2)}$

$x(x-1)(x-2)\ge 0$

حالا جدول تعیین علامت می‌کشیم:

x		۰		۱		۲	
	−		+		−		+
			جواب				جواب

پس: $D_g=[0,1]\cup[2,+\infty)$

۱۴۳. گزینه ۴ عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$f(\frac{1}{x})-f(x)\ge 0 \Rightarrow f(\frac{1}{x})\ge f(x)$

$f(x)=2^x$ تابعی اکیداً صعودی است، پس با حذف fها، علامت برنمی‌گردد:

$\frac{1}{x}\ge x$

نامعادلهٔ به دست آمده را حل می‌کنیم:

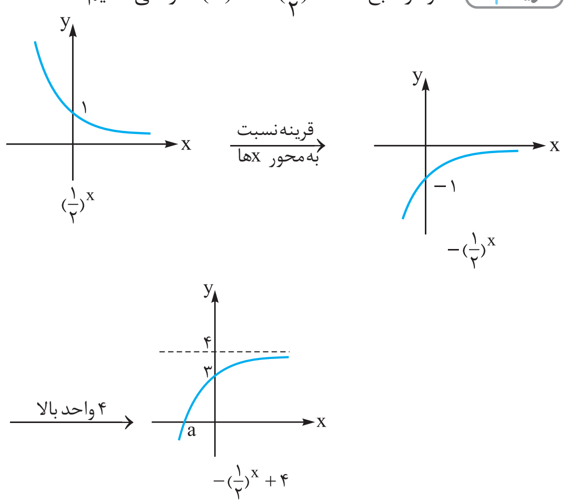
$\frac{1}{x}-x\ge 0 \Rightarrow \frac{1-x^2}{x}\ge 0 \Rightarrow \frac{(1-x)(1+x)}{x}\ge 0$

جدول تعیین علامت می‌کشیم:

x		−۱		۰		۱	
کل	+		−	ت‌ن	+		−
	جواب				جواب		

پس: $(-\infty,-1]\cup(0,1]$

۱۴۴. گزینه ۲ نمودار تابع $f(x)=-(\frac{1}{2})^x+4$ را می‌کشیم:



محل برخورد تابع نهایی با محور xها مهم است:

$-(\frac{1}{2})^x+4=0 \Rightarrow (\frac{1}{2})^x=4 \Rightarrow x=-2$

پس f تابعی اکیداً صعودی با ریشهٔ $x=-2$ است.

برای محاسبهٔ دامنهٔ تابع رادیکالی $g(x)=\sqrt{xf(x)}$، زیرش را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$\underset{0}{x}\,\underset{-2}{f(x)}\ge 0$

جدول تعیین علامت می‌کشیم:

		−۲		۰	
x	−		−		+
f(x)	−		+		+
کل	+		−		+
	جواب				جواب

پس: $D_g=(-\infty,-2]\cup[0,+\infty)=\mathbb{R}-(-2,0)$

۱۴۵. گزینهٔ ۲ همهٔ جملات را بررسی می‌کنیم:

الف) جمع تابع صعودی و نزولی، نامشخص است یعنی می‌تواند صعودی یا نزولی یا ثابت یا غیریکنوا شود. مثلاً اگر $f(x)=3x+1$ و $g(x)=-x-1$ باشد، آن وقت $(f+g)(x)=2x$ که تابعی صعودی است.

ب) جمع صعودی اکید و صعودی، تابعی صعودی اکید است.

پ) اگر g نزولی باشد، آن‌گاه $-g$ صعودی است، پس:

$$f-g=f+(-g)=\text{صعودی اکید}+(\text{صعودی})=\text{صعودی اکید}$$

ت) اگر f صعودی اکید و g تابعی ثابت باشد، fg می‌تواند صعودی اکید یا نزولی اکید یا ثابت باشد:

$$f(x)=x\,,\ g(x)=2 \Rightarrow (fg)(x)=2x \Rightarrow \text{صعودی اکید}$$
$$f(x)=x\,,\ g(x)=-2 \Rightarrow (fg)(x)=-2x \Rightarrow \text{نزولی اکید}$$
$$f(x)=x\,,\ g(x)=0 \Rightarrow (fg)(x)=0 \Rightarrow \text{ثابت}$$

پس دو جملهٔ (ب) و (پ) درست بودند.

۱۴۶. گزینهٔ ۲ با فرض $g(x)=-x^3$، جای $f(-x^3)$ می‌توانیم بنویسیم fog.

سؤال گفته f اکیداً نزولی است، از طرفی $g(x)=-x^3$ هم اکیداً نزولی است. با توجه به این‌که ضرب دو عدد منفی، عددی مثبت است: $(-)\times(-)\Rightarrow(+)$

پس: $\underbrace{f}_{\text{نزولی}}\ ,\ \underbrace{g}_{\text{نزولی}} \Rightarrow \underbrace{fog}_{\text{صعودی}}$

۱۴۷. گزینهٔ ۴ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

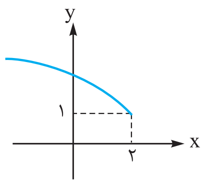
(۱) $f(x)+\sqrt{x}=\text{صعودی}+\text{صعودی}=\text{صعودی}$

(۲) $\underset{-}{g}\,o\,\underset{-}{g}(\underset{+}{x}) \Rightarrow (-)\times(-)\times(+)=(+)\Rightarrow$ صعودی

(۳) $g(\underbrace{x^2}_{\text{غیریکنوا}}) \Rightarrow (-)\times\text{نامشخص}\Rightarrow\text{نامشخص}$

(۴) $(\underset{+}{f}\,o\,\underset{-}{g}\,o\,\underset{+}{f})(\underset{+}{x}) \Rightarrow (+)\times(-)\times(+)\times(+)=-\Rightarrow$ نزولی

۱۴۸. گزینهٔ ۱ تابع $\sqrt{2-x}+1$ به صورت مقابل است:



این تابع، اکیداً نزولی است و مقادیرش تغییر علامت نمی‌دهند (چون بالای محور xهاست)، پس $\frac{1}{\sqrt{2-x}+1}$ تابعی اکیداً صعودی می‌شود.

۱۴۹. گزینهٔ ۲ برای f یک ضابطه در نظر می‌گیریم؛ مثلاً $y=-(2^x)$.

f نزولی اکید و زیر محور xهاست.

حالا دو ضابطه را تشکیل می‌دهیم و با مقایسهٔ مقادیر در $x=1$ و $x=2$، وضعیت یکنوایی را مشخص می‌کنیم (چون در گزینه‌ها غیریکنوا نداریم، مشکلی پیش نمی‌آید).

$$g(x)=-x.f(x)=x.2^x \Rightarrow \begin{cases}g(1)=2\\ g(2)=8\end{cases}\Rightarrow \text{اکیداً صعودی}$$

$$h(x)=\frac{1}{f(-x)}=\frac{1}{-2^{-x}}=\frac{1}{-(\frac{1}{2})^x}=-(2^x)\Rightarrow \text{اکیداً نزولی}$$

۱۵۰. گزینهٔ ۱ با توجه به نمودار، $f(x)$ تابعی اکیداً نزولی است، پس $-f(x)$ تابعی اکیداً صعودی است. از طرفی جمع دو تابع اکیداً صعودی، تابعی اکیداً صعودی است:

$$\underbrace{\underbrace{\sqrt{x}}_{\text{اکیداً صعودی}}+\underbrace{(-f(x))}_{\text{اکیداً صعودی}}}_{\text{اکید صعودی}}$$

برای به دست آوردن بُرد تابع اکیداً صعودی که ناپیوستگی ندارد، مقادیر تابع را در نقاط ابتدا و انتهای دامنه حساب می‌کنیم. دامنهٔ $\sqrt{x}$ بازهٔ $[0,+\infty)$ و دامنهٔ f، بازهٔ $(2,5)$ است که اشتراکشان $(2,5)$ می‌شود، پس:

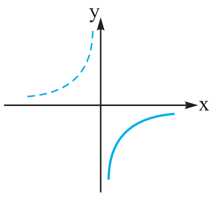
$$g(x)=\sqrt{x}-f(x)\xrightarrow{\text{برد}}\begin{cases}g(2)=\sqrt{2}-f(2)=\sqrt{2}-3\\ g(5)=\sqrt{5}-f(5)=\sqrt{5}+1\end{cases}$$

پس بردمان محدودهٔ $[\sqrt{2}-3,\sqrt{5}+1]$ است که تقریباً $[-1/6,3/2]$ می‌شود.

الان اگر براکت بگیریم، بردمان شامل $-2,-1,0,1,2,3$ می‌شود.

۱۵۱. گزینهٔ ۴ دقت کنید دامنه‌های هر دو تابع محدود است. هر دو تابع را بررسی می‌کنیم:

(۱) $f(x)=\frac{-1}{x}+\sqrt{x}$: دامنهٔ f بازهٔ $(0,+\infty)$ است.



نمودار $y=\frac{-1}{x}$ در این بازه به صورت روبه‌رو است:

پس:

$$f(x)=\underbrace{\frac{-1}{x}}_{\text{صعودی}}+\underbrace{\sqrt{x}}_{\text{صعودی}}\Rightarrow \text{صعودی}$$

(۲) $g(x)=|x|+\sqrt{-x}$: دامنهٔ g، بازهٔ $(-\infty,0]$ است.

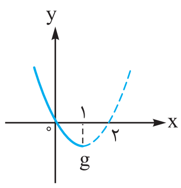
پس جای $|x|$ می‌توانیم $-x$ قرار دهیم:

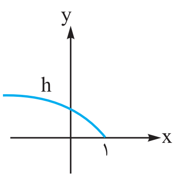
$$g(x)=\underbrace{-x}_{\text{نزولی}}+\underbrace{\sqrt{-x}}_{\text{نزولی}}\Rightarrow \text{نزولی}$$

۱۵۲. گزینهٔ ۲ تابع f را به صورت جمع دو تابع $g(x)=x^2-2x$ و $h(x)=\sqrt{1-x}$ می‌بینیم:

$$f(x)=\underbrace{x^2-2x}_{g(x)}+\underbrace{\sqrt{1-x}}_{h(x)}$$

دامنهٔ f، به صورت $(-\infty,1]$ است. نمودار g و h را با شرط $x\le 1$ رسم می‌کنیم:





هر دو تابع، اکیداً نزولی هستند. چون جمع دو تابع اکیداً نزولی، تابعی اکیداً نزولی است، پس f اکیداً نزولی است.

۱۵۳. گزینهٔ ۲ دامنهٔ تابع f را حساب می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{x}\Rightarrow x\ge 0\\ 2\sqrt[3]{x^2-1}\xrightarrow{\text{مخرج}} x\ne\pm1\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f=[0,1)\cup(1,+\infty)$$

در دو بازهٔ $[0,1)$ و $(1,+\infty)$، یکنوایی تابع را بررسی می‌کنیم.

(۱) تابع $y=2\sqrt{x}$ در هر دو بازهٔ بالا صعودی اکید است.

(۲) تابع $y=\frac{-3}{2\sqrt[3]{x^2-1}}$ را مرحله‌به‌مرحله بررسی می‌کنیم:

$$y=x^2-1\ \text{صعودی اکید}\xrightarrow{\sqrt[3]{\ }} y=\sqrt[3]{x^2-1}\ \text{صعودی اکید}$$

$$\xrightarrow{\text{معکوس}} y=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}\ \text{نزولی اکید}\xrightarrow{\times-\frac{3}{2}}$$

$$y=\frac{-3}{2\sqrt[3]{x^2-1}}\ \text{صعودی اکید}$$

از طرفی می‌دانیم مجموع دو تابع صعودی اکید، تابعی صعودی اکید است، پس تابع $f(x)$ صعودی اکید است.

$$f(x)=\underbrace{2\sqrt{x}}_{\text{صعودی اکید}}+\underbrace{\frac{-3}{2\sqrt[3]{x^2-1}}}_{\text{صعودی اکید}}$$

۱۵۴. **گزینه ۲** در تابع $f(x)=۲x+۱+\sqrt{x-۱}$ عامل $۲x+۱$ صعودی اکید و $\sqrt{x-۱}$ هم صعودی اکید است. پس f هم صعودی اکید است؛ بنابراین برای پیداکردن برد می‌توانیم نقاط ابتدا و انتهای دامنه را در تابع قرار دهیم. دامنهٔ تابع f برابر است با بازهٔ $[۱,+\infty)$، پس بردش می‌شود:

$$x=۱ \Rightarrow f(۱)=۲+۱+\sqrt{۰}=۳ \Rightarrow f\geq ۳$$

$$\Rightarrow R_f=[۳,+\infty)$$

پس برد تابع f شامل اعداد طبیعی ۱ و ۲ یعنی دو عدد طبیعی نیست.

۱۵۵. **گزینه ۲** تابع f از جمع دو عبارت اکیداً صعودی تشکیل شده، پس خودش هم اکیداً صعودی است:

$$f(x)=\underbrace{\underbrace{۲\sqrt{۲+x}}_{\text{اکیداً صعودی}}+\underbrace{(-\sqrt{-x+۷})}_{\text{اکیداً صعودی}}}_{\text{اکیداً صعودی}}$$

تابع f، دو عبارت رادیکالی دارد، دامنه‌اش را حساب می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{۲+x}\xrightarrow{\text{دامنه}} x\geq -۲\\ \sqrt{۷-x}\xrightarrow{\text{دامنه}} x\leq ۷\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f=[-۲,۷]$$

چون f اکیداً صعودی (و پیوسته) است، پس برای محاسبهٔ برد باید مقدارش را در $x=-۲$ و $x=۷$ حساب کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}f(-۲)=۲\sqrt{۰}-\sqrt{۹}=-۳\\ f(۷)=۲\sqrt{۹}-\sqrt{۰}=۶\end{array}\right\}\Rightarrow R_f=[\underset{a}{\underset{\downarrow}{-۳}},\underset{b}{\underset{\downarrow}{۶}}]$$

پس: $b-a=۶-(-۳)=۹$

۱۵۶. **گزینه ۲** توابع $-x^۳$ و $\sqrt{-x}+۱$ هر دو اکیداً نزولی هستند، پس مجموعشان هم اکیداً نزولی است:

$$f(x)=\underbrace{\underbrace{-x^۳}_{\text{اکیداً نزولی}}+\underbrace{(\sqrt{-x}+۱)}_{\text{اکیداً نزولی}}}_{\text{اکیداً نزولی}}$$

چون f اکیداً نزولی (و پیوسته) است، پس برای محاسبهٔ برد باید مقدارش را در نقاط ابتدا و انتهای دامنه یعنی $x=-۴$ و $x=-۱$ حساب کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}f(\overset{\text{بسته}}{\overset{\uparrow}{-۴}})=-(-۴)^۳+\sqrt{۴}+۱=\overset{\text{بسته}}{\overset{\uparrow}{۶۷}}\\ f(\underset{\text{باز}}{\underset{\downarrow}{-۱}})=-(-۱)^۳+\sqrt{۱}+۱=\underset{\text{باز}}{\underset{\downarrow}{۳}}\end{array}\right\}\Rightarrow R_f=(\underset{a}{\underset{\downarrow}{۳}},\underset{b}{\underset{\downarrow}{۶۷}}]$$

پس: $b-a=۶۷-۳=۶۴$

۱۵۷. **گزینه ۴** ضابطهٔ f را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x)=۲^{\sqrt[۳]{۹\cos^۲ x-۱}}-۲^{-\sqrt[۳]{۹\cos^۲ x-۱}}$$

توان منفی را اثر می‌دهیم:

$$f(x)=۲^{\sqrt[۳]{۹\cos^۲ x-۱}}-\frac{۱}{۲^{\sqrt[۳]{۹\cos^۲ x-۱}}}$$

محدودهٔ تغییرات عبارت $\sqrt[۳]{۹\cos^۲ x-۱}$ را پیدا می‌کنیم:

$$-۱\leq \cos x\leq ۱\xrightarrow{\text{توان ۲}}۰\leq \cos^۲ x\leq ۱$$

$$\xrightarrow{\times ۹}۰\leq ۹\cos^۲ x\leq ۹\xrightarrow{-۱}-۱\leq ۹\cos^۲ x-۱\leq ۸$$

$$\xrightarrow{\text{فرجه ۳}}-۱\leq \sqrt[۳]{۹\cos^۲ x-۱}\leq ۲$$

با فرض $A=\sqrt[۳]{۹\cos^۲ x-۱}$، می‌دانیم: $-۱\leq A\leq ۲$.

توابع $y=۲^A$ و $y=-\frac{۱}{۲^A}$، توابعی صعودی و پیوسته هستند، پس مجموعشان $y=۲^A+\frac{-۱}{۲^A}$ نیز صعودی و پیوسته است:

برای به دست آوردن برد این تابع، کافی است مقدار تابع را در نقطهٔ ابتدا و انتهای دامنه به دست آوریم:

$$\left.\begin{array}{l}\text{ابتدای دامنه}: A=-۱\Rightarrow y=۲^{-۱}+\frac{-۱}{۲^{-۱}}=\frac{۱}{۲}-۲=-\frac{۳}{۲}\\ \text{انتهای دامنه}: A=۲\Rightarrow y=۲^۲+\frac{-۱}{۲^۲}=۴-\frac{۱}{۴}=\frac{۱۵}{۴}\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \text{برد}=[-\frac{۳}{۲},\frac{۱۵}{۴}]$$

پس: $b-a=\frac{۱۵}{۴}-(-\frac{۳}{۲})=\frac{۲۱}{۴}$

۱۵۸. **گزینه ۱** تابع $y=x$ و $y=\sqrt{x}$ توابعی اکیداً صعودی هستند، پس مجموعشان هم اکیداً صعودی و در نتیجه یک‌به‌یک است.