مقدمهٔ ناشر

آقای لئوناردو فیبوناچی یه ریاضی‌دان قرون وسطائیه. وقتی بچه بود «بیگالونه» صداش می‌کردن (بیگالونه یعنی کله‌پوک و احمق). همین جناب بیگالونه، شد ریاضی‌دان بزرگ و یک دنباله کشف کرد که ما الان بهش می‌گیم دنبالهٔ فیبوناچی:

$$1,1,2,3,5,8,13,\ldots$$

در این دنباله، جمع هر دو جملهٔ متوالی می‌شه جملهٔ بعدی و دیگه این‌که به غیر از چندتا جملهٔ اول، نسبت جملهٔ nاُم به جملهٔ $n-1$اُم با تقریب خوبی برابر با $\Phi = 1/62$ می‌شه. این نسبت معروف به «تناسب الهی» یا «تناسب طلائیه». خُب همهٔ اینا درست! آخرش که چی؟

جالبی داستان اینه که، دنبالهٔ آقای بیگالونه و نسبت طلائیش یکی از کُدها و رمزهای طبیعته. مثلاً در موجودات زنده رشد سریع‌تر بافت‌های داخلی نسبت به بافت‌های خارجی باعث شکل‌گرفتن انحناها و پیچ‌وتاب‌هایی می‌شه که منطبق با تناسب طلائیه: تراشه‌های چوب درخت چنار، میوهٔ کاج، چنگال‌های گربه‌سانان، حلزون گوش میانی، دندان‌های نیش ببر و حتی انحنای ظریف و شاعرانهٔ لب معشوق!

فکر کنم این جمله از گالیله‌ست که: «قوانین طبیعت به زبان ریاضی نوشته شده» حتی نسبت طول به عرض منحنی‌های سینوسی مولکول‌های RNA و DNA هم برابر نسبت طلائیه؛ یعنی ما چه بخوایم چه نخوایم ریاضی تو وجودمونه، فقط باید بیگالونه باشیم و کشف کنیم. حتماً خوندن این کتاب ریاضی‌دان درون شما رو بیدار می‌کنه.

بی‌هیچ ترتیب و آدابی از رفقای خوبم سروش، کوروش و رسول ممنونم واقعاً که کتاب خوبی نوشتین و مطمئنم هر کی بخونه کیف می‌کنه.

مرسی از همهٔ دوستای خیلی‌سبزی که برای کتاب‌شدن این کتاب زحمت کشیدن به ویژه آقای محسن فراهانی و خانم مریم نظری که زحمت از صفر تا صد این پروژه روی دوششون بود و بروبچه‌های تولید و ویراستاری خوبمون. هم‌چنین از آقای علیرضا محمدی و خانم آرزو کامیار سپاسگزارم.

شاد باشید و خوشحال درس بخونید.

مقدمهٔ مؤلفان

سلام

به کلاس دهم و متوسطهٔ دوم خوش آمدید.

سه سال دیگر باید در دبیرستان درس بخوانید تا برای چالش‌های بزرگ‌تر و جذاب‌تر زندگی آماده‌تر شوید. ریاضیات سال دهم یا همان ریاضی (۱)، کتاب خیلی مهمی است و شما هم که به چیزهای مهم علاقه‌مندید و قرار است با کتاب تست ریاضی دهم خیلی‌سبز، ریاضی‌تان را قوی‌تر کنید. هر چه‌قدر که در سال‌های دهم و یازدهم درس بخوانید، تست بزنید و زحمت بکشید جای دوری نمی‌رود؛ این سال‌ها مثل پس‌انداز هستند.

کتاب دهم هفت فصل دارد: در فصل اول سه مطلب جدا از هم به نام‌های مجموعه، الگو و دنباله دارید. با مجموعه از دورهٔ متوسطهٔ اول آشنا هستید، الگو و دنباله مطالب جدید و نسبتاً ساده‌ای هستند. کل مطالب این فصل در همین سال به پایان می‌رسد و سال‌های بعد کاری با آن‌ها ندارید.

در فصل دوم با مطلب جدیدی به نام مثلثات آشنا می‌شوید که بسیار مهم است و در سال یازدهم و دوازدهم نیز حضور دارد. مثلثات را با علاقه و آینده‌نگری، خووووب یاد بگیرید.

در فصل سوم مفاهیم توان و ریشه را از سال نهم می‌شناسید. با اتحادها هم یک آشنایی مختصر دارید که امسال تکمیل می‌شود. آخر این فصل، تجزیه و عبارت‌های گویا منتظرتان هستند.

فصل چهارم مهم است، خیلی مهم! معادلهٔ درجه‌دوم و نمودار سهمی و تعیین علامت و نامعادله، در سال‌های بعد و مبحث‌های دیگر هم به کارتان می‌آید. این فصل را هم با عشق بخوانید و خیلی تمرین حل کنید. مرررسی.

در فصل پنجم صحبت از مفهوم تابع است. تابع در سال یازدهم و دوازدهم هم هست و هر سال کامل‌تر و مهم‌تر می‌شود. توصیه می‌کنیم از همین اول کار با تابع دوست شوید.

در فصل‌های ششم و هفتم، فضای درس کمی عوض می‌شود. بحث شمارش و احتمال شبیه هم هستند. صحبت از سکه، تاس، انتخاب، چیدن افراد، اشیا، عددسازی، کلمه‌سازی و این‌ها است. یادتان هست که در سال‌های هفتم و هشتم، احتمال داشتید و در اینجا همان مطالب را دوره می‌کنید و بیشتر یاد می‌گیرید. این فصل مهم، مثل تابع و مثلثات، احتمال هم در سال‌های یازدهم و دوازدهم مهمان شما است. میزبان خوبی باشید!

آخر فصل هفتم، کتاب درسی چند صفحه از آمار و انواع متغیرها گفته است که ادامه‌اش را در سال یازدهم می‌بینید.

اگر داوطلب رشتهٔ ریاضی هستید که باید ریاضی را عاشقانه بخوانید. اگر تجربی هستید هم از الان خبر داشته باشید که کسب نمرات بالا در ریاضی امتحان نهایی و کنکور، برای رسیدن به اهدافتان خیلی‌خیلی مفید است. پس همه با صدای بلند: ریاضی را می‌خوانیم و تمرین می‌کنیم و تست می‌زنیم. ساختار این کتاب به ترتیب درس‌نامه، تست و پاسخ است. در درس‌نامه مثال‌های کافی شما را گرم می‌کنند تا برای حل تست‌ها آماده بشوید. در تست‌های هر فصل، چند سؤال با لوگوی آمده‌اند که از تست‌های عادی دشوارترند. اگر نتوانستید آن‌ها را به راحتی حل کنید، نگران نباشید ولی سعی کنید از راه‌حل‌ها ایده بگیرید. توصیه می‌کنیم حل تمام تست‌ها را بخوانید، چرا؟ خب شاید روش بهتر یا نکتهٔ ریزی داشته باشد که به دردتان بخورد. کتاب درسی دهم اولین بار در سال تحصیلی ۱۳۹۵ وارد نظام آموزشی ایران شد. کتاب تست خیلی‌سبز نسبت به چاپ اولش، تغییرات زیادی داشته و کتابی که الان دست شماست، کاملاً بازنویسی شده است. تلاش زیادی کرده‌ایم که درس‌نامه‌های پرمثال، تست‌های کافی و متنوع و پاسخ‌های تشریحی گویا، به شما بیش از پیش کمک کنند. در مسیر تألیف کتاب از راهنمایی و نظرات همکاران بسیاری بهره بردیم. در این میان تشکر از آقایان مصطفی کرمی، مقداد حسن‌زاده و احسان سجادیان ضروری است که تجربه‌های خود را با ما در میان گذاشتند.

بالأخره تشکرهای درون‌انتشاراتی ...

سپاس از دو دکتر نصری، که در خیلی‌سبز، خیلی‌خیلی سبز هستند. تشکر ویژه از دکتر کمیل که مدیریت کار تألیف را بر عهده داشتند. سپاس ویژه از آقای محسن فراهانی و خانم مریم نظری که امور هماهنگی و پیگیری را صبورانه انجام دادند. تشکر از تیم تایپ و رسم شکل و صفحه‌آرایی و گرافیک و ... که در امور اجرایی همراه این کتاب بودند. ویراستاران چاپ جدید کتاب آقایان محسن فراهانی، آرین توسل، علیرضا محمدی و خانم‌ها زهرا جالینوسی، شقایق راهبریان، آرزو کامیار، مریم نظری و اکرم امیدی زحمت کنترل محاسبات و سؤال و پاسخ و شکل و همه‌چیز را به نحو احسن کشیدند. طرح جلد و نظارت چاپ و پخش و امور مالی و اداری دست به دست هم دادند تا کتاب به موقع و زیبنده، به دستتان برسد. ممنون از همه. خدا قوت ...

@mathmohsenimanesh

@soroushmueeni

فهرست

فصل ۱ مجموعه، الگو و دنباله

درس ۱: یادآوری مجموعه‌ها ۷
درس ۲: مجموعه‌های مهم اعداد ـ بازه ۱۰
درس ۳: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی ۱۵
درس ۴: مجموعهٔ مرجع و متمم ۱۸
درس ۵: تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه ۲۱
درس ۶: الگوی خطی ۲۵
درس ۷: الگوی درجه‌دوم ۲۸
درس ۸: دنباله و سایر الگوها ۳۳
درس ۹: دنبالهٔ حسابی (تصاعد حسابی یا تصاعد عددی) ۳۷
درس ۱۰: دنبالهٔ هندسی ۴۵
آزمون ۵۴
پاسخ‌نامهٔ تشریحی ۵۵
پاسخ‌نامهٔ آزمون ۸۲

فصل ۲ مثلثات

درس ۱: نسبت‌های مثلثاتی ۸۴
درس ۲: دایرهٔ مثلثاتی ۹۷
درس ۳: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی ۱۰۷
آزمون ۱۱۶
پاسخ‌نامهٔ تشریحی ۱۱۷
پاسخ‌نامهٔ آزمون ۱۳۶

فصل ۳ توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

درس ۱: ریشه و توان ۱۳۸
درس ۲: ریشهٔ nام ۱۴۳
درس ۳: توان‌های گویا ۱۴۸
درس ۴: اتحادها و تجزیه ۱۵۲
درس ۵: عبارت‌های گویا /گویاکردن مخرج‌های گنگ ۱۶۳
آزمون ۱۷۱
پاسخ‌نامهٔ تشریحی ۱۷۲
پاسخ‌نامهٔ آزمون ۱۹۵

فصل ۴ معادله‌ها و نامعادله‌ها

درس ۱: معادلهٔ درجه‌دوم و روش‌های مختلف حل آن ۱۹۷
درس ۲: سهمی ۲۰۵
درس ۳: تعیین علامت ۲۱۸
آزمون ۲۳۵
پاسخ‌نامهٔ تشریحی ۲۳۶
پاسخ‌نامهٔ آزمون ۲۶۱

فصل ۵ تابع

درس ۱: مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن ۲۶۳
درس ۲: دامنه و برد ۲۶۹
درس ۳: مقدار تابع و نمایش ریاضی تابع ۲۷۴
درس ۴: تابع خطی ۲۸۱
درس ۵: انواع تابع ۲۸۷
درس ۶: رسم نمودار برخی توابع به کمک انتقال ۳۰۰
آزمون ۳۱۱
پاسخ‌نامهٔ تشریحی ۳۱۲
پاسخ‌نامهٔ آزمون ۳۳۶

فصل ۶ شمارش، بدون شمردن

درس ۱: شمارش ۳۳۸
درس ۲: جایگشت ۳۴۵
درس ۳: ترکیب ۳۵۲
آزمون ۳۶۱
پاسخ‌نامهٔ تشریحی ۳۶۲
پاسخ‌نامهٔ آزمون ۳۷۲

فصل ۷ آمار و احتمال

درس ۱: احتمال یا اندازه‌گیری شانس ۳۷۴
درس ۲: مقدمه‌ای بر علم آمار، جامعه و نمونه ۳۹۵
آزمون ۳۹۸
پاسخ‌نامهٔ تشریحی ۳۹۹
پاسخ‌نامهٔ آزمون ۴۱۱

پاسخ‌نامهٔ کلیدی ۴۱۳

(فصل ۱)
مجموعه، الگو و دنباله

(درس ۱)
یادآوری مجموعه‌ها

مجموعه، دسته‌ای از اشیا است که خوب مشخص شده باشند؛ یعنی دقیقاً معلوم باشد کدام عضوها در مجموعه هستند و کدام عضوها نیستند. پس مثلاً مجموعهٔ «شاعران معروف ایرانی» یا «گل‌های خوشبو» از نظر ریاضی مجموعه نیستند. اما مجموعهٔ اعداد اول یک‌رقمی یک مجموعه است که آن را به صورت $A=\{2,3,5,7\}$ نشان می‌دهیم.

گاهی اوقات این مجموعه را به صورت نمودار وِن شکل مقابل هم نشان می‌دهیم:

A نام مجموعه است. می‌نویسیم $2\in A$ یعنی ۲ عضو مجموعهٔ A است و $6\notin A$ یعنی عدد ۶ عضو مجموعهٔ A نیست.

در مجموعه‌ها عضوهای تکراری را یک بار می‌نویسیم و ترتیب اعضا اهمیتی ندارد؛ پس مثلاً $\{1,1,1,2,2\}$ همان $\{2,1\}$ است.

اگر تمام عضوهای مجموعهٔ A در مجموعهٔ B هم باشند، می‌نویسیم $A\subseteq B$ و می‌خوانیم «A زیرمجموعهٔ B است.» مثلاً $\{1,2,3\}\subseteq\{1,2,0,3,4\}$.

دقت کنید که $\{1,2,3\}\not\subseteq\{2,3,5\}$، چون عضو ۱ در مجموعهٔ اول هست اما در دومی نیست.

مجموعه‌ای که هیچ عضوی ندارد را $\varnothing$ یا $\{\}$ یا تهی می‌نامیم. مثلاً مجموعهٔ اعداد اول دورقمی که یکان آن‌ها ۵ باشد، تهی است چون چنین عددی وجود ندارد. حواستان هست که $\{\varnothing\}$ تهی نیست، یک مجموعهٔ ۱عضوی است!

تست اگر $A=\{1,2,\{1\}\}$ و $B=\{1\}$ چندتا از روابط $A\subseteq A$، $\varnothing\subseteq B$، $B\in A$، $B\subseteq A$ و $2\in A$ درست هستند؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ کزینه خوب گوش کنید... $A\subseteq A$ همواره درست است؛ هر مجموعه زیرمجموعهٔ خودش است.

$\varnothing\subseteq B$ نیز همیشه درست است؛ $\varnothing$ زیرمجموعهٔ تمام مجموعه‌ها است.

$B\in A$ درست است؛ چون $B=\{1\}$ را به صورت عضو در مجموعهٔ A می‌بینیم:

$A=\{1,2,\underline{\{1\}}\}$ ← این B است.

$B\subseteq A$ نیز درست است؛ چون عضو B یعنی عدد ۱، در A هم هست:

$A=\{1,2,\{1\}\}$ ← عضو B در A هم هست.

و بالأخره رابطهٔ $2\in A$ درست است؛ چون عضو ۲ را در A داریم، پس ۵ رابطه درست‌اند.

تا این‌جا هستید ببینید که $\varnothing\in B$، $\{1\}\in B$ و $2\in B$، هیچ‌کدام درست نیستند.

اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها

۱) اشتراک A و B مجموعهٔ اعضایی است که در هر دوی آن‌ها باشند. اشتراک دو مجموعهٔ A و B را با $A\cap B$ نشان می‌دادیم. پس مثلاً:

$\{1,2,3\}\cap\{4,5,6\}=\varnothing$ $\quad$ $\{1,2,3\}\cap\{0,1,3,4,5\}=\{1,3\}$

در ذهن داشته باشید که: $A\cap A=A$, $A\cap\varnothing=\varnothing$

این را هم حتماً به یاد دارید: $A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A$

یعنی اگر A زیرمجموعهٔ B باشد، اشتراکشان می‌شود A.

اگر A و B عضو مشترکی نداشته باشند، یعنی $A\cap B=\varnothing$، می‌گوییم A و B جدا از هم یا ناسازگارند.

۲) اجتماع A و B مجموعهٔ اعضایی است که در A یا در B یا در هر دوی آن‌ها باشند.

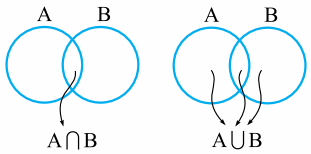
می‌گوییم اعضایی که در حداقل یکی از آن‌ها هستند. ببینید: (عضو تکراری را یک بار می‌نویسیم.) $\{1,2,3\}\cup\{0,2,5\}=\{1,2,3,0,5\}$

$\{2,4\}\cup\{-1,3\}=\{-1,2,3,4\}$

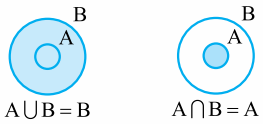
لازم به تأکید هست که: $A\cup\varnothing=A$, $A\cup A=A$

و هم‌چنین اگر $A\subseteq B$ باشد، داریم: $A\cup B=B$

نمودار ون را ببینید:



در حالتی که $A \subseteq B$ است، نمودارهای اجتماع و اشتراک را ببینید:

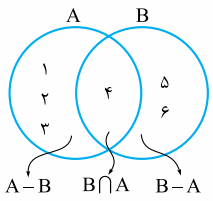


۳ تفاضل دو مجموعهٔ A و B به صورت $A-B$ یعنی مجموعهٔ عضوهایی از A که در B نیستند. از آن طرف $B-A$ یعنی مجموعهٔ عضوهایی از B که در A نیستند.

پس مثلاً با دو مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $B=\{۴,۵,۶\}$ داریم:

$$B-A=\{۴,۵,۶\}-\{۱,۲,۳,۴\}=\{۵,۶\}$$

$$A-B=\{۱,۲,۳,۴\}-\{۴,۵,۶\}=\{۱,۲,۳\}$$



نمودار ون خیلی خوب‌تر است:

موافقید که $A-B$ و $B-A$ مساوی نیستند، مگر این‌که خود A و B مساوی باشند.

در مورد این‌ها نظرتان چیست؟

$$A-A=\varnothing \ , \ A-\varnothing=A$$

$$\varnothing-A=\varnothing$$

$$A\subseteq B \Leftrightarrow A-B=\varnothing$$

$$A\cap B=\varnothing \Leftrightarrow A-B=A \ , \ B-A=B$$

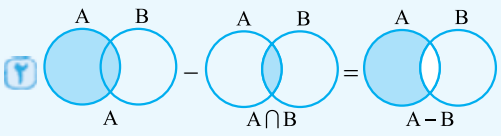
اگر $A \subseteq B$ باشد، $A-B$ می‌شود $\varnothing$. به زبان ریاضی:

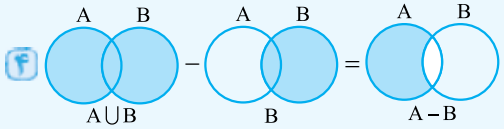
اگر B و A اشتراک نداشته باشند، $A-B$ می‌شود A. این‌طوری:

تست کدام با بقیه فرق دارد؟

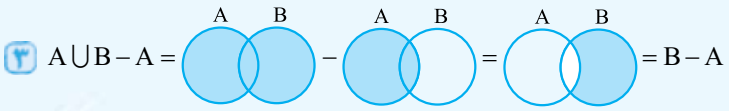
۱) $A-B$ ۲) $A-(A\cap B)$ ۳) $(A\cup B)-A$ ۴) $(A\cup B)-B$

پاسخ گزینهٔ ۳ نمودار ون را برای ۲ و ۴ ببینید:





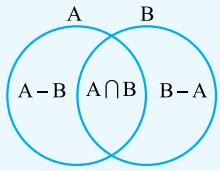
پس ۱، ۲ و ۴ همگی $A-B$ هستند، اما ۳ فرق دارد:



تست کدام نادرست است؟

۱) $A-B\subseteq A$ ۲) $A-B\subseteq B-A$ ۳) $A\subseteq A\cup B$ ۴) $A\cap B\subseteq B$

پاسخ گزینهٔ ۲ یک بار دیگر نمودار ون را ببینید:



داریم:

$$(A-B)\subseteq A \ , \ (A\cap B)\subseteq A \ , \ (A\cap B)\subseteq B$$

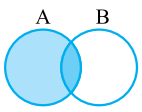
$$A\subseteq A\cup B \ , \ B\subseteq A\cup B$$

و البته هر سه مجموعهٔ $A-B$، $B-A$ و $A\cap B$، زیرمجموعهٔ $A\cup B$ هستند.

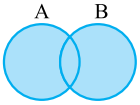
با نگاهی به نمودار ون، درستی رابطه‌های زیر را تأیید کنید.

$$A\cup(A\cap B)=A\cap(A\cup B)=A$$

$$(A\cap B)\cup(A-B)=A$$



$$(A-B)\cup B=A\cup B$$

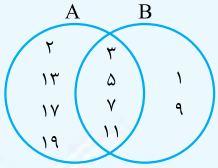


تست اگر A مجموعهٔ اعداد اول کم‌تر از ۲۰ و B مجموعهٔ اعداد فرد کم‌تر از ۱۲ باشد، $(A-B)\cup(B-A)$ چندعضوی است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

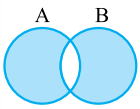
پاسخ کزینه در A عضوهای ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷ و ۱۹ و در B اعضای ۱، ۳، ۵، ۷، ۹ و ۱۱ را داریم.

نمودار را ببینید:



پس $A-B$ چهار عضو و $B-A$ دو عضو و اجتماع آن‌ها ۶ عضو دارد.

$(A-B)\cup(B-A)$ همان $(A\cup B)-(A\cap B)$ است. ببینید: $(A\cup B)-(A\cap B)=(A-B)\cup(B-A)$



یک مثال فانتزی هم از ترکیب اجتماع و اشتراک و تفاضل می‌بینیم:

تست اگر $A_k=\{x\mid x\in\mathbb{Z},(-1)^k\le x\le k\}$، آن‌گاه $(A_2\cup A_3)-(A_1\cap A_3)$ چند عضو دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ کزینه اولین کار نوشتن A_1، A_2 و A_3 است. باید به جای k اعداد ۱، ۲ و ۳ را بگذاریم:

$A_1=\{x\mid x\in\mathbb{Z},-1\le x\le 1\}=\{-1,0,1\}$

$A_2=\{x\mid x\in\mathbb{Z},1\le x\le 2\}=\{1,2\}$

$A_3=\{x\mid x\in\mathbb{Z},(-1)\le x\le 3\}=\{-1,0,1,2,3\}$

$A_1\cap A_3=\{-1,0,1\}\cap\{-1,0,1,2,3\}=\{-1,0,1\}$

پس داریم: $A_2\cup A_3=\{1,2\}\cup\{-1,0,1,2,3\}=\{-1,0,1,2,3\}$

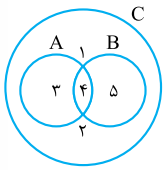
و در نتیجه تفاضل می‌شود:

$\{-1,0,1,2,3\}-\{-1,0,1\}=\{2,3\}$

که دو عضو دارد.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- با توجه به نمودار مقابل، چندتا از عبارت‌های مقابل درست نیست؟



$A\subseteq C$ ، $2\in(A\cup B)$ ، $4\in(A\cup B)$ ، $3\subseteq A$

۱) صفر ۲) ۱

۳) ۲ ۴) ۳

۲- در مجموعهٔ $A=\{\{1\},\{\{1\}\},\{\{\}\}\}$ کدام گزینه نادرست است؟

۱) $\{1\}\subseteq A$ ۲) $\{1\}\in A$ ۳) $\{\{\}\}\in A$ ۴) $\{\{\}\}\subseteq A$

۳- اگر $A=\{2\}$، $B=\{2,\{2\}\}$ و $C=\{\{2\},\{2,\{2\}\}\}$، کدام رابطه نادرست است؟

۱) $B\subset C$ ۲) $A\subset B$ ۳) $A\in B$ ۴) $B\in C$

۴- اگر $A=\{1,2,\{1,2,3\}\}$، $B=\{1,2,3,\{1,2\}\}$ و $C=\{1,2,3\}$ باشد، کدام رابطه درست است؟

۱) $A-B=C$ ۲) $B-C=\varnothing$ ۳) $B-C=\{1,2\}$ ۴) $A-B=\{C\}$

۵- اگر $A=\{1,2,3,4\}$ و $B=\{2,4,6,8\}$، مجموعهٔ $(A\cup B)-(A\cap B)$ چند عضو دارد؟

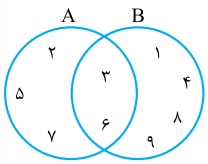
۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۶- مجموعه‌های $A=\{2,4,6,8,9\}$، $B=\{1,5,7,3,9\}$ و $C=\{1,7,8,10,11\}$ را در نظر بگیرید. کدام گزینه نادرست است؟

۱) $n((A\cup B)-C)=7$ ۲) $(A-C)\cup(B-C)=(A\cup B)-C$

۳) $n(C\cup\varnothing)=n(B\cap B)$ ۴) $n(A\cap B)=n(A\cap C)$

۷- با توجه به شکل زیر، اجتماع دو مجموعهٔ $A-(A-B)$ و $B-(B-A)$ چند عضو دارد؟



۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

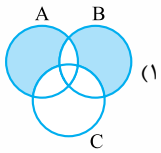
۸- اگر $A=\{2,3,6,7,8\}$ و $B=\{2,4,5,6\}$ باشند، مجموعهٔ $(A\cup B)-[A-(A\cap B)]$ چند عضو دارد؟

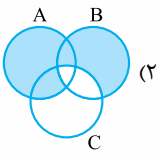
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

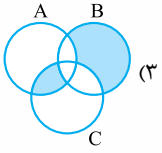
۹- اگر A مجموعهٔ اعداد دورقمی و $B=\{7k:k\in A\}$ باشد، آن‌گاه مجموعهٔ $A\cap B$ چند عضو دارد؟

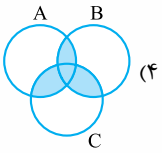
۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۰- نمایش هندسی مجموعهٔ $(A-B)\cup(B-C)$ کدام است؟

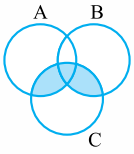
۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۱۱- قسمت رنگی شکل مقابل، نمودار ون کدام مجموعه است؟



۱) $A-(B\cap C)$
۲) $(A\cap B)\cup C$
۳) $A\cup(B\cap C)$
۴) $(A\cup B)\cap C$

۱۲- اگر A و B دو مجموعهٔ غیرتهی باشند، حاصل $A-(B-(A\cap B))$ کدام مجموعه است؟

۱) A ۲) B ۳) $A\cap B$ ۴) $A\cup B$

۱۳- اگر A، B و C سه مجموعهٔ غیرتهی به طوری که $A\subset B$ باشد، آن‌گاه مجموعهٔ $(A\cap(B-C))-(A\cap B\cap C)$ کدام است؟

۱) $A-C$ ۲) $A\cap C$ ۳) A ۴) B

۱۴- اگر $A\cup(B-A)=B$ باشد، آن‌گاه:

۱) $A\subseteq B$ ۲) $B\subseteq A$ ۳) $A=\varnothing$ ۴) $B=\varnothing$

۱۵- اگر $A\cap B=\varnothing$ و $A\cap C=\varnothing$، آن‌گاه کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) $B\cap C=\varnothing$ ۲) $B\cap C\neq\varnothing$ ۳) $A\cap(B\cup C)=\varnothing$ ۴) $A\cap(B-C)\neq\varnothing$

۱۶- اگر $n\in\mathbb{N}$ و $A_n=\{m\in\mathbb{Z}\,|\,m\geq -n, 2^m\leq n\}$ باشد، آن‌گاه مجموعهٔ $A_4\cap A_3$ چند زیرمجموعه دارد؟

۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۳۲ ۴) ۳۶

(درس ۲)

مجموعه‌های مهم اعداد ـ بازه

این مجموعه‌ها را از سال نهم می‌شناسید:

نام	نماد	عضوها	توضیح
اعداد طبیعی	$\mathbb{N}$	$1,2,3,\ldots$	$\mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}$ است. در $\mathbb{W}$ علاوه بر اعداد طبیعی، صفر را داریم.
اعداد حسابی	$\mathbb{W}$	$0,1,2,3,\ldots$	$\mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Z}$ است. $\mathbb{Z}$ شامل قرینهٔ اعداد طبیعی هم هست.
اعداد صحیح	$\mathbb{Z}$	$0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$	
اعداد گویا	$\mathbb{Q}$	$\{\frac{a}{b}\,\|\,a,b\in\mathbb{Z},b\neq0\}$	$\mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}$ است. اعداد کسری مثل $\frac{2}{3}$ و $-\frac{1}{5}$ و ... علاوه بر اعداد صحیح، در $\mathbb{Q}$ هستند.
اعداد گنگ	$\mathbb{Q}^c$	اعدادی که نمایش کسری ندارند.	اعدادی مانند $\sqrt{2}$ و π، نمایش کسری ندارند.
اعداد حقیقی	$\mathbb{R}$	کل اعداد گویا و گنگ در کنار هم	کل نقاط محور اعداد حقیقی را دارد.

تست عدد $\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{8}}$ عضو چندتا از مجموعه‌های $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$، $\mathbb{Q}^c$ و $\mathbb{R}$ است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ کزینه ∞ به جای ۹۸ می‌نویسیم 49×2 و به جای ۸ هم 4×2 می‌گذاریم، پس داریم:

$$\frac{\sqrt{49\times2}}{\sqrt{4\times2}}=\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{4}}=\frac{7}{2}$$

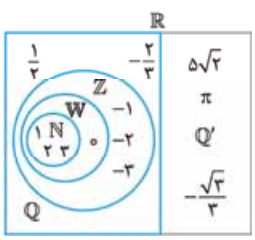
پس این عدد ۳/۵ است. در $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}^c$ نیست و در $\mathbb{R}$ و $\mathbb{Q}$ هست. یعنی در دوتا از مجموعه‌ها.

در اعداد گنگ، تعداد رقم‌های اعشاری بی‌شمار است و دورهٔ تناوب ندارد.

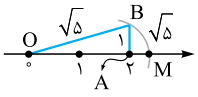
مثلاً ۰/۱۰۱۰۰۱۰۰۰۱۰۰۰۰۱...، جذر اعدادی که مربع کامل نیستند و π گنگ هستند مجموعهٔ اعداد گنگ را به صورت $\mathbb{Q}^c$ یا $\overline{\mathbb{Q}}$ هم نشان می‌دهیم. این خاصیت‌ها را ببینید:

$$\mathbb{Q}-\mathbb{Q}'=\mathbb{Q}\ ,\ \mathbb{Q}'-\mathbb{Q}=\mathbb{Q}'\ ,\ \mathbb{Q}'\cap\mathbb{Q}=\varnothing\ ,\ \mathbb{R}-\mathbb{Q}=\mathbb{Q}'$$

این مجموعه را در نمودار ون ببینید:



برای نمایش اعداد $\sqrt{k}$ روی محور از رابطهٔ فیثاغورس استفاده می‌شود، مثلاً نمایش $\sqrt{۵}$ روی محور را ببینید:



$OA = ۲\ ,\ AB = ۱$

$OB^۲ = OA^۲ + AB^۲ = ۲^۲ + ۱^۲ = ۵ \Rightarrow OB = \sqrt{۵} = OM$

تست $\mathbb{Q}$ **با کدام مجموعه، اشتراک ندارد؟**

۱) $\{x \mid x^۲ = \frac{۴}{۹}\}$

۲) $\{x \mid -۱ < x < ۰\}$

۳) $\{x \mid x^۲ = ۳\}$

۴) $\{x \mid x \notin \mathbb{Z}\}$

پاسخ گزینهٔ ۱ اعضای ۱ اعداد $\pm\frac{۲}{۳}$ هستند که مربع آن‌ها می‌شود $\frac{۴}{۹}$ و با $\mathbb{Q}$ اشتراک دارد؛ چون $\pm\frac{۲}{۳}$ در $\mathbb{Q}$ هستند. در ۲ اعداد گویای بین -۱ و صفر، مثلاً $-\frac{۱}{۲}$، با $\mathbb{Q}$ مشترک‌اند. در ۴ هم اعداد غیرصحیح مانند $-\frac{۱}{۲}$ با $\mathbb{Q}$ مشترک‌اند. اما در ۳، اعدادی که $x^۲ = ۳$ باشد $\pm\sqrt{۳}$ هستند که در $\mathbb{Q}$ قرار نمی‌گیرند؛ پس با $\mathbb{Q}$ اشتراک ندارد.

تست اگر $A = \{x \mid x \in \mathbb{A}, (x+۳)(۲x-۱) = ۰\}$ برابر $\{\frac{۱}{۲}\}$ باشد، A می‌تواند چندتا از مجموعه‌های مقابل باشد؟ $\mathbb{Z}\ ,\ \mathbb{R}-\mathbb{W}\ ,\ \mathbb{Q}-\mathbb{Z}\ ,\ \mathbb{Q}-\mathbb{N}\ ,\ \mathbb{Q}'$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ گزینهٔ ۲ $(x+۳)(۲x-۱) = ۰$ یعنی مقدار x برابر -۳ یا $\frac{۱}{۲}$ است. اما مجموعه فقط برابر $\{\frac{۱}{۲}\}$ شده، پس -۳ در A نیست و $\frac{۱}{۲}$ در آن هست.

$\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}'$ عدد $\frac{۱}{۲}$ را ندارند و در $\mathbb{Q}-\mathbb{N}$ و $\mathbb{R}-\mathbb{W}$، عدد -۳ هم حضور دارد! اما $\mathbb{Q}-\mathbb{Z}$ مناسب است؛ چون -۳ را ندارد و $\frac{۱}{۲}$ را دارد، پس فقط یکی از مجموعه‌ها مناسب است.

بازه‌ها

بازه‌ها، زیرمجموعه‌هایی از اعداد حقیقی هستند که همهٔ اعداد حقیقی بین دو عدد مشخص را نشان می‌دهند. اول انواع بازه‌ها را در جدول روبه‌رو می‌بینیم:

دقت کنید که در بازه‌ها باید $a < b$ باشد.

راستی بازهٔ باز (a,a) در واقع $\varnothing$ است و بازهٔ بسته $[a,a]$ مجموعهٔ تک‌عضوی $\{a\}$ است.

بازه	نوع	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
(a,b)	باز	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	a b
$[a,b)$	نیم‌باز	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$	a b
$(a,b]$	نیم‌باز	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$	a b
$[a,b]$	بسته	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$	a b
$(a,+\infty)$	باز	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	a b
$[a,+\infty)$	نیم‌باز	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \ge a\}$	a b
$(-\infty,b)$	باز	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$	a b
$(-\infty,b]$	نیم‌باز	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \le b\}$	a b
$(-\infty,+\infty)$	باز	$\mathbb{R}$	a b

تست در اعداد ۱، ۱/۱، $\sqrt{۱۰}$، $\sqrt{۲}$، $\frac{۳}{۲}$ و ۳ چندتا عضو بازهٔ $(۱,۳]$ هستند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ گزینهٔ ۳ بازه از طرف ۱ باز است؛ پس شرط آن $۱ < x \le ۳$ است و در نتیجه ۱ عضو آن نیست اما ۳ عضو بازه هست. $\sqrt{۲}$، $\frac{۳}{۲}$ و ۱/۱ نیز در این فاصله هستند اما $\sqrt{۱۰}$ عددی بیشتر از ۳ است و در بازه قرار ندارد.

بنابراین اعداد ۱/۱، $\sqrt{۲}$ و $\frac{۳}{۲}$ و ۳ در بازه هستند که می‌شود ۴تا.

تست چندتا از مجموعه‌های مقابل، زیرمجموعهٔ $(-1,2]$ هستند؟ $\{1,2\}$، $[-1,2)$، $(0,1)$، $\varnothing$، $\{\sqrt{2},\frac{3}{2}\}$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ گزینهٔ ۲ این بازه به شکل نیم‌باز $(0\overset{2}{\bullet}\!\!-\!\!\overset{-1}{\bullet})$ است، پس عدد ۲ را ندارد و $\{1,2\}$ و $[-1,2)$ زیرمجموعهٔ آن نیستند، اما $\frac{3}{2}$ و $\sqrt{2}$ را دارد و کل بازهٔ $(0,1)$ در آن هست. $\varnothing$ هم زیرمجموعهٔ تمام مجموعه‌هاست، پس از بین مجموعه‌های داده‌شده ۳تای آن‌ها قبول‌اند.

اجتماع، اشتراک و تفاضل بازه‌ها

برای محاسبهٔ اجتماع، اشتراک و تفاضل بازه‌ها، از نمایش آن‌ها روی محور استفاده می‌شود. مثال زیر را ببینید:

تست در کدام گزینه اعداد صحیح کم‌تری هست؟

۱) $[0,1)\cup[1,2]$ ۲) $[0,4]-(2,4)$ ۳) $(-2,6]\cap[-6,1)$ ۴) $[-1,4]-\{1,2\}$

پاسخ گزینهٔ ۱

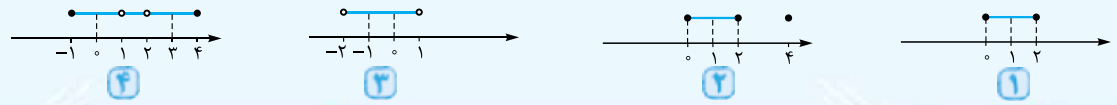
۱) $[0,1)\cup[1,2]=[0,2]$ $\xrightarrow{\text{اعداد صحیح}}$ ۰,۱,۲ $\Rightarrow$ ۳تا

۲) $[0,4]-(2,4)=[0,2]\cup\{4\}$ $\xrightarrow{\text{در }\mathbb{Z}}$ ۰,۱,۲,۴ $\Rightarrow$ ۴تا

۳) $(-2,6]\cap[-6,1)=(-2,1)$ $\xrightarrow{\text{عضو }\mathbb{Z}}$ $-1,0$ $\Rightarrow$ ۲تا

۴) $[-1,4]-\{1,2\}=[-1,1)\cup(1,2)\cup(2,4]$ $\xrightarrow{\text{اعداد صحیح}}$ $-1,0,3,4$ $\Rightarrow$ ۴تا

جواب آخر گزینه‌ها را هم ببینید:



تست اگر $(x-1,3-2x)\cup\{2\}$ بازه‌ای نیم‌باز باشد، چند مقدار برای x وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) هیچ ۴) بی‌شمار

پاسخ گزینهٔ ۲ در چه صورت اجتماع بازه باز و مجموعهٔ تک‌عضوی، نیم‌باز می‌شود؟ فقط دو امکان وجود دارد:

۱) $(a,b)\cup\{a\}=[a,b)$ ۲) $(a,b)\cup\{b\}=(a,b]$

پس باید عدد ۲، مساوی عدد اول یا آخر بازه باشد:

$3-2x=2 \Rightarrow 1=2x \Rightarrow x=\frac{1}{2}$ $\quad x-1=2 \Rightarrow x=3$

حالا بازه را ببینید:

$x=3 \Rightarrow (x-1,3-2x)=(2,-3) \Rightarrow$ غق‌ق

پس فقط یک مقدار برای x داریم.

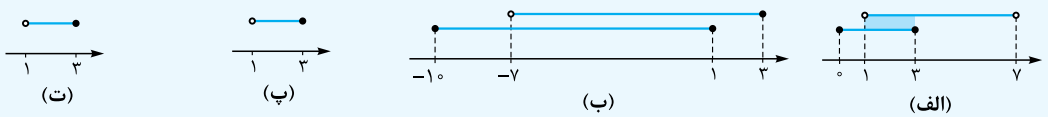
$x=\frac{1}{2} \Rightarrow (x-1,3-2x)=(-\frac{1}{2},2) \Rightarrow$ ق‌ق

حواستان هست که همیشه باید در بازهٔ (a,b) داشته باشیم $a<b$. پس بازه به شکل $(2,-3)$ بی‌معنی است.

تست در بین مجموعه‌های مقابل، چند بازهٔ مختلف وجود دارد؟ $[0,3]\cap(1,7)$، $(-7,3]-[-10,1]$، $[1,3]-\{1\}$، $(1,3)\cup\{3\}$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ گزینهٔ ۱ هر ۴ بازه یکسان‌اند!



$[0,3]\cap(1,7)=(1,3]$ $\quad (-7,3]-[-10,1]=(1,3]$ $\quad [1,3]-\{1\}=(1,3]$ $\quad (1,3)\cup\{3\}=(1,3]$

اگر فرمول دوست دارید، این‌ها هم هست:

به شرطی که بازه‌ها اشتراک داشته باشند.

$[a,b]\cap[c,d]=[$عدد کم‌تر بین b و d ، عدد بیشتر بین a و $c]$

$[a,b]\cup[c,d]=[$عدد بیشتر بین b و d ، عدد کم‌تر بین a و $c]$

تست اگر $A=(2,3m+1)$، $B=[n-2,6)$ و اجتماع آن‌ها $A\cup B=[-1,6)$ باشد، $m\times n$ کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) $\frac{5}{3}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{7}{4}$

پاسخ گزینهٔ ۲ اجتماع دو بازه از طرف چپ بسته است، پس حتماً اجتماع از اعضای بازهٔ B شروع شده است و $n-2=-1$ است، پس $n=1$.

همچنین در انتهای بازه، اجتماع عدد ۶ به صورت باز است، پس انتهای بازهٔ A یعنی $۳m+۱$ از ۶ بیشتر نیست.

$$\underbrace{۳m+۱ < ۶}_{\text{به‌خاطر شرط بازهٔ A}}$$

$$۱ < ۳m < ۵ \Rightarrow \frac{۱}{۳} < m \leq \frac{۵}{۳}$$

چون n برابر ۱ بود، پس $m \times n$ عددی بین $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۵}{۳}$ است و خود $\frac{۵}{۳}$ هم می‌تواند باشد، اما $\frac{۷}{۴}$ نیست. ($\frac{۷}{۴}$ از $\frac{۵}{۳}$ بیشتر است.)

تست کدام‌یک بازه است؟

۱) $(-۵,۱)-\{۰\}$ ۲) $(-۲,۳)-\{۱,۲\}$ ۳) $[-۲,۲]-(۱,۲)$ ۴) $(-۱,۴]-\{۷,۴\}$

پاسخ گزینهٔ ۴

۱) اجتماع دو بازه است:

۲) اجتماع ۳ بازه است:

۳) یک بازه و یک مجموعهٔ تک‌عضوی است (در واقع ۲تا بازه).

اما ۴) یک بازه است:

$$(-۱,۴]-\{۷,۴\}=(-۱,۴)$$

بعضی وقت‌ها سر و ته بازه برحسب یک متغیر هستند. کار سختی نداریم، فقط باید خودمان بازه‌ها را مشخص کنیم. مثلاً وقتی می‌گویند $A_n=(\frac{n}{۲},n)$ و از ما $A_۲$ را می‌خواهند؛ یعنی جای nها باید ۲ قرار دهیم و بازه به صورت $A_۲=(\frac{۲}{۲},۲)$ به دست می آید.

تست اگر A_i بازهٔ $((-۱)^i i, i^۲)$ باشد، حاصل $(A_۱ \cup A_۳)-(A_۳ \cap A_۲)$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

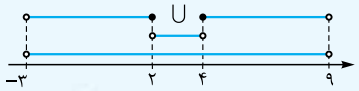
پاسخ گزینهٔ ۲

$$i=۱ \Rightarrow A_۱=((-۱)^۱ ۱,۱)=(-۱,۱) \qquad i=۲ \Rightarrow A_۲=((-۱)^۲ \times ۲,۴)=(۲,۴) \qquad i=۳ \Rightarrow A_۳=((-۱)^۳ \times ۳,۳^۲)=(-۳,۹)$$

پس $A_۱ \cup A_۳=(-۳,۹)$ و $A_۳ \cap A_۲=(۲,۴)$ و بنابراین:

$$(A_۱ \cup A_۳)-(A_۳ \cap A_۲)=(-۳,۹)-(۲,۴)=(-۳,۲] \cup [۴,۹)$$

به شکل هم توجه کنید:



در $[-۳,۲)$ اعداد صحیح ± ۲ و ± ۱ و صفر را داریم (پنج عدد صحیح) و در $[۴,۹)$ اعداد صحیح ۴، ۵، ۶، ۷ و ۸ را داریم (پنج عدد صحیح) یعنی روی هم ۱۰ عضو صحیح دارد.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

مجموعه‌های مهم اعداد

۱۷- در میان اعداد $\sqrt{۲}$، ۱/۴۱۴۲، ۱/۴۱۴، ۱/۴۱ و ۱/۴ به ترتیب چند عدد گویا و چند عدد گنگ هست؟ (کتاب درسی)

۱) ۳، ۲ ۲) ۲، ۳ ۳) ۱، ۴ ۴) ۴، ۱

۱۸- کدام رابطه درست است؟ (کتاب درسی)

۱) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Q}$ ۲) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ ۳) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{R}$ ۴) $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$

۱۹- کدام مجموعه تهی نیست؟

۱) $\mathbb{W}-\mathbb{Z}$ ۲) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Q}'$ ۳) $\{x \in \mathbb{N} \mid -۲ \leq x \leq ۲\}$ ۴) $\{x \in \mathbb{Z} \mid ۲ < x < ۳\}$

۲۰- چندتا از تساوی‌های مقابل نادرست است؟

$\mathbb{Z} \cap \mathbb{W}=\mathbb{N}$ ، $\mathbb{W}-\mathbb{Z}=\mathbb{Q}-\mathbb{Q}'$ ، $\mathbb{W} \cap \mathbb{Q}=\mathbb{N}$ ، $\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q}=\mathbb{R}$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۱- کدام گزینه نادرست است؟

۱) $\mathbb{Q}'-\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}'$ ۲) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{Q}'$ ۳) $\mathbb{Q}-\mathbb{Q}' \not\subseteq \mathbb{Q}'$ ۴) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{Q}$

بازه

۲۲- چندتا از عبارت‌های مقابل درست است؟

$\frac{۴}{۳} \in [\frac{۱}{۲},۲)$ ، $-۲ \subseteq \{-۲,۰\}$ ، $۱ \in \{۰,۲\}$ ، $[-۱,۲] \subseteq (-۱,۲)$ ، $\{۰,۱\} \subseteq [-۱,۲)$

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۱ (کتاب درسی)

۲۳- اگر $A=(-\frac{۷}{۳},\sqrt{۶})$ و $B=(-\frac{۵}{۳},\frac{۴}{۳}]$، آن‌گاه در $A-B$ چند عدد صحیح وجود دارد؟ (کتاب درسی)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۲۴- کدام بازه، بسته است؟ (کتاب درسی)

۱) $(۱,۳)-(۱,۲)$ ۲) $(۱,+\infty)\cup(-\infty,۲)$ ۳) $[۱,۳)-(۲,۳)$ ۴) $(-\infty,۲)\cap(-۳,+\infty)$

۲۵- حاصل کدام گزینه یک بازه نیست؟ (کتاب درسی)

۱) $(-۳,۱)\cup(-۲,۲)$ ۲) $(-۴,-۲)-(-۳,-۲)$ ۳) $(۱,۵)-(۳,۴)$ ۴) $(۱,۵)\cap(۳,۷)$

۲۶- اشتراک دو مجموعهٔ $(-۵,۴]$ و $\mathbb{Z}-\mathbb{W}$ چندعضوی است؟

۱) ۴ ۲) ۷ ۳) ۳ ۴) ۵

۲۷- حاصل $[(۳,۱۰)\cap(\frac{۴}{۳},۵)]\cup(-۲,۳)$ کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) $(-۲,۱۰)$ ۲) $(-۲,۵)$ ۳) $(-۲,۵)-\{۳\}$ ۴) $[-۲,۵)$

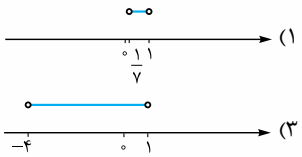
۲۸- اگر $A=(-۳,۱)$، $B=(۰,۴)$ و $C=[-۲,۲]$، آن‌گاه $(A\cup C)-B$ دارای چند عضو صحیح است؟ (کتاب درسی)

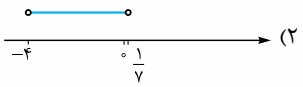
۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۲۹- اگر $A=\{x|۱<\frac{۲x+۱}{۳}\le ۵,x\in\mathbb{Q}\}$، $B=\{x|۱<\frac{x+۵}{۷}<۳,x\in\mathbb{N}\}$ و $C=(-۲,۸)-(-۳,۴)$، مجموعهٔ $A\cap B$ چند عضو مشترک با مجموعهٔ C دارد؟

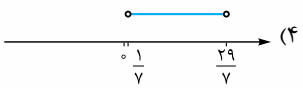
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۳۰- اگر $(-۲,\frac{۱۵}{۷})-(۱,a)\cup(b,۲)$ باشد، نمایش مجموعهٔ $(a-۲,b+۳)\cap(b-۲,a+۲)$ روی محور اعداد حقیقی به کدام صورت است؟

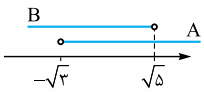
۱)


۲)


۳)

۴)


۳۱- اگر $C=[-۲,۲)$ و بازه‌های A و B به شکل زیر روی محور نشان داده شوند، حاصل $(A\cap B)-C$ چگونه است؟ (کتاب درسی)



۱) $\varnothing$
۲) شامل عدد صحیح نیست.
۳) فقط یک عدد صحیح دارد.
۴) فقط دو عدد صحیح دارد.

۳۲- اگر $\mathbb{R}=[m+۲,+\infty)\cup(-\infty,۲m-۱]$، حدود m کدام است؟

۱) $m\le ۱$ ۲) $m\ge ۱$ ۳) $m\le ۳$ ۴) $m\ge ۳$

۳۳- اگر عدد حقیقی x در بازهٔ $[۲x-۱,۳x+۲)$ قرار گیرد، چند مقدار صحیح برای آن وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۴- اگر $A=(b-۱,۲b+۱)$، $۳\in A$ و $۲\notin A$ نباشد، محدودهٔ قابل قبول برای b کدام بازه است؟

۱) $(۲,۴)$ ۲) $[۲,۴)$ ۳) $[۳,۴)$ ۴) $(۳,۴)$

۳۵- اجتماع بازه‌های $B=(a,۵)$ و $A=(-۲,b)$ برابر $(-۳,۶)$ است. کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) $ab=-۱۸$ ۲) $ab=۱۸$ ۳) $ab=-۱۵$ ۴) $ab=۱۵$

۳۶- اگر $(-\infty,m-۲]\cap[۲m+۱,+\infty)=\{a\}$، مقدار $a+m$ کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۳ ۳) -۵ ۴) -۸

۳۷- اگر $(a+۱,a+۳)\cap(a,b)=(-۱,۲]$، $a+b$ کدام است؟

۱) صفر ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) -۲

۳۸- اگر n عددی طبیعی و دو مجموعهٔ $A=[-\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۲}]$ و $B=(n-۳,n+۱)$ دارای اشتراک ناتهی باشند، جمع مقادیر n کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۶ ۳) ۳ ۴) ۱۵

۳۹- اگر هیچ‌یک از مجموعه‌های $A\cap(-۱,۲)$ و $A-(-۱,۲)$ تهی نباشند، کدام بازه به عنوان A مورد قبول است؟

۱) $(۰,۳)$ ۲) $(۰,۲)$ ۳) $(-۱,۱)$ ۴) $(۲,۳)$

۴۰- به ازای چند مقدار صحیح m، بازهٔ $(۱۰,m)$ شامل دقیقاً سه عدد مضرب ۴ است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۴۱- اگر $(-\infty,۴]\cap(۳-a,+\infty)=\varnothing$، بازهٔ $(-۱,a+۵)$ حداکثر شامل چند عدد طبیعی است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۴۲- اگر $(-۲,۲) \subseteq (۴a-۲, a+۱)$، عدد $\frac{۵}{۲}a+۱$ حتماً متعلق به کدام بازه است؟

۱) $(۰,۳)$ ۲) $[۱,۴]$ ۳) $[-۱,۲]$ ۴) $[۰,۲]$

۴۳- اگر $a<۰<a+۱$ باشد، مجموعهٔ $(\frac{۱}{a},-a)\cap(a,-\frac{۱}{a})$ برابر با کدام است؟

۱) $(\frac{۱}{a},-\frac{۱}{a})$ ۲) $(a,-a)$ ۳) $(a,-\frac{۱}{a})$ ۴) $(-a,-\frac{۱}{a})$

۴۴- اگر $[۳a-۱,۴)=(a+۲,۵)\cap[-۲,۴)$، کدام‌یک از اعداد زیر عضو بازهٔ $(a-۲,a)$ است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) -۲ ۴) ۴

۴۵- به ازای چند n طبیعی، $(\frac{۲}{n+۱},\frac{۵}{۲n+۱})$ نمایش یک بازه نیست؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۴۶- اگر $A_i=(-i,i)$، حاصل $(A_۱\cup A_۲)\cap A_۳$ کدام است؟

۱) $(-۱,۱)$ ۲) $(-۲,۲)$ ۳) $(-۳,۳)$ ۴) $(-۱,۲)$

۴۷- اگر $A_n=[-n,۱)$، مجموعهٔ $A_۴-A_۱$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۴۸- اگر $i\in\{۱,۲,۳,\ldots,۹\}$ و $A_i=[-i,\frac{۹-i}{۲}[$، آن‌گاه مجموعهٔ $(A_۱\cap A_۷)-(A_۲\cap A_۵)$ به کدام صورت است؟

۱) $[-۲,-۱)\cup(۱,۲]$ ۲) $[-۲,-۱]\cup[۱,۲[$ ۳) $[-۱,۱]$ ۴) $\varnothing$

۴۹- اگر n عدد طبیعی و A_n بازهٔ $((-۱)^n n,۲n)$ باشد، چند عدد صحیح به $\bigcup_{n=۱}^{۴} A_n$ تعلق دارد؟ $(\bigcup_{n=۱}^{۴} A_n=A_۱\cup A_۲\cup A_۳\cup A_۴)$

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۵۰- اگر $A_n=[n-۱,n+۱]$ باشد، آن‌گاه مجموعهٔ $\bigcup_{n=۱}^{۴} A_n-\bigcap_{n=۱}^{۳} A_n$ با کدام مجموعه برابر است؟

۱) $\{x:۱\le x\le ۵\}$ ۲) $\{x:۰\le x\le ۵\}$ ۳) $\{x:۰\le x\le ۵, x\neq ۲\}$ ۴) $\{x:۱\le x\le ۵, x\neq ۲\}$

درس ۳

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

تعداد اعضای مجموعهٔ A را با $n(A)$ نشان می‌دهیم.

اگر $n(A)=۰$ باشد، A تهی است.

اگر $n(A)=k$ باشد، مجموعهٔ A را متناهی (kعضوی) می‌نامیم. گاهی به جای «متناهی» می‌گوییم «باپایان».

اگر $n(A)$ از هر عددی بزرگ‌تر باشد، آن را نامتناهی می‌نامیم.

تعداد عضوهای یک مجموعهٔ متناهی عددی حسابی است.

نمونه‌هایی از مجموعه‌های نامتناهی ببینید:

۱) $\mathbb{N}$، $\mathbb{W}$، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$، $\mathbb{R}$ و $\mathbb{Q}'$ نامتناهی‌اند.

۲) تمام بازه‌های اعداد حقیقی مثلاً $[۱,۲]$ یا $(-\infty,۰)$ نامتناهی‌اند.

۳) مجموعه شکل‌های هندسی مختلف (مثلاً خط‌ها با شیب ۲ یا دایره‌ها به مرکز مبدأ) معمولاً نامتناهی‌اند.

کتاب درسی تأکید دارد که مجموعهٔ درختان، اتم‌ها، مولکول‌ها، انسان‌ها و ... همیشه متناهی‌اند. با این‌که تعداد خیلی زیادی عضو دارند، اما با داشتن وقت کافی می‌توان اعضای آن‌ها را شمرد و به پایان رسید.

تست کدام متناهی است؟

۱) اعداد صحیح بازهٔ $(-۱,۴)$ ۲) اعداد گویای بازهٔ $(-۱,۴)$ ۳) اعداد گنگ در بازهٔ $(-۱,۴)$ ۴) اعداد حقیقی بازهٔ $(-۱,۴)$

پاسخ گزینهٔ ۱ گفتیم که بازه‌ها همیشه نامتناهی‌اند. حالا به خاطر بسپارید که بین هر دو عدد حقیقی مختلف، بی‌شمار عدد گویا و بی‌شمار عدد گنگ وجود دارد. پس ۲، ۳ و ۴ نامتناهی‌اند اما ۱ متناهی و فقط شامل چهار عضو ۰، ۱، ۲ و ۳ است.

این جدول را ببینید:

	$A\cup B$	$A\cap B$	$A-B$	$B-A$
A و B متناهی	متناهی	متناهی	متناهی	متناهی
A و B هر دو نامتناهی	نامتناهی	—	—	—
A متناهی و B نامتناهی	نامتناهی	متناهی	متناهی	نامتناهی

این‌طوری هم بگوییم: اشتراک یک مجموعهٔ متناهی با هر مجموعهٔ دیگری قطعاً متناهی است. اگر A متناهی باشد، $A-B$ قطعاً متناهی است.

تست **اگر $A=\{1,2,3\}$ ، $B=[1,3]$ ، $C\subseteq A$ ، $D\subseteq B$ و $B\subseteq E$ باشد، چندتا از مجموعه‌های C، D و E قطعاً متناهی‌اند؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ

پاسخ گزینهٔ ۴ C زیرمجموعهٔ A است و چون A متناهی است C هم حتماً متناهی است.

D زیرمجموعهٔ بازهٔ B است، می‌تواند متناهی باشد، مثلاً $D=\{1\}$ یا نامتناهی باشد، مثلاً $D=(1,2)$.

E زیرمجموعهٔ B را دارد، پس تمام B را در خودش دارد و از یک مجموعهٔ نامتناهی بیشتر است! پس نامتناهی است.

خلاصه فقط یکی از مجموعه‌ها یعنی E قطعاً نامتناهی شد و فقط مجموعهٔ C قطعاً متناهی شد.

نتیجهٔ این مثال را به خاطر بسپاریم:

۱) هر زیرمجموعه از یک مجموعهٔ متناهی، متناهی است.

۲) اگر مجموعه‌ای یک زیرمجموعهٔ نامتناهی دارد، حتماً نامتناهی است.

۳) زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ نامتناهی، می‌توانند متناهی یا نامتناهی باشند.

تست **کدام وجود ندارد؟**

۱) دو مجموعهٔ نامتناهی A و B که $A-B$ یک‌عضوی و $B-A$ دوعضوی باشد.

۲) سه زیرمجموعه از $\mathbb{N}$ که هر سه نامتناهی‌اند و دوبه‌دو اشتراک ندارند.

۳) دو زیرمجموعهٔ نامتناهی از $\mathbb{Z}$ که یکی زیرمجموعهٔ دیگری است.

۴) مجموعهٔ متناهی که شامل تمام اعداد گویای بین $\frac{1}{70}$ و $\frac{1}{71}$ باشد.

پاسخ گزینهٔ ۳ همین اول بگوییم که اعداد گویای بین $\frac{1}{71}$ و $\frac{1}{70}$ نامتناهی است. اما بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) دو مجموعهٔ $A=\mathbb{N}\cup\{-1\}$ و $B=\mathbb{N}\cup\{-2,-3\}$ را در نظر بگیرید. $A-B=\{-1\}$ و $B-A=\{-2,-3\}$ است؛ پس وجود دارد.

۲) مجموعه‌های $\{1,4,7,\ldots\}$، $\{2,5,8,\ldots\}$ و $\{3,6,9,\ldots\}$ را در نظر بگیرید که هر سه نامتناهی‌اند و اشتراک هم ندارند. یک مثال دیگر مجموعه‌های اعداد طبیعی با رقم یکان ۱، رقم یکان ۲ و رقم یکان ۳ هستند.

۳) $\mathbb{N}$ و $\mathbb{W}$ را ببینید. هر دو زیرمجموعهٔ $\mathbb{Z}$ هستند و $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}$ است.

مثال دیگر می‌تواند مجموعهٔ اعداد زوج و اعداد مضرب ۶ باشد. (کدام زیرمجموعهٔ دیگری است؟!)

تست **کدام متناهی است؟**

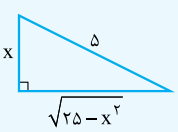
۱) مجموعهٔ مثلث‌های قائم‌الزاویه با وتر ۵

۲) مجموعهٔ کسرهای مثبت با صورت ۲

۳) مجموعهٔ اعداد ۸رقمی

۴) مجموعهٔ دایره‌ها به مرکز $(1,2)$

پاسخ گزینهٔ ۱ نامتناهی است. این مثلث‌ها به شکل روبه‌رو هستند:



و x می‌تواند هر عدد حقیقی از صفر تا ۵ باشد.

۲) نامتناهی است. چون این مجموعه به صورت $\{\frac{2}{n}\mid n\in\mathbb{N}\}$ بیان می‌شود و بی‌شمار عضو دارد.

۳) مجموعهٔ اعداد ۸رقمی از ۱۰۰۰۰۰۰۰ تا ۹۹۹۹۹۹۹۹، محدود است. بعداً خواهید دید که تعداد آن‌ها 9×10^7 تا است.

۴) دایره‌ها با مرکز $(1,2)$ می‌توانند شعاع‌های مختلف در فاصلهٔ $(0,+\infty)$ داشته باشند؛ پس نامتناهی است!

۵۱- کدام مجموعه متناهی است؟ (کتاب درسی)

۱) اعداد صحیح کم‌تر از ۱۰۰
۲) اعداد طبیعی کم‌تر از ۱۰۰
۳) اعداد گویای بین $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۵}$
۴) اعداد حقیقی بین ۱ و ۲

۵۲- کدام مجموعه نامتناهی است؟ (کتاب درسی)

۱) اتم‌های کرهٔ زمین
۲) درختان جنگل‌های ایران
۳) حشرات ساکن زمین
۴) تمام دایره‌های قابل رسم به مرکز (۱,۲)

۵۳- کدام مجموعه متناهی است؟ (کتاب درسی)

۱) مثلث‌ها با مساحت ۶
۲) مربع‌ها با مساحت ۶ و یک رأس روی مبدأ
۳) خط‌ها با شیب ۲ و گذرنده از مبدأ
۴) خط‌های گذرنده از مبدأ

۵۴- کدام مجموعه غیرتهی و باپایان (متناهی) است؟ (کتاب درسی)

۱) مضارب ۶
۲) مضارب مشترک ۷ و ۶
۳) مقسوم‌علیه‌های مشترک ۷ و ۶
۴) مقسوم‌علیه‌های اول عدد ۱

۵۵- تعداد اعضای کدام مجموعه کم‌تر است؟ (کتاب درسی)

۱) اعداد اول کم‌تر از ۲۰
۲) اعداد طبیعی مربع کامل کم‌تر از ۷۰
۳) مقسوم‌علیه‌های صحیح ۶
۴) کسرهای بین صفر و ۱ با مخرج ۷

۵۶- اگر $k \in \mathbb{Z}$، آن‌گاه مجموعهٔ اعداد به کدام صورت می‌تواند فرد باشد؟

۱) $۲k-۵$
۲) $۲k+۶$
۳) $۳k-۱$
۴) $۳k+۱$

۵۷- کدام مجموعه دارای بزرگ‌ترین عضو است؟

۱) $\mathbb{Z}$
۲) $(۲,+\infty)$
۳) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq ۴\}$
۴) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x < ۳\}$

۵۸- کدام‌یک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟

۱) $A=\{x \mid x=۲n-۱, n \in \mathbb{N}\}$
۲) $B=\{x \mid x=\frac{۱}{n}, n \in \mathbb{N}\}$
۳) $C=\{x \mid x=\frac{(-۱)^n}{۲}, n \in \mathbb{N}\}$
۴) $D=\{x \mid x=\frac{(-۱)^n}{n^۲}, n \in \mathbb{N}\}$

۵۹- کدام جمله نادرست است؟ (کتاب درسی)

۱) بین هر دو عدد طبیعی بی‌نهایت عدد گویا وجود دارد.
۲) بین هر دو عدد گنگ بی‌نهایت عدد گویا وجود دارد.
۳) بین هر دو عدد گنگ بی‌نهایت عدد صحیح وجود دارد.
۴) بین هر دو عدد صحیح بی‌نهایت عدد گنگ وجود دارد.

۶۰- مجموعهٔ A متناهی و مجموعهٔ B نامتناهی، دو زیرمجموعه از $\mathbb{N}$ هستند. چندتا از مجموعه‌های زیر قطعاً نامتناهی‌اند؟

الف) $A \cup B$
ب) $A \cap B$
پ) $A-B$
ت) $B-A$

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) صفر

۶۱- کدام جمله درست است؟ ($\mathbb{N}$ مجموعهٔ مرجع است.) (کتاب درسی)

۱) اگر A نامتناهی باشد، A' حتماً متناهی است.
۲) اگر $A \subseteq B$ و مجموعهٔ B نامتناهی باشد، A هم نامتناهی است.
۳) اگر A و B هر دو نامتناهی باشند، $A \cup B$ برابر با $\mathbb{N}$ است.
۴) اگر $A \subseteq B$ و مجموعهٔ A نامتناهی باشد، آن‌گاه B هم نامتناهی است.

۶۲- کدام جمله نادرست است؟

۱) اگر مجموعه‌های A و B هر دو نامتناهی باشند، اشتراک آن‌ها ممکن است متناهی باشد.
۲) می‌توان سه زیرمجموعهٔ نامتناهی از اعداد طبیعی یافت که هیچ‌کدام با هم اشتراک نداشته باشند.
۳) اگر $A \subseteq B$ و A مجموعه‌ای نامتناهی باشد، ممکن است B متناهی باشد.
۴) اگر $A \cup B$ نامتناهی باشد، حداقل یکی از A یا B نامتناهی بوده است.

۶۳- اگر A مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد و B مجموعهٔ اعداد اول باشند، کدام مجموعه متناهی و غیرتهی است؟

۱) $A-B$
۲) $B-A$
۳) $A \cap B$
۴) $A-(A \cup B)$

۶۴- کدام مجموعه متناهی است؟

۱) $\mathbb{Q}'-\mathbb{Q}$
۲) $(\mathbb{Q}-\mathbb{R}) \cap (\mathbb{Q}'-\mathbb{Z})$
۳) $(\mathbb{Z}-\mathbb{N}) \cap (\mathbb{Q}-\mathbb{Q}')$
۴) $(\mathbb{N}-\mathbb{Q})' \cap \mathbb{Z}'$

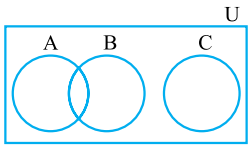
۶۵- اگر A مجموعهٔ اعداد صحیح مضرب ۳ و B مجموعهٔ اعداد صحیح با قدرمطلق کم‌تر از ۱۰۰ باشد، کدام مجموعه در $\mathbb{Z}$ باپایان است؟

۱) $A \cap B'$
۲) $A' \cup B$
۳) $A \cap B$
۴) $A \cup B$

(درس ۴)

مجموعهٔ مرجع و متمم

مجموعهٔ مرجع، مجموعه‌ای است که تمام مجموعه‌های مسئله زیرمجموعهٔ آن باشند. اسمش را مجموعهٔ جهانی یا عام می‌گذاریم و با U نشان می‌دهیم. این شکل را ببینید:



می‌گوید A, B, C سه زیرمجموعه از مرجع هستند و C با A و با B اشتراک ندارد.

فایدهٔ اصلی مجموعهٔ مرجع، تعریف متمم مجموعهٔ A است. اگر $A \subseteq U$ باشد، $U - A$ را A' یا A^c می‌نامیم که متمم مجموعهٔ A است. احتمالاً این‌طوری راحت‌تر هستید که متمم یک مجموعه، شامل اعضایی از U است که آن مجموعه ندارد. به زبان ریاضی:

$$A' = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

مثلاً متمم مجموعهٔ $A = \{1,2,3\}$ را نسبت به مرجع‌های مختلف می‌نویسیم:

$U = [1,4] \Rightarrow A' = [1,4] - \{1,2,3\} =$

$U = \{0,1,2,3,4,5\} \Rightarrow A' = U - A = \{0,4,5\}$

$U = \{2,4,5,6\} \Rightarrow A'$ وجود ندارد، چون $A \not\subset U$ نیست.

$U = \mathbb{N} \Rightarrow A' = \mathbb{N} - \{1,2,3\} = \{4,5,6,\ldots\}$

خاصیت‌های مجموعهٔ متمم را با هم ببینیم:

۱) $U' = \varnothing$ ، $\varnothing' = U$ ، $(A')' = A$

۲) اگر $A \subseteq B$ باشد، $B' \subseteq A'$ است.

۳) متمم $A \cup B$ می‌شود $A' \cap B'$؛ یعنی تک‌تک مجموعه‌ها متمم می‌شوند و اجتماع به اشتراک تبدیل می‌شود.

۴) متمم $A \cap B$ می‌شود $A' \cup B'$؛ باز هم تک‌تک مجموعه‌ها متمم شده و علامت برعکس می‌شود.

اسم ۳ و ۴ قوانین دمورگان است.

۵) $A - B$ را به صورت $A \cap B'$ هم می‌توان نوشت (یادتان هست که $A - B$ یعنی در A هست و در B نیست).

۶) $B - A$ همان $B \cap A'$ است.

۷) A و A' اشتراکی ندارند $A \cap A' = \varnothing$ و اجتماعشان می‌شود $A \cup A' = U$.

۸) $A' - B'$ می‌شود $B - A$. خودتان بگید چرا!

مثال اگر $\mathbb{R}$ را به عنوان مجموعهٔ مرجع در نظر بگیریم، متمم مجموعه‌های زیر را نشان دهید.

الف) $\mathbb{W}$ ب) $[2,-\infty)$ پ) $(1,+\infty)$

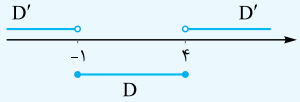
ت) $[-1,4]$ ث) $\{-2,5\}$

پاسخ الف) $\mathbb{W}'$ شامل اعداد حقیقی و غیرحسابی است:

ب) متمم بازهٔ نیم‌باز $[2,-\infty)$ به صورت $(-2,+\infty)$ است:

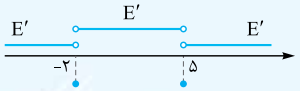
پ) متمم $(1,+\infty)$ به صورت $[1,-\infty)$ بیان می‌شود:

ت) متمم بازهٔ $[-1,4]$ به صورت اجتماعی از دو بازه است:



$D' = (-\infty,-1) \cup (4,+\infty)$

ث) متمم مجموعهٔ $\{-2,5\}$ به صورت اجتماع ۳ بازه است:



$E' = (-\infty,-2) \cup (-2,5) \cup (5,+\infty)$

مثال اگر $U = \{0, \pm 1, \pm 2, 3, 4\}$ مجموعهٔ مرجع و $A = \{x \mid x^2 \leq 5\}$ و $B = \{x \mid 1 \leq x \leq 4\}$ دو زیرمجموعه از U باشند، مجموعه‌های A ، B ، A' و B' را با اعضا مشخص کرده و درستی روابط زیر را بررسی کنید.

الف) $(A' \cap B)' = B' \cup A$ ب) $A' - B' = (A - B)'$ پ) $A - B = A \cap B'$

پاسخ در مجموعهٔ A باید اعدادی باشند که مربع آن‌ها از ۵ کم‌تر یا مساوی است؛ پس $A = \{0, \pm 1, \pm 2\}$. در مجموعهٔ B هم اعداد بین ۱ و ۴ و خود آن‌ها را داریم؛ پس $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

حالا با توجه به مجموعهٔ مرجع: $A' = U - A = \{۳, ۴\}$ $\quad B' = U - B = \{۰, -۱, -۲\}$

و می‌توانیم روابط را کنترل کنیم:

الف طرف چپ $= (A' \cap B)' = (\{۳, ۴\} \cap \{۱, ۲, ۳, ۴\})' = (\{۳, ۴\})' = \{۰, \pm ۱, \pm ۲\}$

طرف راست $= B' \cup A = \{۰, -۱, -۲\} \cup \{۰, \pm ۱, \pm ۲\} = \{۰, \pm ۱, \pm ۲\}$

دو طرف برابر شدند، پس رابطهٔ «الف» در این مسئله درست است. (همیشه درست است!)

ب طرف چپ $= A' - B' = \{۳, ۴\} - \{۰, -۱, -۲\} = \{۳, ۴\}$

طرف راست $= (A - B)' = (\{۰, \pm ۱, \pm ۲\} - \{۱, ۲, ۳, ۴\})' = (\{۰, -۱, -۲\})' = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$

دو طرف مساوی نیستند؛ پس این رابطه درست نیست.

پ طرف چپ $= A - B = \{۰, -۱, -۲\}$

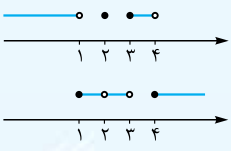
طرف راست $= A \cap B' = \{۰, \pm ۱, \pm ۲\} \cap \{۰, -۱, -۲\} = \{۰, -۱, -۲\}$

دو طرف برابرند. پس رابطهٔ «پ» در این مجموعه‌ها درست است. (همواره درست است.)

تست اگر $\mathbb{R}$ مجموعهٔ مرجع باشد، متمم مجموعهٔ $(-\infty, ۱) \cup [۳, ۴) \cup \{۲\}$ به کدام شکل است؟

۱) دو بازهٔ نیم‌باز ۲) یک بازهٔ نیم‌باز و یک بازهٔ باز ۳) دو بازهٔ باز و یک بازهٔ نیم‌باز ۴) دو بازهٔ نیم‌باز و یک بازهٔ باز

پاسخ **گزینه ۴** خود این مجموعه روی محور به شکل روبه‌رو است:



پس متمم آن می‌شود:

که به صورت $[۱, ۲) \cup (۲, ۳) \cup [۴, +\infty)$ بیان می‌شود و از دو بازهٔ نیم‌باز و یک بازهٔ باز ساخته شده است.

تست اگر $U = \{۰, \pm ۱, \pm ۲, ۳\}$، $A = \{۱, ۰, -۱\}$ و $B = \{۰, ۱, ۲, ۳\}$، حاصل $((A' - B)' \cup A)'$ کدام است؟

۱) $\{-۲\}$ ۲) $\{-۱\}$ ۳) $\{-۳\}$ ۴) $\{\}$

پاسخ **گزینه ۱** **راه اول** سعی می‌کنیم با خواص متمم و قواعدی که در بالا دیدیم عبارت را ساده کنیم.

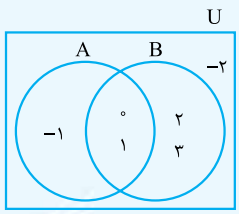
$$((A' - B) \cup A)' \underset{\text{تبدیل تفاضل به اشتراک}}{=} ((A' \cap B')' \cup A)' \underset{\text{دمورگان}}{=} (A' \cap B') \cap A' = A' \cap B' \underset{\text{دمورگان}}{=} (A \cup B)'$$

پس جواب متمم $A \cup B$ است. $A \cup B$ می‌شود $\{-۱, ۰, ۱, ۲, ۳\}$ و متمم آن $\{-۲\}$ است.

راه دوم مجموعه‌ها را بنویسیم: $A = \{۱, ۰, -۱\} \Rightarrow A' = \{۲, -۲, ۳\} \Rightarrow A' - B = \{۲, -۲, ۳\} - \{۰, ۱, ۲, ۳\} = \{-۲\} \xrightarrow{\text{متمم}} (A' - B)' = \{۰, \pm ۱, ۲, ۳\}$

$$\Rightarrow (A' - B)' \cup A = \{۰, \pm ۱, ۲, ۳\} \cup \{۰, ۱, -۱\} = \{۰, \pm ۱, ۲, ۳\} \xrightarrow{\text{متمم}} ((A' - B)' \cup A)' = \{-۲\}$$

این را هم ببینید:



اگر U متناهی باشد A و A' متناهی‌اند. اگر U نامتناهی باشد، A و A' هر دو متناهی نیستند! یا یکی نامتناهی است یا هر دو.

مثلاً با مجموعهٔ مرجع $\mathbb{N}$، متمم هر مجموعهٔ متناهی، نامتناهی است اما متمم یک مجموعهٔ نامتناهی می‌تواند متناهی باشد یا نباشد. مثلاً متمم $\{۳, ۴, ۵, \ldots\}$ می‌شود $\{۱, ۲\}$ و متمم $\{۱, ۳, ۵, ۷, \ldots\}$ می‌شود $\{۲, ۴, ۶, \ldots\}$. دیدید؟!

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۶۶- در مورد کدام دو مجموعهٔ زیر، متمم A نسبت به B قابل تعریف است؟ *(کتاب درسی)*

۱) $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ ، $B = \{۱, ۴\}$ ۲) $A = \{۱, ۵\}$ ، $B = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$

۳) $A = \{۵, ۶\}$ ، $B = \{۱, ۵, ۶, ۹\}$ ۴) $A = \{۱, ۳, ۵, ۷\}$ ، $B = \{۲, ۵, ۷, ۹, ۱۰\}$

۶۷- فرض کنیم $U = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ مجموعهٔ مرجع باشد و $A = \{۱, ۲, ۳\}$ و $B = \{۲, ۴\}$، کدام عبارت نادرست است؟ *(کتاب درسی)*

۱) $B' - A' = \{۱, ۳\}$ ۲) $A' \cap B' = (A \cup B)'$ ۳) $A - (A \cap B) = \{۱, ۳\}$ ۴) $A' \cup B' = \{۵, ۲\}$

۶۸- اگر $U = \{۱, ۲, ۳, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹\}$ مجموعهٔ مرجع و $A = \{۱, ۳, ۷, ۸\}$، $B = \{۳, ۶\}$ و $C = \{۵, ۹\}$ باشد، مجموعهٔ $A \cap (B' \cap C')$ چند عضو دارد؟ *(کتاب درسی)*

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۶۹- اگر $\mathbb{R}$ مجموعهٔ مرجع باشد، متمم مجموعهٔ $A=\{2x+3 \mid -1 \le x < 7\}$ کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) $(-\infty,1)\cup(17,+\infty)$ ۲) $(-\infty,1]\cup[17,+\infty)$ ۳) $(-\infty,1)\cup[17,+\infty)$ ۴) $(-\infty,-1)\cup(17,+\infty)$

۷۰- اگر $\mathbb{Z}-\mathbb{W}$ مجموعهٔ مرجع باشد، متمم مجموعهٔ $A=\{-1,-2,-3\}$ کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) $\{\ldots,-6,-5,-4\}$ ۲) $\{\ldots,-5,-4,0,1,2,\ldots\}$ ۳) $\{0,1,2,\ldots\}$ ۴) $\{\ldots,-5,-4,1,2,\ldots\}$

۷۱- متمم مجموعهٔ $\{1,2,3,4\}$ نسبت به مجموعهٔ مرجع $[\frac{1}{2},4]$ از اجتماع حداقل چند بازه ساخته شده است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۲- اگر $A'=[-2,3]$ و $B=(-1,5]$ و مجموعهٔ مرجع $\mathbb{R}$ باشد، بزرگ‌ترین عضو مجموعه‌های $A'\cup B$ و $A\cap B$ چه‌قدر اختلاف دارند؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۳

۷۳- اگر $U=\{2,+\infty)$ مجموعهٔ مرجع و $A=\{x \mid x \le 9, x\in U\}$ ، $B=(3,5]$ و $C=\{x \mid x \ge 7\}$ باشد، حاصل $B'\cap(A-C')$ کدام است؟

۱) $(7,9]$ ۲) $[7,9]$ ۳) $(5,7]$ ۴) $\varnothing$

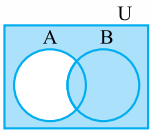
۷۴- اگر $U=\{0,\pm1,\pm2,3,4\}$ مجموعهٔ مرجع و $A=\{x \mid x^2 \le 5\}$ و $B=\{x \mid \sqrt{5-\sqrt{x}} \in \mathbb{W}\}$ ، آن‌گاه مجموعهٔ $A'-(B-A)$ چندعضوی است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۷۵- کدام نادرست است؟

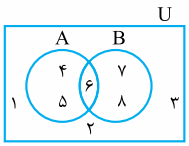
۱) $A\subset B \Leftrightarrow B'\subset A'$ ۲) $A-B=\varnothing \Rightarrow A\subset B$ ۳) $A\cap C=B\cap C \Rightarrow A=B$ ۴) $A\cap B=A \Rightarrow A\subset B$

۷۶- نمودار ون مقابل مربوط به کدام مجموعه است؟



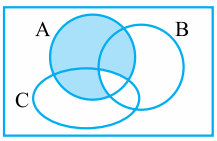
۱) $A'\cap B$ ۲) $A'\cup B$
۳) A' ۴) $A'\cup B'$

۷۷- با توجه به نمودار زیر، $A'\cap(B-A)'$ کدام است؟



۱) $\{1,2,3\}$
۲) $\{1,2,3,6\}$
۳) $\{1,2,3,7,8\}$
۴) $\{4,5,7,8\}$

۷۸- مطابق شکل زیر، فرض کنید A، B و C، سه مجموعه باشند، کدام مورد برای قسمت رنگی، نادرست است؟



۱) $(A-B)\cup(A-C)$
۲) $A\cap(B'\cup C')$
۳) $A-(B\cap C)$
۴) $A-(B\cup C)$

۷۹- اگر A و B دو مجموعهٔ غیرتهی باشند، $(A\cap B')-(B-A)$ برابر کدام مجموعه است؟

۱) B' ۲) $\varnothing$ ۳) $A\cap B$ ۴) $A-B$

۸۰- متمم مجموعهٔ $A-(B-A)'$، کدام است؟

۱) $A\cup B$ ۲) $A\cap B$ ۳) A ۴) B

۸۱- مجموعهٔ $A'\cap(A\cup B)\cap(A-B)'$ برابر کدام است؟

۱) $B-A$ ۲) B ۳) $\varnothing$ ۴) A'

۸۲- متمم مجموعهٔ $[A-(A-B)]\cup(A\cap B)'$ کدام است؟

۱) A ۲) B' ۳) $A'\cup B'$ ۴) $\varnothing$

۸۳- اگر A و B دو مجموعهٔ ناتهی از مجموعهٔ مرجع U باشند، مجموعهٔ $A'\cup((B\cap A)\cap[(B\cup A)\cap B])$ با کدام مجموعه برابر است؟

۱) $(A-B)'$ ۲) $B-A$ ۳) B ۴) $\varnothing$ (سراسری ریاضی ۱۴۰۱)

۸۴- فرض کنید A و B دو مجموعهٔ غیرتهی و جدا از هم، با یک مجموعهٔ مرجع باشند. کدام رابطه نادرست است؟ (خارج ریاضی ۹۹)

۱) $A\subset B'$ ۲) $A-B'=\varnothing$ ۳) $A\cap B'=A$ ۴) $(A\cup B)'=\varnothing$

۸۵- اگر A و B دو مجموعهٔ غیرتهی با شرط $A\subset B$ باشند، آن‌گاه کدام رابطه نادرست است؟ (سراسری ریاضی ۹۹)

۱) $B-A'=A$ ۲) $A-B'=A$ ۳) $A\cap B'=\varnothing$ ۴) $B\cap A'=\varnothing$

۸۶- اگر U مجموعهٔ مرجع و $A'\cap B'=A'\cup B$ باشد، کدام مورد درست است؟ (خارج ریاضی ۱۴۰۱)

۱) $A=B$ ۲) $A=\varnothing$ ۳) $B=U$ ۴) $B=\varnothing$

۸۷- اگر A و B دو مجموعهٔ ناتهی از مجموعهٔ مرجع U باشند، مجموعهٔ $[(A\cap B)\cup(A-B)]'\cap[(A\cap B)-B]$ با کدام مجموعه برابر است؟ (خارج ریاضی ۱۴۰۱)

۱) A ۲) $\varnothing$ ۳) $A-B$ ۴) $A'-B'$

۸۸- اگر $x \in (B-A) \cap (C \cup D)$، کدام گزاره می‌تواند نادرست باشد؟

۱) $x \notin A$ ۲) $x \in B$ ۳) $x \in D$ ۴) $x \notin C' \cap D'$

۸۹- اگر $\mathbb{N}$ مجموعهٔ مرجع باشد، چندتا از عبارت‌های زیر درست است؟ (کتاب درسی)

الف) اگر مجموعهٔ A نامتناهی باشد، A' متناهی است.

ب) اگر مجموعهٔ B متناهی باشد، B' نامتناهی است.

پ) اگر مجموعهٔ A نامتناهی و مجموعهٔ B متناهی باشد، مجموعهٔ $A' \cup B'$ نامتناهی است.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۹۰- اگر مجموعهٔ A نامتناهی باشد و هر عضو B، عضوی از A نیز باشد، کدام دو مجموعهٔ زیر اشتراکی ندارند؟

۱) $A \cup B'$, $A \cap B$ ۲) B' , $A-B$ ۳) B' , A' ۴) B , $A' \cup B'$

۹۱- مجموعهٔ A دارای ۵۱۲ زیرمجموعه است. مجموعهٔ $A \cap B$ دارای ۳ عضو است. تعداد زیرمجموعه‌های $(B \cup A')'$ کدام است؟ (خارج ریاضی ۹۸)

۱) ۱۶ ۲) ۳۲ ۳) ۴۸ ۴) ۶۴

۹۲- اگر $\mathbb{N}$ مجموعهٔ مرجع و $A_1 = \{1\}$، $A_2 = \{2,3\}$، $A_3 = \{4,5,6\}$ و $A_4 = \{7,8,9,10\}$، مجموعهٔ A'_1 چند عضو دورقمی و مضرب ۵ دارد؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۷

(درس ۵)

تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه

اگر A و B دو مجموعه باشند، تعداد اعضای $A \cup B$ معمولاً از جمع تعداد عضوهای A و B کم‌تر است! چون عضوهای مشترک A و B را در $A \cup B$ یک بار می‌نویسیم!

با کمی دقت داریم: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

پس برای دو مجموعهٔ جدا از هم (که اشتراک ندارند) می‌توان نوشت: $n(A \cap B) = 0 \Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

در صورت سؤال $A \cup B$ به صورت «اعضایی که در A یا B هستند» یا «عضو حداقل یکی از دو مجموعه» می‌آید.

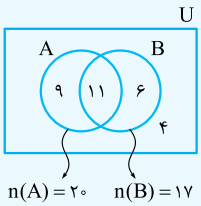
تست در یک کلاس ۳۰ نفری ۱۷ نفر در فیزیک، ۲۰ نفر در ریاضی و ۱۱ نفر در هر دو درس به کلاس تقویتی می‌روند. چند نفر در حداقل یکی از دو درس به کلاس تقویتی می‌روند؟

۱) ۲۵ ۲) ۲۶ ۳) ۲۷ ۴) ۲۸

پاسخ گزینهٔ ۳ اگر ریاضی را با A و فیزیک را با B نشان دهیم، داریم:

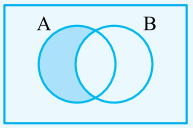
$$\underbrace{n(A \cup B)}_{\text{حداقل یکی از دو درس}} = \underbrace{n(A)}_{\text{ریاضی}} + \underbrace{n(B)}_{\text{فیزیک}} - \underbrace{n(A \cap B)}_{\text{هر دو}} \Rightarrow n(A \cup B) = ۲۰ + ۱۷ - ۱۱ = ۲۶$$

ون را ببینید:

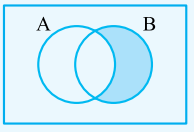


حالا به این‌ها دقت کنید:

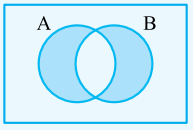
تعداد افرادی که فقط به کلاس ریاضی می‌روند: $n(A-B) = ۲۰ - ۱۱ = ۹$



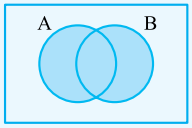
تعداد افرادی که فقط به کلاس فیزیک می‌روند: $n(B-A) = ۱۷ - ۱۱ = ۶$



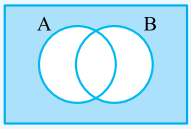
تعداد افرادی که فقط به یک کلاس می‌روند: $\underbrace{n(A-B)}_{\text{فقط ریاضی}} + \underbrace{n(B-A)}_{\text{فقط فیزیک}} = ۹ + ۶ = ۱۵$



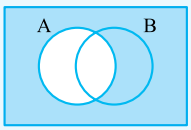
تعداد افرادی که حداقل به یک کلاس می‌روند: $n(A \cup B) = ۲۶$



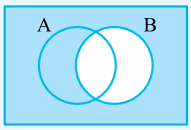
تعداد افرادی که به هیچ کلاسی نمی‌روند: $n(\underbrace{A' \cap B'}_{\text{نه ریاضی و نه فیزیک}}) = n(A \cup B)' = n(U) - n(A \cup B) = ۳۰ - ۲۶ = ۴$



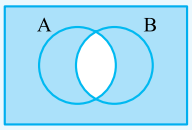
تعداد افرادی که به کلاس ریاضی نمی‌روند: $n(A') = n(U) - n(A) = ۳۰ - ۲۰ = ۱۰$



تعداد افرادی که به کلاس فیزیک نمی‌روند: $n(B') = n(U) - n(B) = ۳۰ - ۱۷ = ۱۳$



تعداد افرادی که حداکثر به یک کلاس می‌روند: $n(\underbrace{(A \cap B)'}_{\text{به هر دو کلاس نمی‌روند.}}) = n(U) - n(A \cap B) = ۳۰ - ۱۱ = ۱۹$



کیف کردید؟ تمام این سؤال‌ها را با نمودار ون جواب دادیم، ولی اگر دوست دارید حفظ کنید، این‌ها هم هست:

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) \qquad n(A') = n(U) - n(A) \qquad n(A' \cap B') = n(U) - n(A \cup B)$$

تست **اگر A مجموعهٔ اعداد زوج دورقمی و B مجموعهٔ اعداد فرد کم‌تر از ۱۰۰ باشد، $A \cup B$ چند عضو دارد؟**

۱) ۹۰ ۲) ۹۴ ۳) ۹۵ ۴) ۹۶

پاسخ گزینهٔ A دارای ۴۵ عضو است (کلاً ۹۰تا عدد دورقمی از ۱۰ تا ۹۹ داریم که ۴۵تای آن‌ها زوج‌اند). B دارای ۵۰ عضو است (از ۱ تا ۱۰۰ پنجاه‌تا عدد فرد داریم).

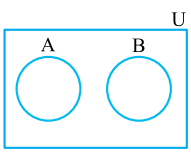
اما مهم‌تر از هر چیز، A و B عضو مشترکی ندارند، چون اعضای A زوج و اعضای B فرد هستند. پس دو مجموعهٔ مجزا داریم. پس:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) = ۴۵ + ۵۰ = ۹۵$$

می‌شود از آن طرف هم به ماجرا نگاه کرد. اگر $A \cup B$ را بنویسیم اعداد زوج دورقمی و اعداد فرد کم‌تر از ۱۰۰ می‌آیند. پس از بین ۱ تا ۹۹، فقط اعداد زوج یک‌رقمی یعنی ۲، ۴، ۶ و ۸ غایب هستند. بنابراین تعداد اعضای اجتماع می‌شود:

$$۹۹ - ۴ = ۹۵$$

برای دو مجموعهٔ جدا از هم A و B داریم: $A \cap B = \varnothing \qquad n(A \cup B) = n(A) + n(B)$



هم‌چنین: $A - B = A \ , \ B - A = B$

و نیز: $A \subseteq B' \ , \ B \subseteq A'$

تست **اگر اجتماع دو مجموعهٔ A و B دارای ۳۰ عضو بوده و $۴n(A \cap B) = n(A) = n(B) + ۵$ باشد، آن‌گاه چند عضو فقط به A تعلق دارند؟**

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

پاسخ گزینهٔ اگر تعداد اعضای $A \cap B$ را x بنامیم، داریم:

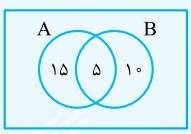
$$\begin{cases} n(A) = ۴n(A \cap B) = ۴x \\ n(B) + ۵ = ۴x \end{cases} \Rightarrow n(B) = ۴x - ۵$$

پس:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$۳۰ = ۴x + ۴x - ۵ - x \Rightarrow ۳۰ = ۷x - ۵ \Rightarrow x = ۵$$

پس مجموعهٔ A دارای $۴ \times ۵ = ۲۰$ عضو است که ۵تای آن‌ها با B مشترک‌اند و $n(A - B) = ۲۰ - ۵ = ۱۵$، یعنی ۱۵ عضو فقط به A تعلق دارند.



تست اگر $n(U)=۱۰۰$ و $n(A\cap B)=۱۲=\frac{n(A')}{۳}=\frac{n(B)}{۲}$، آن‌گاه کدام نادرست است؟

۱) $n(A'\cap B)=۲۰$ ۲) $n(B'\cap A)=۶۰$ ۳) $n(A'\cap B')=۱۶$ ۴) $n(A'\cup B')=۸۶$

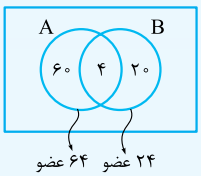
پاسخ کزینه اول برویم سراغ رابطهٔ $\frac{n(B)}{۲}=\frac{n(A')}{۳}=۳n(A\cap B)=۱۲$، پس داریم:

$$n(B)=۲\times ۱۲=۲۴$$

$$۳n(A\cap B)=۱۲ \Rightarrow n(A\cap B)=۴$$

$$\frac{n(A')}{۳}=۱۲ \Rightarrow n(A)=n(U)-n(A')=۱۰۰-۳۶=۶۴$$

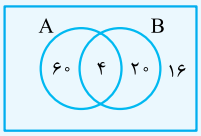
اعداد را در نمودار ون می‌آوریم:



پس در $A\cup B$، جمعاً $۲۰+۴+۶۰$ یعنی ۸۴ عضو داریم. این‌جوری هم ببینید:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۶۴+۲۴-۴=۸۴$$

بنابراین متمم $A\cup B$ یعنی $A'\cap B'$ دارای $۱۰۰-۸۴=۱۶$ عضو است.



پس تا این‌جا فهمیدیم:

$$n(A'\cap B')=۱۶$$

$$\underbrace{n(B'\cap A)}_{\text{همان A-B}}=۶۰ \text{ و } \underbrace{n(A'\cap B)}_{\text{همان B-A}}=۲۰$$

بنابراین حتماً ۴ نادرست است. ببینید:

$$n(A'\cup B')=n(U)-n(A\cap B)=۱۰۰-۴=۹۶$$

در درس شما نیست، اما ببینید که: $n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$

و در حالتی که مجموعه‌ها دوبه‌دو مجزا هستند:

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)$$

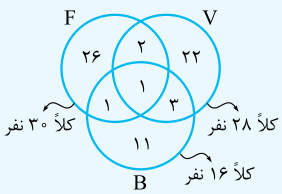
تست در میان دانش‌آموزان سال دهم ۲۸ نفر عضو تیم والیبال، ۱۶ نفر بسکتبال و ۳۰ نفر فوتبال هستند. اگر ۴ نفر در هر دو تیم بسکتبال و والیبال، ۳ نفر در فوتبال و والیبال و ۲ نفر در بسکتبال و فوتبال مشترک باشند و فقط ۱ نفر عضو هر سه تیم باشد، چند نفر عضو حداقل یک تیم هستند؟

۱) ۷۴ ۲) ۶۷ ۳) ۶۶ ۴) ۶۵

پاسخ کزینه سؤال این را می‌خواهد:

$$n(F\cup V\cup B)=n(F)+n(V)+n(B)-n(F\cap V)-n(B\cap V)-n(F\cap B)+n(F\cap V\cap B)=۳۰+۲۸+۱۶-۳-۴-۲+۱=۶۶$$

حوصلهٔ چالش بیشتر دارید؟ به ون نگاه کنید:



به این سؤالات جواب دهید!

۱) چند نفر فقط عضو تیم فوتبال‌اند؟ ۲۶

۲) چند نفر فقط عضو یک تیم‌اند؟ $۲۶+۲۲+۱۱=۵۹$

۳) چند نفر عضو تیم والیبال هستند و در فوتبال نیستند؟ $۲۲+۳=۲۵$

۴) چند نفر عضو دقیقاً ۲ تیم هستند؟ $۱+۲+۳=۶$

۵) چند نفر عضو حداقل ۲ تیم هستند؟ $۱+۱+۳+۲=۷$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۹۳- اگر $n(A)=۱۵$، $n(A\cap B)=۵$ و $n(A\cup B)=۳۰$، آن‌گاه $n(B)$ کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

۹۴- در یک کلاس ۳۱ نفری، تعداد ۱۴ نفر از دانش‌آموزان عضو گروه سرود و ۱۹ نفر از آن‌ها عضو گروه تئاترند. اگر ۵ نفر از دانش‌آموزان این کلاس عضو هر دو گروه باشند، چند نفر از دانش‌آموزان حداقل در یکی از دو گروه قرار دارند؟ (کتاب درسی)

۱) ۲۶ ۲) ۱۹ ۳) ۲۸ ۴) ۲۹

۹۵- اگر دو مجموعهٔ A و B دارای تعداد عضو مساوی باشند و تعداد اعضای A، چهار برابر تعداد اعضای مشترک A و B باشد، تعداد عضوهای $A\cup B$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

۹۶- اگر A و B دو زیرمجموعه از مجموعهٔ مرجع U باشند و بدانیم که: $n(A)=۱۰$، $n(A')=۱۲$ و $n(B)=۷$، آن‌گاه $n(B')$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۱ ۳) ۱۳ ۴) ۱۵

۹۷- اگر A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعهٔ مرجع U باشند، به طوری که $n(U)=۱۰۰$، $n(A)=۶۰$، $n(B)=۴۰$ و $n(A\cap B)=۲۰$، تعداد اعضای مجموعهٔ $A-B$ چه‌قدر بیشتر از تعداد اعضای مجموعهٔ $A'\cap B'$ است؟ (کتاب درسی)

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

۹۸- اگر $3n(A)=2n(B)=6n(A\cap B)$ باشد، حاصل $\frac{n(A-B)}{n(B\cap A')}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۹۹- اگر $n(A)=۳۲$، $n(A-B)=۱۴$ و $n(A\cup B)=۶۰$، مقدار $n(B-A)$ چند برابر $n(A\cap B)$ است؟

۱) تقریباً ۱/۳۳ ۲) تقریباً ۱/۴۴ ۳) تقریباً ۱/۵۵ ۴) تقریباً ۱/۶۶

۱۰۰- مجموعهٔ A دارای ۱۴ و مجموعهٔ B دارای ۱۷ و مجموعهٔ $A\cap B$ دارای ۵ عضو است، چند عضو فقط در یکی از این دو مجموعه هستند؟

۱) ۱۹ ۲) ۲۰ ۳) ۲۱ ۴) ۲۲

۱۰۱- در یک نظرسنجی از ۱۱۰ مشتری یک فروشگاه زنجیره‌ای، مشخص شد که ۷۰ نفر آن‌ها در یک ماه گذشته از محصولات شرکت A و ۵۷ نفرشان از محصولات شرکت B خرید کرده‌اند. هم‌چنین ۳۲ نفر از آنان نیز در این مدت از هر دو شرکت خرید کرده‌اند. چه تعداد از این ۱۱۰ نفر دقیقاً از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند؟ (کتاب درسی)

۱) ۶۳ ۲) ۷۷ ۳) ۹۵ ۴) ۱۰۳

۱۰۲- یک دورهٔ جشنوارهٔ فیلم کوتاه با شرکت ۲۱ فیلم در موضوعات مختلف در حال برگزاری است که در بین آن‌ها ۷ فیلم پویانمایی و ۸ فیلم طنز وجود دارد، به طوری که ۳تا از فیلم‌های پویانمایی با مضمون طنز می‌باشند. چند فیلم این جشنواره پویانمایی یا غیرطنز است؟ (کتاب درسی)

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۳

۱۰۳- در یک کلاس ۳۹ نفری، ۱۶ نفر در گروه ورزش، ۱۲ نفر در گروه روزنامه‌دیواری و ۹ نفر فقط در گروه ورزش هستند. چند نفر آنان عضو هیچ‌یک از این دو گروه نیستند؟ (سراسری ریاضی ۹۸)

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸

۱۰۴- در یک کلاس ۴۲ نفری، ۱۵ نفر عضو گروه آزمایشگاهی و ۱۲ نفر عضو گروه فوتبال و ۷ نفر آنان عضو هر دو گروه هستند. چند نفر از آنان عضو هیچ‌یک از این دو گروه نیستند؟ (خارج ریاضی ۹۸)

۱) ۱۵ ۲) ۱۸ ۳) ۲۱ ۴) ۲۲

۱۰۵- در یک کلاس ۲۵ نفری، تعداد ۱۵ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۱ نفر عضو تیم بسکتبال کلاس هستند. اگر ۵ نفر از دانش‌آموزان این کلاس عضو هیچ‌یک از این دو تیم نباشند، چند نفر از آن‌ها عضو هر دو تیم هستند؟ (کتاب درسی)

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

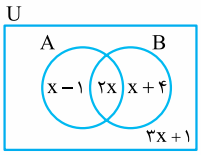
۱۰۶- در یک روز از بین ۱۰۴ مورد جرم گزارش‌شده به کلانتری، ۷۰ مورد در شب و ۶۱ مورد در حومهٔ شهر بوده است. حداقل چند مورد جرم در شب و درون شهر گزارش شده است؟

۱) ۹ ۲) ۲۷ ۳) ۲۱ ۴) ۲۹

۱۰۷- اگر $n(A\cup B)=۷۵$، $n(A)=3x+۱۰$، $n(B)=2y+۵$، $n(A\cap B)=x+y-۲۰$ و $3y=2x$، چند عضو از مجموعهٔ مرجع در A هست ولی در B نیست؟

۱) ۴۰ ۲) ۴۵ ۳) ۵۰ ۴) ۵۵

۱۰۸- در نمودار ون مقابل تعداد اعضای هر قسمت درون آن نوشته شده است. اگر $n(A'-B)=۱۰$ باشد، چند عضو حداقل به یکی از مجموعه‌های A و B تعلق دارند؟



۱) ۹ ۲) ۸
۳) ۱۳ ۴) ۱۵

۱۰۹- اگر $n(A-B)=۳$ و $n(B-A)=۷$ و تعداد اعضای B دقیقاً دو برابر تعداد اعضای A باشد، A و B چند عضو مشترک دارند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱۰- اگر مجموعهٔ A دارای ۵ عضو، مجموعهٔ B دارای ۶ عضو و مجموعهٔ $A\cap B$ دارای ۲ عضو باشد، مجموعهٔ $(A\cup B)'\cup(A\cap B')$ چند عضو دارد؟

۱) ۷ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۱۱۱- سارا می‌خواهد هم‌کلاسی‌های خود در مدرسه و کلاس زبان را به تولدش دعوت کند. اگر در مدرسه ۲۴ هم‌کلاسی داشته باشد و در کل ۴۷ نفر مهمان داشته باشد، تعداد هم‌کلاسی‌های کلاس زبان او حتماً در کدام بازه است؟

۱) $[۰,۲۳]$ ۲) $[۰,۴۷]$ ۳) $[۲۳,۴۷]$ ۴) $[۲۳,۲۴]$

۱۱۲- در یک نظرسنجی از ۵۰ نفر، ۲۸ نفر به بستنی و ۳۲ نفر به آبمیوه علاقه دارند. حداکثر چند نفر به هیچ‌کدام علاقه ندارند؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۰

۱۱۳- اگر مجموعهٔ مرجع دارای ۲۲ عضو و دو زیرمجموعهٔ A و B در آن دارای ۱۷ و ۱۲ عضو باشند، $A-B$ حداکثر چند عضو دارد؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۰ ۳) ۱۷ ۴) ۷

۱۱۴- مجموعهٔ A دارای ۳۶ عضو و مجموعهٔ B دارای ۲۸ عضو است. اشتراک آن‌ها ۱۵ عضو دارد. اگر ۱۶ عضو از مجموعهٔ A حذف شود، از اشتراک آن‌ها ۹ عضو حذف می‌شود. تعداد عضوهای اجتماع مجموعهٔ جدید با مجموعهٔ B، کدام است؟

۱) ۴۰ ۲) ۴۲ ۳) ۳۳ ۴) ۳۵

۱۱۵- اجتماع دو مجموعهٔ A و B دارای ۴۰ عضو است. مجموعه‌های $(A-B)$ و $(B-A)$ به ترتیب ۱۲ و ۱۸ عضو دارند. اگر از هر یک از مجموعه‌های A و B، ۹ عضو برداشته شود، از مجموعه‌های اشتراک آن‌ها ۴ عضو کم می‌شود، تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعهٔ جدید، کدام است؟

۱) ۲۲ ۲) ۲۳ ۳) ۲۴ ۴) ۲۶

۱۱۶- در بیمارستانی با ۴۰۰ بیمار، بیماران ممکن است دارای سه بیماری A، B و C باشند. اگر ۱۶۰ نفر مبتلا به A، ۳۰۰ نفر مبتلا به B، ۸۰ نفر مبتلا به A و C، ۹۰ نفر مبتلا به B و C، ۱۰۰ نفر مبتلا به B و A و ۵۰ نفر مبتلا به A، B و C باشند، چند بیمار فقط بیماری C را دارند؟

۱) ۱۶۰ ۲) ۹۰ ۳) ۶۰ ۴) ۴۰

۱۱۷- دو مجموعهٔ $A=\{1,4,7\}$ و $B=\{x\in U \mid x<3\}$ جدا از هم هستند. U کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) $\mathbb{Q}'$ ۲) $\mathbb{Z}-\mathbb{W}$ ۳) $\mathbb{Q}-\mathbb{Z}$ ۴) $\mathbb{Z}\cap\mathbb{N}$

۱۱۸- چند عدد طبیعی کم‌تر یا مساوی ۱۰۰ بر ۲ یا ۳ بخش‌پذیرند؟

۱) ۸۷ ۲) ۶۷ ۳) ۶۶ ۴) ۸۸

۱- گزینهٔ ۴ با توجه به شکل، $4\in(A\cup B)$ و $A\subseteq C$ درست است، اما $3\subseteq A$ درست نیست؛ چون ۳ عضو است و در رابطهٔ $\subseteq$ باید مجموعه داشته باشیم و $2\in(A\cup B)$ هم درست نیست، چون ۲ خارج از A و B است؛ پس می‌شود ۲ گزارهٔ نادرست.

۲- گزینهٔ ۴ اگر گزینه‌ها را بررسی کنیم، می‌بینیم که $\{1\}\subseteq A$ نادرست است؛ چون $\{1\}$ عضوی از مجموعهٔ A است. درستی بقیهٔ گزینه‌ها را خودتان بررسی کنید!

۳- گزینهٔ ۱ ۱) B زیرمجموعهٔ C نیست، چون ۲ عضو مجموعهٔ B است که آن را در C نمی‌بینیم (به عنوان عضو نمی‌بینیم).

۲) A زیرمجموعهٔ B است، چون تنها عضو A را در B می‌بینیم.

۳) A عضو B هم هست، چون A را به صورت عضو در B داریم، ببینید:

$$B=\{2,\underbrace{\{2\}}_{\text{این A است.}}\}=\{2,A\}$$

۴) B عضو C است، چون خود B را به طور کامل در C داریم:

$$C=\{\{2\},\{2,\{2\}\}\}=\{A,B\}$$

۴- گزینهٔ ۱ تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) مجموعهٔ $A-B$ شامل عضوهایی از A است که در B نباشند. فقط عضو سوم یعنی $\{1,2,3\}$ در مجموعهٔ A در B نیست (اعضای ۱ و ۲ از A، در B هم هستند)، پس $A-B=\{\{1,2,3\}\}$ که با C مساوی نیست.

نکته در واقع $A-B=\{C\}$ و ۴) درست است.

۲) $B-C$ مجموعهٔ اعضایی است که در B هستند و در C نیستند که $\{1,2\}$ این‌طور است، پس $B-C=\{\{1,2\}\}$ و تهی نیست.

۳) همان‌طور که دیدیم $B-C=\{\{1,2\}\}$، پس ۴) درست شد!

۵- گزینهٔ ۲ **راه اول** کافی است $A\cup B$ و $A\cap B$ را پیدا کنیم:

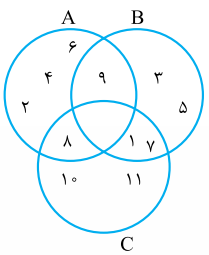
$$\begin{matrix}A=\{1,2,3,4\}\\B=\{2,4,6,8\}\end{matrix}\Rightarrow\begin{cases}A\cup B=\{1,2,3,4,6,8\}\\A\cap B=\{2,4\}\end{cases}$$

$$\Rightarrow(A\cup B)-(A\cap B)=\{1,3,6,8\}\Rightarrow\text{چهار عضو}$$

راه دوم می‌دانیم $(A\cup B)-(A\cap B)=(A-B)\cup(B-A)$، پس:

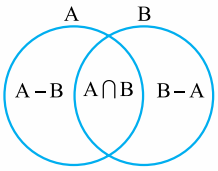
$$\begin{matrix}A-B=\{1,3\}\\B-A=\{6,8\}\end{matrix}\Rightarrow(A-B)\cup(B-A)=\{1,3,6,8\}\Rightarrow\text{چهار عضو}$$

۶- گزینهٔ ۲ بهتر است مجموعه‌ها را با نمودار ون نشان دهیم که بررسی گزینه‌ها راحت‌تر باشد:

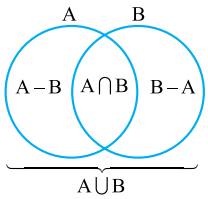


حالا برویم سراغ گزینه‌ها: در ۱)، $n((A\cup B)-C)=6$، پس ۱) نادرست است. درستی بقیهٔ گزینه‌ها را خودتان بررسی کنید.

۷- گزینهٔ ۲ $A-(A-B)$ همان $A\cap B$ است. $B-(B-A)$ نیز همان $A\cap B$ است. علتش هم این نمودار، پس در واقع اجتماع $A\cap B$ با خودش را می‌خواهیم که همان $A\cap B=\{3,6\}$ می‌شود که دو عضو دارد.



۸- گزینهٔ ۴ بیایید اول سؤال را با نمودار بررسی کنیم:



$A-(A\cap B)$ می‌شود $A-B$. حالا سؤال تفاضل $A\cup B$ و این مجموعه را می‌خواهد، یعنی $(A\cup B)-(A-B)$ که با توجه به شکل می‌شود B، پس:

$$(A\cup B)-\underbrace{[A-(A\cap B)]}_{(A-B)}=(A\cup B)-(A-B)=B=\{2,4,5,6\}$$

و دارای ۴ عضو است.

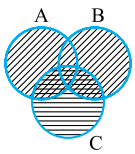
۹- گزینهٔ ۴ اعضای A عبارت‌اند از: $A=\{10,11,12,\ldots,98,99\}$

حالا B شامل ۷ برابر اعضای A است: $B=\{70,77,84,\ldots,\underbrace{693}_{7\times99}\}$

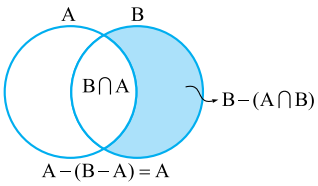
عضوهای مشترک A و B عبارت‌اند از اعداد دورقمی مضرب ۷ با شروع از ۷۰، یعنی ۷۰,۷۷,۸۴,۹۱,۹۸؛ یعنی $A\cap B$ پنج عضو دارد.

۱۰- گزینهٔ ۳ بدون شرح!

۱۱- گزینهٔ ۳ اگر $A\cup B$ را با هاشور (////) و C را با هاشور (=) مشخص کنیم ناحیهٔ مشخص‌شده می‌شود: $(A\cup B)\cap C$.

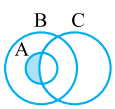


۱۲- گزینهٔ ۲ طبق نمودار روبه‌رو $B-(A\cap B)$ همان $B-A$ است.



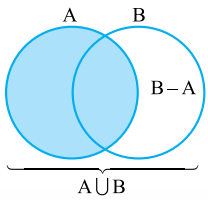
پس $A-(B-A)$ را می‌خواهیم و چون A و $B-A$ اشتراکی ندارند، جواب تفاضل همان A می‌شود: $A-(B-A)=A$

۱۳- گزینهٔ ۳ اول یک نمودار را با توجه به شرایط سؤال می‌کشیم:



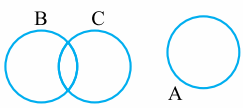
دقت کنید که A زیرمجموعهٔ B است و باید درون B قرار گیرد. حالا $A\cap(B-C)$ ناحیهٔ سایه‌زده از A است و $A\cap B\cap C'$ ناحیهٔ سایه‌نخوردهٔ A است که اشتراکی ندارند، پس جواب می‌شود همان $A\cap(B-C)$ که با توجه به شکل $A\cap C'$ است (همان $A-C$).

۱۴- گزینهٔ ۳ $A\cup(B-A)$ همان $A\cup B$ است:



پس سؤال گفته $A\cup B=B$ و در درس‌نامه دیدیم که این یعنی $A\subseteq B$.

۱۵- گزینهٔ ۴ A با هیچ‌کدام از مجموعه‌های B و C اشتراک ندارد. این‌شکلی:



پس A با اجتماع آن‌ها هم اشتراکی ندارد: $A\cap(B\cup C)=\varnothing$

در مورد اشتراک B و C نظری نمی‌توان داد (۱ و ۲ نیستند) و چون $B-C$ قسمتی از B است با A اشتراکی ندارد.

۱۶- گزینهٔ ۳ مجموعه‌های A_4 و A_3 را می‌نویسیم (به جای n اعداد ۳ و ۴ را می‌گذاریم): $A_3=\{m\in\mathbb{Z}\,|\,m\geq-3,2^m\leq3\}=\{-3,-2,-1,0,1\}$

$A_۴=\{m\in\mathbb{Z}\,|\,m\geq -۴, ۲^m\leq ۴\}=\{-۴,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲\}$

پس $A_۴\subseteq A_۳$ و اشتراک آن‌ها می‌شود، $A_۳$ که ۵ عضو و ۳۲ زیرمجموعه دارد.

۱۷- گزینهٔ $\sqrt{۲}$ را که می‌دانیم گنگ است، اما سایر اعداد که نمایش اعشاری با ارقام مشخص دارند گویا هستند.

۱۸- گزینهٔ درستی ۲ را در درس‌نامه دیدیم.

۱۹- گزینهٔ تمام اعداد حسابی، صحیح هم هستند، پس $\mathbb{W}-\mathbb{Z}$ تهی است. تمام اعداد طبیعی، گویا هستند پس $\mathbb{N}\cap\mathbb{Q}'$ عضوی ندارد. عدد صحیح بین ۲ و ۳ هم نداریم. اما در ۳ اعداد طبیعی بین ۲ و ۲- عبارت‌اند از: $\{۱,۲\}$

۲۰- گزینهٔ با توجه به رابطهٔ $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$ و هر کدام از مجموعه‌های داده‌شده درستی هر کدام از گزاره‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) نادرست $\underbrace{\mathbb{Z}\cap\mathbb{W}}_{\mathbb{W}}=\mathbb{N}$ ۲) نادرست $\underbrace{\mathbb{W}-\mathbb{Z}}_{\varnothing}=\underbrace{\mathbb{Q}-\mathbb{Q}'}_{\mathbb{Q}}$

۳) نادرست $\underbrace{\mathbb{W}\cap\mathbb{Q}}_{\mathbb{W}}=\mathbb{N}$ ۴) نادرست $\underbrace{\mathbb{Z}\cup\mathbb{Q}}_{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$

پس هر چهار گزاره نادرست‌اند.

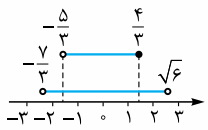
۲۱- گزینهٔ درستی هر کدام از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) درست $\underbrace{\mathbb{Q}'-\mathbb{Q}}_{\mathbb{Q}'}\subseteq\mathbb{Q}'$ ۲) درست $\underbrace{\mathbb{Q}\cap\mathbb{Q}'}_{\varnothing}\subseteq\mathbb{Q}'$

۳) درست $\underbrace{\mathbb{Q}-\mathbb{Q}'}_{\mathbb{Q}}\not\subseteq\mathbb{Q}'$ ۴) نادرست $\underbrace{\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'}_{\mathbb{R}}\subseteq\mathbb{Q}$

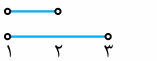
۲۲- گزینهٔ از بین گزاره‌های داده‌شده $\frac{۴}{۳}\in[\frac{۱}{۲},۲)$ و $[-۱,۲)\subseteq\{۰,۱\}$ درست‌اند. خودتان بگویید چرا بقیه نادرست‌اند!

۲۳- گزینهٔ $A-B$ شامل اعضایی است که در A هستند و در B نیستند. اگر محور را رسم کنیم، می‌بینیم اعداد ±۲ در A هستند و در B قرار نیستند؛ بنابراین ۲ عدد صحیح در $A-B$ هست.



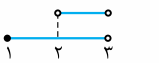
۲۴- گزینهٔ اول حاصل هرکدام از گزینه‌ها را پیدا می‌کنیم:

۱) بازهٔ $(۲,۳]$ است:



۲) بازهٔ $(-\infty,+\infty)$ یعنی کل $\mathbb{R}$ است:

۳) به صورت $[۱,۲]$ است:



۴) بازهٔ $(-۳,۲)$ است:

پس ۳ بسته است.

۲۵- گزینهٔ اول حاصل هر کدام از گزینه‌ها را پیدا می‌کنیم:

۱) $(-۳,۱)\cup(-۲,۲)=(-۳,۲)$

۲) $(-۴,-۲)-(-۳,-۲)=(-۴,-۳]$

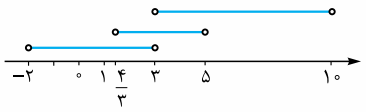
۳) $(۱,۵)-(۳,۴)=(۱,۳]\cup[۴,۵)$

۴) $(۱,۵)\cap(۳,۷)=(۳,۵)$

پس حاصل ۳ یک بازه نیست بلکه اجتماع دو بازه است.

۲۶- گزینهٔ $\mathbb{Z}$ مجموعهٔ اعداد صحیح و $\mathbb{W}$ مجموعهٔ عددهای حسابی‌اند، پس $\mathbb{Z}-\mathbb{W}$ شامل اعداد صحیح منفی است و اشتراک آن با بازهٔ $(-۵,۴]$ به صورت $\{-۱,-۲,-۳,-۴,-۵\}$ است که ۵ عضو دارد.

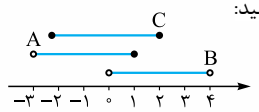
۲۷- گزینهٔ از محور اعداد کمک می‌گیریم:



داریم:

$$(-۲,۳)\cup\underbrace{[(\frac{۴}{۳},۵)\cap(۳,۱۰)]}_{(۳,۵)}=(-۲,۳)\cup(۳,۵)=(-۲,۵)-\{۳\}$$

۲۸- گزینهٔ بازه‌ها را روی محور ببینید:



پس $A\cup C$ به صورت بازهٔ $[-۳,۲)$ است و اگر از آن B را برداریم، تفاضل موردنظر $[-۳,۰)$ خواهد بود که ۳ عضو صحیح $\{-۲,-۱,۰\}$ را دارد.

۲۹- گزینهٔ اول محدودهٔ x را در هر مجموعه تعیین می‌کنیم:

$$A=\{x\,|\,۱<\frac{۲x+۱}{۳}\leq ۵, x\in\mathbb{Q}\}\Rightarrow ۱<\frac{۲x+۱}{۳}\leq ۵$$

$$\Rightarrow ۳<۲x+۱\leq ۱۵\Rightarrow ۲<۲x\leq ۱۴\Rightarrow ۱<x\leq ۷$$

$$\Rightarrow A=\{x\,|\,۱<x\leq ۷, x\in\mathbb{Q}\}$$

$$B=\{x\,|\,۱<\frac{x+۵}{۷}<۳, x\in\mathbb{N}\}\Rightarrow ۱<\frac{x+۵}{۷}<۳$$

$$\Rightarrow ۷<x+۵<۲۱\Rightarrow ۲<x<۱۶$$

$$\Rightarrow B=\{x\,|\,۲<x<۱۶, x\in\mathbb{N}\}=\{۳,۴,۵,\ldots,۱۴,۱۵\}$$

حالا چون اعضای B اعداد طبیعی هستند، پس $A\cap B=\{۳,۴,\ldots,۷\}$ حالا C را روی محور مشخص می‌کنیم و اشتراک $A\cap B$ و C را پیدا می‌کنیم:

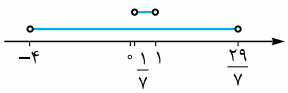
$$C=(-۲,۸)-(-۳,۴)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow C=[۴,۸)$$

پس $A\cap B=\{۳,۴,\ldots,۷\}$ و $C=[۴,۸)$، پس $(A\cap B)\cap C=\{۴,۵,۶,۷\}$ یعنی ۴ عضو مشترک داریم.

۳۰- گزینهٔ اجتماع $(b,۲)\cup(۱,a)$ برابر $(-۲,\frac{۱۵}{۷})$ شده است، پس کوچک‌ترین عدد یعنی b باید برابر ۲- و بزرگ‌ترین عدد یعنی a باید برابر $\frac{۱۵}{۷}$ باشد. حالا مجموعهٔ خواسته‌شده را روی محور نشان می‌دهیم:

$$(a-۲,b+۳)\cap(b-۲,a+۲)=(\frac{۱}{۷},۱)\cap(-۴,\frac{۲۹}{۷})$$



پس اشتراک دو بازه برابر $(\frac{۱}{۷},۱)$ است که در ۱ نشان داده شد.

۳۱- گزینهٔ با توجه به شکل داده‌شده در سؤال $A\cap B$ به صورت $(-\sqrt{۳},\sqrt{۵})$ است، پس داریم:

$$(A\cap B)-C=(-\sqrt{۳},\sqrt{۵})-(-۲,۲]=(۲,\sqrt{۵})$$

که شامل هیچ عدد صحیحی نیست.

۳۲- گزینهٔ اگر بخواهیم اجتماع دو بازهٔ $(-\infty,۲m-۱]$ و $[m+۲,+\infty)$ برابر $\mathbb{R}$ شود، باید طبق شکل‌های زیر:

یا $m+2$ مساوی $2m-1$ باشد یا $m+2$ کوچک‌تر از $2m-1$، پس می‌توانیم بنویسیم: $m+2\le 2m-1 \Rightarrow -m\le -3 \Rightarrow m\ge 3$

۳۳- گزینهٔ x متعلق به بازهٔ $[2x-1,3x+2)$ است؛ بنابراین باید $2x-1\le x<3x+2$ باشد، پس داریم:

$$\begin{cases} 2x-1\le x \Rightarrow x\le 1 \\ x<3x+2 \Rightarrow 2x>-2 \Rightarrow x>-1 \end{cases} \Rightarrow -1<x\le 1$$

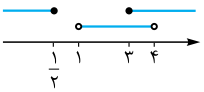
پس فقط دو مقدار صحیح صفر و ۱ داریم.

۳۴- گزینهٔ از $3\in(b-1,2b+1)$ نتیجه می‌گیریم: $b-1<3<2b+1$ و از $2\notin(b-1,2b+1)$ نتیجه می‌گیریم یا $2\le b-1$ یا $2\ge 2b+1$، این نامعادله‌ها را حل می‌کنیم:

$$b-1<3<2b+1 \Rightarrow \begin{cases} b-1<3 \Rightarrow b<4 \\ 2b+1>3 \Rightarrow b>1 \end{cases} \Rightarrow 1<b<4 \quad (I)$$

$$\begin{cases} 2\le b-1 \Rightarrow b\ge 3 \\ \text{یا} \\ 2\ge 2b+1 \Rightarrow b\le \frac{1}{2} \end{cases} \quad (II)$$

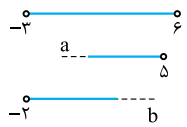
حالا اشتراک (I) و (II) را به دست می‌آوریم:



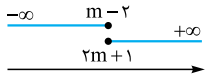
پس محدودهٔ قابل قبول b برابر است با: $[3,4)$

۳۵- گزینهٔ به شکل دقت کنید:

حاصل اجتماع تا ۶ رفته است، پس حتماً $b=6$ است. از طرف دیگر اجتماع از -3 شروع شده، پس $a=-3$ است. بنابراین بازه‌های اولیه $B=(-3,5)$ و $A=(-2,6)$ هستند و داریم: $ab=-18$



۳۶- گزینهٔ اشتراک این دو بازه، تک‌عضوی است، پس باید با توجه به محور مقابل، $m-2=2m+1$ باشد:



$$\Rightarrow m=-3 \Rightarrow m-2=2m+1=a=-5$$

و داریم: $a+m=-8$

۳۷- گزینهٔ بازهٔ اشتراک دو بازهٔ $(a,b)\cap(-1,2]$ با عدد $a+1$ شروع می‌شود، پس یا $a+1=a$ است که ممکن نیست یا $a+1=-1$ است که در این صورت $a=-2$. حالا به جای a می‌گذاریم -2:

$$(-1,2]\cap(-2,b)=(-1,1)$$

و چون آخر بازهٔ اشتراک ۱ است، پس باید $b=1$ باشد، بنابراین:

$$a+b=(-2)+1=-1$$

۳۸- گزینهٔ بیایید چند بازهٔ اول برای B را بنویسیم:

$$n=1 \Rightarrow B=(-2,2)\ ,\ n=2 \Rightarrow B=(-1,3)$$
$$n=3 \Rightarrow B=(0,4)\ ,\ n=4 \Rightarrow B=(1,5)$$

می‌بینیم پس از $n=4$ و به بعد، شروع بازهٔ B عددی بعد از ۱ است و قطعاً با $A=[-\frac{1}{3},\frac{1}{2}]$ اشتراک ندارد، پس فقط $n=1,2,3$ قابل‌قبول‌اند و جمع مقادیر n می‌شود $6=3+2+1$.

۳۹- گزینهٔ بازهٔ A حتماً با $(-1,2)$ اشتراک دارد و حتماً قسمتی دارد که در $(-1,2)$ نیست. پس از بین گزینه‌ها فقط ۱ مناسب است.

۴۰- گزینهٔ مضرب‌های صحیح عدد ۴ که بزرگ‌تر از ۱۰ هستند، عبارت‌اند از $12,16,20,24,\ldots$ و چون سه مضرب می‌خواهیم، پس $12,16,20$ حالا باید بازهٔ $(10,m)$ شامل هر سه عدد بالا باشد، پس $m>20$. از طرف دیگر چون فقط ۳ مضرب می‌خواهیم باید $m\le 24$ باشد، پس $20<m\le 24$ و در نتیجه مقدارهای صحیح m برابرند با $24,23,22,21$ که می‌شوند چهارتا.

۴۱- گزینهٔ اشتراک $(-\infty,4]\cap(3-a,+\infty)$ برابر تهی است، پس باید $4\ge 3-a$ باشد؛ یعنی $a\le -1$، پس حداکثر طول بازهٔ $(-1,a+5)$ به ازای $a=-1$ به دست می‌آید که می‌شود $(-1,4)$ که دارای اعداد طبیعی $3,2,1$ یعنی ۳ عدد طبیعی است.

۴۲- گزینهٔ چون $(-2,2)\subseteq(4a-2,a+1)$ است، پس باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} 4a-2\ge -2 \Rightarrow a\ge 0 \\ a+1\le 2 \Rightarrow a\le 1 \end{cases} \Rightarrow 0\le a\le 1$$

حالا حدود عدد $\frac{5a}{2}+1$ را پیدا می‌کنیم:

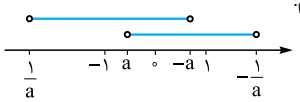
$$0\le a\le 1 \Rightarrow 0\le \frac{5}{2}a\le \frac{5}{2} \Rightarrow 1\le \frac{5a}{2}+1\le \frac{7}{2}$$

حالا با توجه به این‌که $1\le \frac{5a}{2}+1\le 3/5$ است، حتماً متعلق به بازهٔ $[1,4]$ هست.

۴۳- گزینهٔ با توجه به این‌که $-1<a<0$ است، داریم:

$$0<-a<1,\ \frac{1}{a}<-1,\ -\frac{1}{a}>1$$

بازه‌ها را روی محور مشخص می‌کنیم:



پس اشتراک دو بازه برابر است با $(a,-a)$.

۴۴- گزینهٔ چون $[-2,4)\cap[a+2,5)=[3a-1,4)$ شده است، پس باید یا $3a-1$ برابر -2 باشد و یا برابر $a+2$، هر کدام را بررسی می‌کنیم:

$$3a-1=a+2 \Rightarrow a=\frac{3}{2} \Rightarrow [-2,4)\cap[\frac{7}{2},5)=[\frac{7}{2},4) \ \checkmark$$

$$3a-1=-2 \Rightarrow a=-\frac{1}{3} \Rightarrow [-2,4)\cap[\frac{5}{3},5)=[-2,4) \ \times$$

پس باید $a=\frac{3}{2}$ باشد و در نتیجه $(a-2,a)=(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ و از بین گزینه‌ها فقط ۱ یعنی صفر، عضو این بازه است.

۴۵- گزینهٔ $(\frac{2}{n+1},\frac{5}{2n+1})$ وقتی بازه است که $\frac{2}{n+1}<\frac{5}{2n+1}$ باشد، پس وقتی بازه نیست که $\frac{2}{n+1}\ge\frac{5}{2n+1}$ باشد، در نتیجه:

$$\frac{2}{n+1}\ge\frac{5}{2n+1} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{n+1}{2}\le\frac{2n+1}{5}$$
$$\Rightarrow 5n+5\le 4n+2 \Rightarrow n\le -3$$

حالا چون $n\le -3$ شده است، مقدار طبیعی برای n وجود ندارد.

۴۶- گزینهٔ اول A_1، A_2 و A_3 را پیدا می‌کنیم. $A_i=(-i,i)$؛ پس:

$$A_1=(-1,1)\ ,\ A_2=(-2,2)\ ,\ A_3=(-3,3)$$

حالا حاصل عبارت خواسته‌شده را پیدا می‌کنیم:

$$\overbrace{(A_1 \cup A_2)}^{(-2,2)} \cap \overbrace{A_3}^{(-3,3)} = (-2,2)$$

۴۷- گزینهٔ ∞

۴۸- گزینهٔ ۵ بازه‌های A_1، A_2، A_5 و A_7 را می‌نویسیم:

$$A_i = [-i, \frac{9-i}{2}] \Rightarrow A_1 = [-1,4], A_2 = [-2,\frac{7}{2}]$$

$$A_5 = [-5,2], A_7 = [-7,1]$$

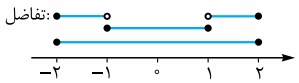
پس:

$$A_2 \cap A_5 = [-2,\frac{7}{2}] \cap [-5,2] = [-2,2]$$

$$A_1 \cap A_7 = [-1,4] \cap [-7,1] = [-1,1]$$

تفاضل آن‌ها برابر است با: $[-2,2] - [-1,1] = [-2,-1) \cup (1,2]$

تفاضل:

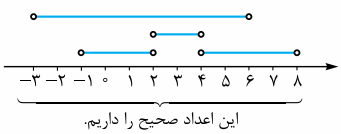


۴۹- گزینهٔ ۴ بیایید ۴ بازهٔ اول را بنویسیم:

$$A_n = ((-1)^n n, 2n) \Rightarrow A_1 = (-1,2), A_2 = (2,4)$$

$$A_3 = (-3,6), A_4 = (4,8)$$

اجتماع این‌ها می‌شود $(-3,8)$ که در آن اعداد صحیح $-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7$ هستند، یعنی ۱۰ عدد صحیح دارد.

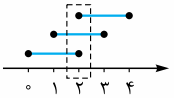


۵۰- گزینهٔ ۴ بیایید مجموعه‌های A_1 تا A_4 را بنویسیم:

$$A_n = [n-1, n+1]$$

$$A_1 = [0,2], A_2 = [1,3], A_3 = [2,4], A_4 = [3,5]$$

اشتراک ۳تای اول برابر است با:



$$\bigcap_{n=1}^{3} A_n = \{2\}$$

اجتماع ۴تای اول هم برابر است با: $\bigcup_{n=1}^{4} A_n = [0,5]$

و تفاضل این‌ها $\{2\} - [0,5]$ است که در ۳ آمده است.

۵۱- گزینهٔ ∞ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

در ۱ اعداد صحیح کمتر از ۱۰۰ تا $-\infty$ می‌روند، پس نامتناهی است.

در ۳ اعداد گویای بین $\sqrt{2}$ و $\sqrt{5}$ نامتناهی‌اند. چون بین هر دو عدد گنگ، بی‌شمار عدد گویای دیگر وجود دارد، پس نامتناهی است. در ۴ هم بی‌شمار عدد حقیقی در $(1,2)$ وجود دارد، پس نامتناهی است؛ اما در ۲ اعداد طبیعی کمتر از ۱۰۰، دقیقاً از ۱ تا ۹۹ هستند که مجموعه‌ای متناهی با ۹۹ عضو است.

۵۲- گزینهٔ ۳ مجموعهٔ اتم‌ها، درختان یا حشرات قطعاً انتها دارد و تعداد اعضای آن‌ها عددی مشخص است (هر چه‌قدر بزرگ باشد باز هم محدود است)؛ اما تعداد تمام دایره‌های قابل رسم به مرکز $(1,2)$ تا بی‌نهایت می‌رود و متناهی نیست.

۵۳- گزینهٔ ۳ فقط یک خط با شیب ۲ و گذرنده از مبدأ وجود دارد. اما تعداد «مثلث‌ها با مساحت ۶»، «مربع‌ها با مساحت ۶ و رأس روی مبدأ و «خط‌های گذرنده از مبدأ» نامتناهی است.

۵۴- گزینهٔ ۴ مضارب ۶، کلیهٔ اعداد به صورت $6k$ (هم مثبت و هم منفی) هستند. (نامتناهی)

مضارب مشترک ۶ و ۷، تمام اعداد به صورت $42k$ هستند. (نامتناهی)

مقسوم‌علیه‌های مشترک ۶ و ۷ اعداد ± 1 هستند. (متناهی است)

مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های اول عدد ۱ هم تهی است. چون ۱ هیچ مقسوم‌علیه اولی ندارد.

۵۵- گزینهٔ ۴ مجموعهٔ اعداد اول کمتر از ۲۰، هشت‌عضوی است:

$$A = \{2,3,5,7,11,13,17,19\}$$

مجموعهٔ اعداد طبیعی مربع کامل و کمتر از ۷۰ نیز هشت‌عضوی است:

$$B = \{1,4,9,16,25,36,49,64\}$$

مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های صحیح ۶ نیز هشت عضو دارد:

$$C = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$$

اما مجموعهٔ کسرهای بین صفر و ۱ با مخرج ۷ دارای شش عضو است:

$$D = \{\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \ldots, \frac{6}{7}\}$$

۵۶- گزینهٔ ۴ اعداد $2k+6 = 2(k+3)$ همواره زوج‌اند. اعداد $3k+1$ یا $3k-1$ می‌توانند زوج یا فرد باشند. اما اعداد $2k-5$ همیشه فرد هستند، چون:

$$2k-5 = 2k-6+1 = 2\overbrace{(k-3)}^{k'}+1 = 2k'+1$$

۵۷- گزینهٔ ۴ بزرگ‌ترین عدد صحیح یا بزرگ‌ترین عدد بازهٔ $(2,+\infty)$ وجود ندارد، پس ۱ و ۲ نادرست است. بزرگ‌ترین عدد گویای کمتر از ۳ هم وجود ندارد، پس ۴ نادرست است. ۳ بزرگ‌ترین عدد گویای کمتر یا مساوی ۴، برابر ۴ است و وجود دارد!

۵۸- گزینهٔ ۱ $A = \{x \mid x = 2n-1, n \in \mathbb{N}\}$ یعنی مجموعهٔ اعداد فرد که نامتناهی است، پس ۱ نادرست است.

$B = \{x \mid x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ به صورت $B = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$ و نامتناهی است، پس ۲ نادرست است. $C = \{x \mid x = \frac{(-1)^n}{2}, n \in \mathbb{N}\}$ برابر است با $C = \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$ که دو عضو دارد، پس متناهی است، یعنی جواب، ۳ است. در مورد ۴ هم خودتان بررسی کنید.

۵۹- گزینهٔ ۱ درست است، چون دو عدد طبیعی، دو عدد گویا هم هستند و بینشان بی‌شمار عدد گویا وجود دارد. ۲ را هم در درس‌نامه دیدیم که درست است، یعنی بین دو هر عدد گنگ بی‌نهایت عدد گویا وجود دارد. ۳ نادرست است. چون مثلاً بین دو عدد گنگ $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ هیچ عدد صحیحی وجود ندارد. در مورد درستی ۴ هم خودتان توضیح دهید!

۶۰- گزینهٔ ۴ A متناهی و B نامتناهی است. پس $A \cup B$ و $B - A$ نامتناهی‌اند چون اولی شامل تمام B می‌شود و دومی دقیقاً قسمتی از B را دارد که در A نیست. اما $A - B$ و $A \cap B$ حتماً متناهی‌اند چون قسمتی از A هستند.

۶۱- گزینهٔ ۱ نادرست است. مثلاً اگر A مجموعهٔ اعداد زوج باشد، A' مجموعهٔ اعداد فرد است و هر دو نامتناهی‌اند.

در ۲ اگر B نامتناهی باشد، زیرمجموعهٔ آن یعنی A می‌تواند متناهی باشد. مثلاً B اعداد فرد ولی $A = \{1\}$ زیرمجموعهٔ آن متناهی است.

۳ نیز نادرست است. مثلاً A مجموعهٔ مضارب ۵ و B مجموعهٔ اعداد اول است و هر دو نامتناهی‌اند و اجتماع آن‌ها $\mathbb{N}$ نیست.

۴ درست است. وقتی A نامتناهی می‌شود حتماً B هم نامتناهی است چون B تمام عضوهای A را دارد!

۶۲- گزینهٔ ۱ درست است، مثلاً مجموعهٔ $A = \{0,1,2,3,\ldots\}$ و $B = \{0,-1,-2,\ldots\}$ هر دو نامتناهی‌اند، اما اشتراکشان برابر $\{0\}$ و متناهی است.

۲) هم درست است، چون مجموعه‌های $A=\{1,4,7,10,\ldots\}$، $B=\{2,5,8,11,\ldots\}$ و $C=\{3,6,9,12,\ldots\}$ هر سه نامتناهی‌اند و هیچ‌کدام با هم اشتراک ندارند.

۳) نادرست است، چون اگر $A\subseteq B$ و A نامتناهی باشد، حتماً B هم نامتناهی است. در مورد درستی ۴) هم خودتان توضیح دهید.

۶۳- گزینه مجموعهٔ A یعنی اعداد فرد برابر است با $A=\{1,3,5,7,\ldots\}$ و مجموعهٔ B یعنی اعداد اول برابر است با $B=\{2,3,5,7,11,\ldots\}$ حالا گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $A-B=\{1,9,15,\ldots\}$ نامتناهی است، $B-A=\{2\}$ که هم متناهی است و هم غیرتهی، پس جواب ۲) است. در مورد ۳) و ۴) هم خودتان توضیح دهید.

۶۴- گزینه هر کدام از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $\mathbb{Q}'-\mathbb{Q}=\mathbb{Q}'$ نامتناهی

۲) $\overbrace{(\mathbb{Q}-\mathbb{R})}^{\varnothing}\cap\overbrace{(\mathbb{Q}'-\mathbb{Z})}^{\mathbb{Q}'}=\varnothing\cap\mathbb{Q}'=\varnothing$ متناهی

۳) $(\mathbb{Z}-\mathbb{N})\cap\overbrace{(\mathbb{Q}-\mathbb{Q}')}^{\mathbb{Q}}=\{\ldots,-3,-2,-1,0\}\cap\mathbb{Q}$
$=\{\ldots,-3,-2,-1,0\}$ نامتناهی

۴) $\overbrace{(\mathbb{N}-\mathbb{Q})'}^{\varnothing'=U}\cap\mathbb{Z}'=U\cap\mathbb{Z}'=\mathbb{Z}'$ نامتناهی

حواسمان باشد که ۲) برابر است با تهی و مجموعهٔ تهی صفر عضو دارد و متناهی است.

۶۵- گزینه A شامل تمام اعداد صحیح صفر، ±3، ±6، ±9 و ... است و در B اعداد صحیح بین -99 تا 99 را داریم. پس $A\cap B$ شامل اعداد صحیح مضرب ۳ بین -99 تا 99 است که تعدادشان محدود می‌شود (۶۷تا هستند).

در بررسی گزینه‌ها، $A\cap B'$ نامتناهی است (مضارب بزرگ‌تر از ۱۰۰ عدد ۳ را دارد)؛ همچنین $A'\cup B$ نامتناهی است (اعداد صحیح خیلی بزرگ که مضرب ۳ نیستند و در A هستند)؛ $A\cup B$ نیز همین‌طور است.

۶۶- گزینه وقتی متمم مجموعهٔ A نسبت به مجموعهٔ B قابل تعریف است که $A\subseteq B$ باشد، که از بین گزینه‌ها فقط ۳) چنین است.

۶۷- گزینه با توجه به $U=\{1,2,3,4,5\}$، $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{2,4\}$، گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم. $A'=\{4,5\}$, $B'=\{1,3,5\}$

۱) $B'-A'=\{1,3\}$ ✓

۲) $A'\cap B'=(A\cup B)'$ ⇒ همواره درست است. ✓

۳) $A-(A\cap B)=A-B=\{1,3\}$ ✓

۴) $A'\cup B'=\{1,3,4,5\}$ نادرست

۶۸- گزینه داریم: $U=\{1,2,3,5,6,7,8,9\}$، $A=\{1,3,7,8\}$، $B=\{3,6\}$ و $C=\{5,9\}$، پس:

$$\begin{cases}B'=\{1,2,5,7,8,9\}\\C'=\{1,2,3,6,7,8\}\end{cases}\Rightarrow B'\cap C'=\{1,2,7,8\}$$

حالا $A\cap(B'\cap C')$ را پیدا می‌کنیم:

سه عضو دارد $\{1,3,7,8\}\cap\{1,2,7,8\}=\{1,7,8\}$

۶۹- گزینه اول محدودهٔ اعضای مجموعهٔ A را پیدا می‌کنیم.

$A=\{2x+3\,|\,-1\le x<7\}$

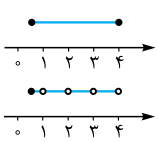
$-1\le x<7\Rightarrow-2\le2x<14\Rightarrow1\le2x+3<17\Rightarrow A=[1,17)$

پس A' برابر است با: $(-\infty,1)\cup[17,+\infty)$

۷۰- گزینه $\mathbb{Z}-\mathbb{W}$ برابر است با: $\{-1,-2,-3,-4,\ldots\}$

پس متمم مجموعهٔ $A=\{-1,-2,-3\}$ برابر است با: $\{-4,-5,\ldots\}$ (حواسمان باشد که نوع نوشتن $\{-4,-5,\ldots\}$ یا $\{\ldots,-5,-4\}$ با هم فرقی ندارد!)

۷۱- گزینه اول بازهٔ $[\frac{1}{2},4]$، را رسم می‌کنیم:

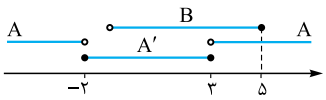


اگر اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ را حذف کنیم، داریم:

این مجموعه از اجتماع ۴ بازهٔ $(3,4)$، $(2,3)$، $(1,2)$ و $[\frac{1}{2},1)$ ساخته شده است.

۷۲- گزینه اول بازه‌ها را روی محور رسم می‌کنیم:

$A'\cup B=[-2,3]\cup(-1,5]=[-2,5]$, $A\cap B=(3,5]$



پس بزرگ‌ترین عنصر هر دو مجموعه، ۵ است و اختلاف آن‌ها صفر می‌شود.

۷۳- گزینه اول با توجه به $U=(2,+\infty)$، $B=(3,5]$، $A=\{x|x\le9,x\in U\}=(2,9]$ و $C=\{x|x\ge7\}=[7,+\infty)$، مجموعه‌های B' و C' را پیدا می‌کنیم:

$B'=(2,3]\cup(5,+\infty)$

$C'=(2,7)$

پس حاصل عبارت خواسته‌شده برابر است با:

$(A-C')\cap B'=((2,9]-(2,7))\cap((2,3]\cup(5,+\infty))$

$=([7,9]\cap((2,3]\cup(5,+\infty))=[7,9]$

۷۴- گزینه عضوهای A، اعدادی هستند که مربعشان از ۵ بیشتر نباشد، پس با توجه به مجموعهٔ مرجع داریم: $A=\{0,1,-1,2,-2\}$

در مجموعهٔ B هم باید xهای مثبت قرار دهیم که $\sqrt{x}-5$ مربع کامل شود، پس: $B=\{1\}$

بنابراین: $A'=U-A=\{3,4\}$

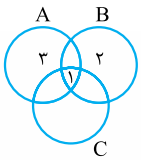
$B-A=\varnothing\Rightarrow A'-(B-A)=\{3,4\}-\varnothing=\{3,4\}$

یعنی دوعضوی است.

۷۵- گزینه ۱) درست است. می‌دانیم اگر در رابطهٔ زیرمجموعه‌بودن، مجموعه‌ها را متمم کنیم جهت، برعکس می‌شود یعنی از رابطهٔ $A\subset B$ نتیجه می‌شود $B'\subset A'$. (خیلی هم مهم است، حتماً یادمان بماند!)

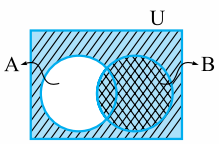
۲) درست است. اگر $A-B$ تهی باشد، تمام اعضای A در B هستند و در نتیجه A زیرمجموعهٔ B خواهد بود.

۳) نادرست است. اگر $A\cap C=B\cap C$ باشد، نمی‌توان نتیجه گرفت A با B برابر است. مثلاً این را ببینید: $A\cap C=B\cap C=\{1\}$ اما $A\ne B$



۴) درست است. اگر اشتراک A و B برابر A باشد یعنی تمام اعضای A با B مشترک‌اند، پس A زیرمجموعهٔ B است.

۷۶- گزینه در شکل روبه‌رو A' با هاشور (////) و B را با هاشور (\\\\) مشخص کرده‌ایم، پس ناحیهٔ سایه‌خورده می‌شود $A'\cup B$.



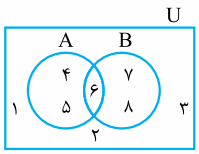
پاسخ‌نامهٔ تشریحی

در واقع این متمم $(A-B)$ است که می‌شود:

$$(A-B)'=(A\cap B')'=A'\cup B$$

۷۷- گزینه ۲

راه اول در شکل مقابل $A'=\{1,2,3,7,8\}$ و $B-A=\{7,8\}$، پس:



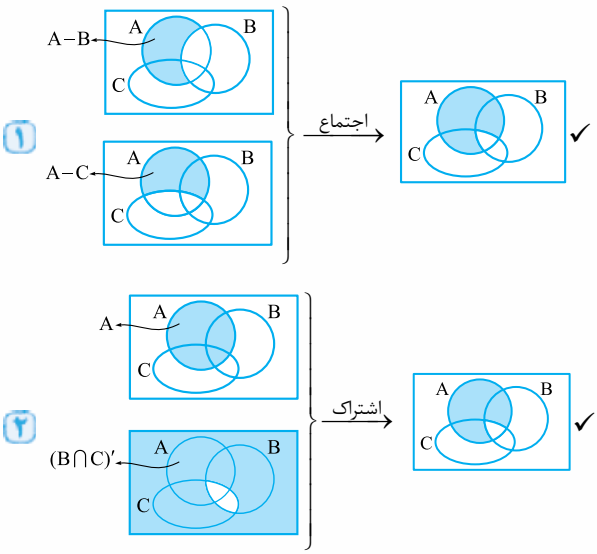
$$A'\cap(B-A)'=\{1,2,3,7,8\}\cap(\{7,8\})'$$
$$=\{1,2,3,7,8\}\cap\{1,2,3,4,5,6\}=\{1,2,3\}$$

راه دوم اول از قوانین مجموعه استفاده می‌کنیم:

$$A'\cap(B-A)'=A'\cap(B\cap A')'=A'\cap(B'\cup A)$$
$$=A'\cap B'=(A\cup B)'$$

حالا از روی شکل $(A\cup B)'$ برابر است با: $\{1,2,3\}$.

۷۸- گزینه ۴ نمودارهای هر چهار گزینه را رسم می‌کنیم، فقط حواستان باشد که در ۲ به جای $B'\cup C'$ از $(B\cap C)'$ استفاده کردیم:



نکته در مجموعه‌ها داریم:

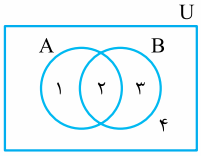
$$(A\cap B)'=A'\cup B',(A\cup B)'=A'\cap B'$$

گزینه‌های ۳ و ۴ را مثل ۱ و ۲ توضیح ندادیم.

فقط نمودار ۴ با نمودار داده‌شده، یکسان نیست.

۷۹- گزینه ۴ $A\cap B'$ همان $A-B$ است، پس $(A-B)-(B-A)$ را می‌خواهیم، چون $A-B$ و $B-A$ اشتراک ندارند، تفاضل آن‌ها همان $A-B$ خواهد بود.

۸۰- گزینه ۲ **راه اول** اول نمودار ون دو مجموعه را رسم می‌کنیم:



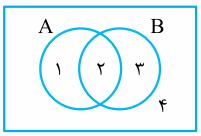
$B-A$ ناحیهٔ ۳ است؛ پس $(B-A)'$ نواحی ۱، ۲ و ۴ است؛ حالا $(B-A)'-A$ می‌شود $\{1,2,4\}-\{1,2\}$، یعنی ۴.

صورت سؤال متمم این را می‌خواهد، متمم ناحیهٔ ۴ می‌شود نواحی ۱، ۲ و ۳ یعنی $A\cup B$.

راه دوم از روابط مجموعه‌ها داریم:

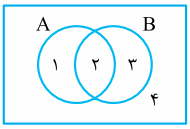
$$(B-A)'-A \xrightarrow{\text{تعریف تفاضل}} =(B\cap A')'\cap A'$$
$$\xrightarrow{\text{دمورگان}} =(B'\cup A)\cap A'$$
$$\xrightarrow{\text{پخشی}} =(B'\cap A')\cup(\underbrace{A\cap A'}_{\varnothing})=B'\cap A'$$
$$\xrightarrow{\text{متمم}} =B\cup A$$

۸۱- گزینه ۲ نمودار ون دو مجموعه را رسم می‌کنیم:



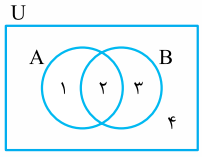
$A-B$ ناحیهٔ ۱ است، پس $(A-B)'$ نواحی ۲، ۳ و ۴ است. $A\cup B$ نواحی ۱، ۲ و ۳ است و A' ناحیهٔ ۳ و ۴ است، بنابراین اشتراک این‌ها می‌شود ناحیهٔ ۳ که همان $B-A$ است.

۸۲- گزینه ۳ طبق نمودار ون، $A-(A-B)$ همان $A\cap B$ است:



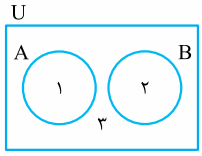
پس متمم $\underbrace{(A\cap B)\cup(A\cap B)'}_{\text{این برابر مجموعهٔ مرجع است.}}$ را می‌خواهیم و جواب می‌شود $U'=\varnothing$.

۸۳- گزینه ۲ از نمودار ون استفاده کنیم:



$$(۳,۴)\cup((۲)\cap[(۱,۲,۳)\cap(۲,۳)])$$
$$=(۳,۴)\cup(۲\cap(۲,۳))$$
$$=(۳,۴)\cup(۲)=۱'=(A-B)'$$

۸۴- گزینه ۴



گزینه‌ها را یکی‌یکی بررسی می‌کنیم. برای سادگی کار، می‌توانیم از نمودار ون روبه‌رو هم استفاده کنیم.

چون دو مجموعهٔ A و B جدا از هم‌اند، مجموعهٔ مرجع را به ۳ ناحیهٔ جدا از هم افراز می‌کنند.

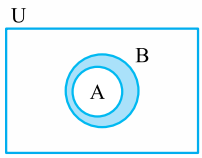
۱) $A\subset B'\Rightarrow\{1\}\subset\{1,3\}$ درست است.

۲) $A-B'=\varnothing\Rightarrow\{1\}-\{1,3\}=\varnothing$ درست است.

۳) $A\cap B'=A\Rightarrow\{1\}\cap\{1,3\}=\{1\}$ درست است.

۴) $(A\cup B)'=\varnothing\Rightarrow\{1,2\}'=۳\neq\varnothing$ نادرست است.

۸۵- گزینه ۴



گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $B-A'=B\cap(A')'$
$=B\cap A=A$ درست است.

۲) $A-B'=A\cap(B')'=A\cap B=A$ درست است.

۳) $A\cap B'=A-B=\varnothing$ درست است.

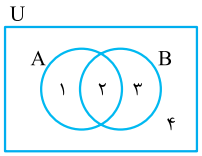
۴) $B\cap A'=B-A$ دلیلی ندارد تهی باشد.

۸۶- گزینه ۱ **راه اول** از رابطهٔ $A'\cup B=A'\cap B'$ داریم:

$$A'\cup B=A'-B$$

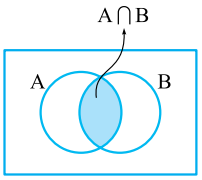
پس مجموعهٔ B این‌طوری است که اگر با آن اجتماع بگیریم یا آن را حذف کنیم، فرقی نمی‌کند؛ پس $B=\varnothing$.

راه دوم نمودار ون را ببینید:



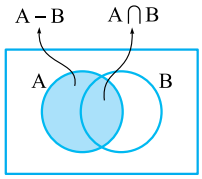
$A'\cup B$ نواحی ۲، ۳ و ۴ و مجموعهٔ $A'\cap B'$ ناحیهٔ ۴ است. این‌ها مساوی شده‌اند؛ پس ۲ و ۳ وجود نداشته؛ یعنی $B=\varnothing$.

۸۷- گزینهٔ ۲ قسمت اول عبارت با توجه به نمودار ون برابر تهی است:



$$(A\cap B)-B=\varnothing \Rightarrow (\varnothing)'=U$$

در قسمت دوم عبارت هم با استفاده از نمودار:



$$(A\cap B)\cup(A-B)=A$$

پس حاصل عبارت، برابر است با:

$$U\cap A=A$$

۸۸- گزینهٔ ۴ باید x عضو هر دو مجموعهٔ $B-A$ و $C\cup D$ باشد، پس حتماً در B هست و در A نیست و در حداقل یکی از دو مجموعهٔ C و D هم هست و $x\in D$ می‌تواند نادرست باشد. در مورد ۴ دقت کنید که:

$$x\in C\cup D \Rightarrow x\notin (C\cup D)'=C'\cap D'$$

۸۹- گزینهٔ ۲ الف) نادرست است، چون مثلاً اگر A مجموعهٔ اعداد فرد باشد A' می‌شود مجموعهٔ اعداد زوج و A و A' هر دو نامتناهی‌اند.

ب) درست است، چون وقتی B متناهی است، یعنی تعداد اعضای B اعداد مشخص است (باپایان) پس از آن‌جا که $\mathbb{N}$ بی‌شمار عضو دارد، تعداد اعضای B' هم می‌شود بی‌شمار، یعنی B' نامتناهی است.

پ) درست است، چون ممکن است A نامتناهی و A' متناهی باشد، ولی B متناهی است، پس B' نامتناهی است و در نتیجه $A'\cup B'$ به علت نامتناهی‌بودن B'، حتماً نامتناهی است.

۹۰- گزینهٔ ۳ وقتی هر عضو B، عضوی از A هست، پس $B\subseteq A$.

حالا گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $A\cap B=B, A\cup B'=U \Rightarrow$ اشتراک دارند.

۲) $A-B=A\cap B', B' \Rightarrow$ اشتراک دارند.

۳) $A', B' \xrightarrow{A'\subset B'} A' \Rightarrow$ اشتراک دارند.

۴) $A'\cup B'=(A\cap B)'=B', B \Rightarrow$ اشتراک ندارند.

۹۱- گزینهٔ ۳ می‌دانیم تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ nعضوی برابر است با 2^n؛ بنابراین:

$$2^{n(A)}=512 \Rightarrow 2^{n(A)}=2^9 \Rightarrow n(A)=9$$

از طرفی:

$$(B\cup A')'=B'\cap A=A-B$$

می‌دانیم:

$$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=9-3=6 \Rightarrow 2^6=64$$

۹۲- گزینهٔ ۳ اگر به $A_1=\{1\}$، $A_2=\{2,3\}$، $A_3=\{4,5,6\}$ و $A_4=\{7,8,9,10\}$ توجه کنیم، می‌بینیم که مجموعهٔ A_n اولاً nعضو (عدد متوالی طبیعی) دارد و ثانیاً بزرگ‌ترین عضوش برابر $\frac{n(n+1)}{2}$ است، پس:

$$A_{10}=\{46,47,\ldots,55\}$$

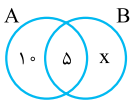
بنابراین A'_{10} برابر مجموعه اعداد طبیعی است که با اعضای دورقمی‌اش کار داریم. تعداد مضارب دورقمی ۵ برابر است با ۱۸، چون داریم $10\le 5k\le 95$ و در نتیجه $2\le k\le 19$)؛ از این اعضا عدد ۵۰ و ۵۵، A هستند، پس A' دارای شانزده عدد دورقمی مضرب ۵ است.

۹۳- گزینهٔ ۲

راه اول می‌دانیم $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$، پس:

$$30=15+n(B)-5 \Rightarrow n(B)=20$$

راه دوم نمودار ون را رسم می‌کنیم:



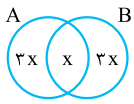
$$10+5+x=30 \Rightarrow x=15$$
$$n(B)=x+5=15+5=20$$

۹۴- گزینهٔ ۳ از نمودار ون استفاده می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} n(S)=14 \text{ سرود} \\ n(T)=19 \text{ تئاتر} \\ n(S\cap T)=5 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \text{عضو حداقل یکی از این گروه} = n(T\cup S)=14+5+9=28$$

۹۵- گزینهٔ ۳ نمودار دو مجموعه را رسم می‌کنیم:



تعداد اعضای A و B، برابر $n(A)=n(B)=4x$ است و تعداد اعضای مشترک برابر x است. پس داریم:

$$n(A\cup B)=3x+x+3x=7x$$

یعنی جواب، مضرب ۷ است که در بین گزینه‌ها فقط ۴ مناسب است.

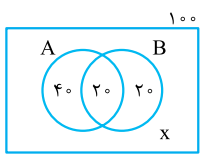
۹۶- گزینهٔ ۳ وقتی $n(A)=10$ و $n(A')=12$ است، چون A و A' هیچ عضو مشترکی ندارند، پس:

$$n(U)=n(A\cup A')=n(A)+n(A')=10+12=22$$

پس حالا که $n(B)=7$ است، در نتیجه:

$$n(B')=n(U)-n(B)=22-7=15$$

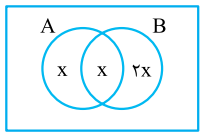
۹۷- گزینهٔ ۳ نمودار ون دو مجموعه را رسم می‌کنیم:



$$n(A)=60, n(B)=40, n(A\cap B)=20$$
$$40+20+20+x=100 \Rightarrow x=20$$

حالا تعداد اعضای $A-B$ برابر است با ۴۰ و تعداد اعضای $A'\cap B'=(A\cup B)'$ برابر است با ۲۰، پس تعداد اعضای $A-B$، ۲۰تا از تعداد اعضای $(A\cup B)'$ بیشتر است.

۹۸- گزینهٔ ۴ اول فرض می‌کنیم $n(A\cap B)=x$ و نمودار ون دو مجموعه را رسم می‌کنیم:

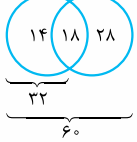


$$3n(A)=2n(B)=6n(A\cap B)=6x$$
$$\Rightarrow \begin{cases} n(A)=2x \\ n(B)=3x \\ n(A\cap B)=x \end{cases}$$

پس حاصل عبارت داده‌شده برابر است با:

$$\frac{n(A-B)}{n(B\cap A')}=\frac{n(A-B)}{n(B-A)}=\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$$

۹۹- گزینهٔ ۳ تعداد عضوهای هر قسمت را در نمودار ون می‌نویسیم:

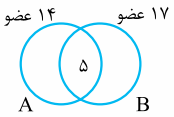


$$n(A\cap B)=n(A)-n(A-B)=32-14=18$$
$$n(B-A)=60-32=28$$

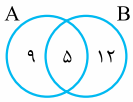
پس نسبت تعداد عضوهای $B-A$ به $A\cap B$ برابر است با:

$$\frac{n(B-A)}{n(A\cap B)}=\frac{28}{18}=\frac{14}{9}\simeq 1/55$$

۱۰۰- گزینه اول نمودار ون دو مجموعه را رسم می‌کنیم:

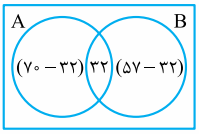


۵ عضو در ناحیهٔ مشترک‌اند، پس $۱۴-۵=۹$ عضو فقط در A قرار دارند و $۱۷-۵=۱۲$ عضو فقط در B هستند؛



بنابراین $۹+۱۲=۲۱$ عضو فقط در یکی از دو مجموعه هستند.

۱۰۱- گزینه نمودار ون دو مجموعهٔ A و B را رسم می‌کنیم:

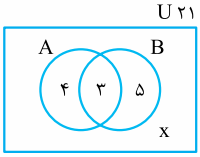


$$\text{دقیقاً یکی} \Rightarrow n(A-B)+n(B-A)$$
$$=۷۰-۳۲+۵۷-۳۲=۱۲۷-۶۴=۶۳$$

۱۰۲- گزینه اگر فرض کنیم A مجموعه فیلم‌های پویانمایی و B مجموعهٔ فیلم‌های طنز است. طبق داده‌های سؤال داریم:

$$n(A\cap B)=۳\ ,\ n(B)=۸\ ,\ n(A)=۷$$

حالا نمودار ون دو مجموعه را رسم می‌کنیم:



$$۴+۳+۵+x=۲۱ \Rightarrow x=۹$$

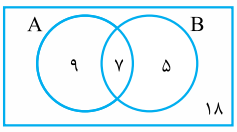
تعداد فیلم‌های پویانمایی یا غیرطنز می‌شود $n(A\cup B')$ که طبق شکل برابر است با:

$$۷+x=۷+۹=۱۶$$

۱۰۳- گزینه افرادی که در گروه ورزش هستند را با A و آن‌هایی که در گروه روزنامه‌نگاری‌اند را با B نشان می‌دهیم. ۹ نفر فقط در گروه ورزش‌اند، بنابراین $n(A-B)=۹$. از طرفی و بنا به اطلاعات داده‌شده، $n(A)=۱۶$ ، $n(B)=۱۲$.

می‌خواهیم $n(A'\cap B')$ را به دست آوریم، داریم:

$$n(A-B)=۹ \Rightarrow n(A)-n(A\cap B)=۹$$
$$\Rightarrow ۱۶-n(A\cap B)=۹ \Rightarrow n(A\cap B)=۷$$



$$n(A'\cap B')=\text{کل}-n(A\cup B)$$
$$=\text{کل}-n(A)-n(B)+n(A\cap B)$$
$$=۳۹-۱۶-۱۲+۷=۱۸$$

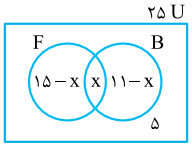
۱۰۴- گزینه اعضای گروه آزمایشگاهی را با A و اعضای گروه فوتبال را با B نشان می‌دهیم. می‌خواهیم $n(A'\cap B')$ را پیدا کنیم، می‌دانیم که:

$$n(A'\cap B')=n(S)-n(A)-n(B)+n(A\cap B)$$

داریم:

$$n(A'\cap B')=۴۲-۱۵-۱۲+۷=۲۲$$

۱۰۵- گزینه نمودار ون دو مجموعه را رسم می‌کنیم، داریم:



$$n(F)=۱۵\ ,\ n(B)=۱۱\ ,\ n(U)=۲۵$$
$$n(F\cup B)'=۵$$
$$۱۵-x+x+۱۱-x+۵=۲۵ \Rightarrow x=۶$$

۱۰۶- گزینه اگر شب را با A و درون شهر را با B نشان دهیم، داریم:

$$n(A)=۷۰, n(B')=۶۱ \Rightarrow n(B)=n(U)-n(B')$$
$$=۱۰۴-۶۱=۴۳$$

حالا به $n(A\cup B)$ دقت کنید:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۷۰+۴۳-x=۱۱۳-x$$

این تعداد جرم‌هایی است که در شب یا درون شهر انجام شده و باید از ۱۰۴ بیشتر نباشد:

$$۱۱۳-x\le ۱۰۴ \Rightarrow x\ge ۹$$

یعنی تعداد جرم‌های درون شهر و در شب (مشترک A و B) حداقل ۹ است.

۱۰۷- گزینه کافی است رابطهٔ زیر را بنویسیم:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

و سپس با معادلهٔ $۳y=۲x$ در یک دستگاه حل کنیم:

$$۷۵=۳x+۱۰+۲y+۵-(x+y-۲۰)$$

$$\Rightarrow ۲x+y=۴۰ \Rightarrow \begin{cases}۲x+y=۴۰\\ ۲x-۳y=۰\end{cases} \xrightarrow{(-)} ۴y=۴۰$$

$$\Rightarrow y=۱۰ \Rightarrow x=۱۵$$

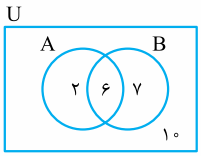
حالا داریم:

$$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$$
$$=(۳x+۱۰)-(x+y-۲۰) \xrightarrow[y=۱۰]{x=۱۵} ۵۵-۵=۵۰$$

۱۰۸- گزینه $A'-B$ عضوهایی است که در A' هستند و در B نیستند. پس عضوهایی را می‌خواهیم که نه در A و نه در B باشند که تعداد آن‌ها $۳x+۱$ است. بنابراین:

$$n(A'-B)=n(A'\cap B')=۳x+۱=۱۰ \Rightarrow x=۳$$

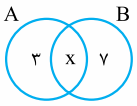
حالا $x=۳$ را قرار دهیم:



بنابراین تعداد عضوهایی که به حداقل یکی از دو مجموعه تعلق دارند، یعنی $n(A\cup B)$ برابر است با:

$$n(A\cup B)=۲+۶+۷=۱۵$$

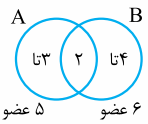
۱۰۹- گزینه نمودار ون دو مجموعه را رسم می‌کنیم:



$$n(A-B)=۳\ ,\ n(B-A)=۷$$
$$n(B)=۲n(A) \Rightarrow ۷+x=۲(۳+x) \Rightarrow x=۱$$

۱۱۰- گزینه نمودار ون دو مجموعه را رسم می‌کنیم؛ پس $A-B$ دارای ۳ و $B-A$ دارای ۴ عضو است. حالا خواستهٔ سؤال:

$$(A\cap B')\cup(A\cup B')'$$
$$=(A-B)\cup(\underbrace{A'\cap B}_{B-A})=(A-B)\cup(B-A)$$



که با توجه به شکل، $۳+۴=۷$ عضو دارد.

۱۱۱- گزینه مهمان‌های سارا، هم‌کلاسی‌های مدرسه یا زبان هستند، پس $n(A\cup B)=۴۷$ و $n(A)=۲۴$، پس داریم:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$
$$۴۷=۲۴+n(B)-n(A\cap B) \Rightarrow n(B)-n(A\cap B)=۲۳$$
$$\Rightarrow n(B)=n(A\cap B)+۲۳$$

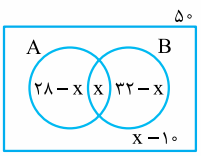
پس تعداد هم‌کلاسی‌های زبان حداقل ۲۳ نفر است.

از طرف دیگر چون تعداد هم‌کلاسی‌های مدرسه ۲۴ نفر بود، تعداد مهمان‌های مشترک یعنی $n(A\cap B)$ نمی‌تواند بیشتر از ۲۴ باشد. پس $n(B)$ حداکثر برابر است با:

$$n(B)=۲۴+۲۳=۴۷$$

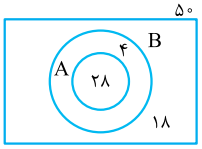
یعنی تعداد هم‌کلاسی‌های زبان حتماً در فاصلهٔ $[۲۳,۴۷]$ است.

۱۱۲- گزینه اگر مجموعهٔ کسانی را که به بستنی علاقه دارند با A و مجموعهٔ آن‌هایی را که به آبمیوه علاقه دارند B بنامیم، نمودار ون دو مجموعهٔ A و B به صورت روبه‌رو است:

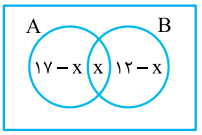


حالا برای این‌که تعداد کسانی که به هیچ‌کدام علاقه ندارند حداکثر شود باید حداکثر $x-۱۰$ را پیدا کنیم، حداکثر x با توجه به این که باید $۲۸-x\ge ۰$

و $x-10 \geq 0$ باشد برابر است با ۲۸، پس حداکثر $x-10$ برابر است با $28-10=18$. توجه کنید که وضعیت دو مجموعهٔ A و B با توجه به اعداد به دست آمده به صورت روبه‌رو است:



۱۱۳- گزینهٔ ۴ $A-B$ یعنی عضوهایی از A که در B نباشند. برای این‌که تعداد عضوهای $A-B$ حداکثر شود باید تا حد امکان A و B کم‌ترین اشتراک را داشته باشند. اگر تعداد عضوهای مشترک را x بگیریم، داریم:

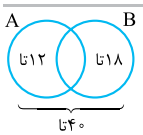


$$17-x+x+12-x \leq 22$$
$$\Rightarrow 29-x \leq 22 \Rightarrow x \geq 7$$

یعنی حداقل ۷ عضو مشترک لازم است؛ پس $A-B$ حداکثر ۱۰ عضو دارد.

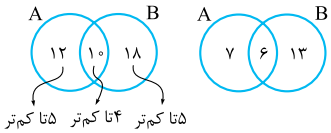
۱۱۴- گزینهٔ ۴ اجتماع دو مجموعه در حالت اول $49-15-28+36$ عضو دارد. حالا ۱۶ عضو از A کم شده که ۹تای آن‌ها از اشتراک حذف شده‌اند. پس الان A دارای $36-16=20$ عضو است و اشتراک جدید هم $15-9=6$ عضو دارد. مجموعهٔ B هم که به اندازهٔ تعداد کم‌شده از اشتراک A و B یعنی ۹ عضو، از دست می‌دهد، یعنی تعداد اعضای B برابر ۱۹تاست، پس تعداد اعضای اجتماع مجموعهٔ A جدید با B برابر است با: $33=6-19+20$

۱۱۵- گزینهٔ ۴ به نمودار دقت کنید:



پس در ناحیهٔ وسط یعنی $A \cap B$ باید $40-12-18=10$ عضو باشد.

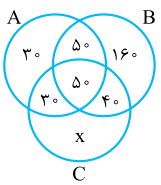
حالا از هر یک از مجموعه‌های A و B نه عضو برداشته شده و از اشتراک آن‌ها ۴تا کم شده است. پس از قسمت غیرمشترک هر کدام ۵تا کم می‌شود.



$$\Rightarrow n(A \cup B)=7+6+13=26$$

نکته اجتماع دو مجموعهٔ اولیه ۴۰تا عضو دارد. ما $9+9$ یعنی ۱۸تا را برداشته‌ایم که ۴تایش مشترک بوده، پس $40-18+4$ یعنی ۲۶تا می‌ماند.

۱۱۶- گزینهٔ ۴ نمودار ون سه مجموعه را رسم می‌کنیم و برای پرکردن ناحیه‌ها از اشتراک هر سه مجموعه شروع می‌کنیم:



برای پیداکردن تعداد بیمارانی که فقط بیماری C را دارند باید x را پیدا کنیم، پس:

$$30+50+50+30+40+160+x=400 \Rightarrow 360+x=400 \Rightarrow x=40$$

۱۱۷- گزینهٔ ۴ باید به ازای هر کدام از گزینه‌ها مجموعهٔ $B=\{x \in U \mid x<3\}$ را پیدا کنیم و ببینیم آیا B و $A=\{1,4,7\}$ جدا از هم هستند یا نه.

(۱) $\mathbb{Q}' \Rightarrow B=\{x \in \mathbb{Q}' \mid x<3\} \Rightarrow$

چون اعضای B همگی گنگ هستند A و B جدا از هم‌اند.

(۲) $\mathbb{Z}-\mathbb{W} \Rightarrow B=\{x \in \mathbb{Z}-\mathbb{W} \mid x<3\}$

$=\{-1,-2,-3,\ldots\} \Rightarrow$ جدا از هم‌اند.

(۳) $\mathbb{Q}-\mathbb{Z} \Rightarrow B=\{x \in \mathbb{Q}-\mathbb{Z} \mid x<3\}$

B شامل اعداد گویای غیرصحیح کوچک‌تر از ۳ است، پس A و B عضو مشترکی ندارند. با این حساب جواب (۴) است، اما بگذارید (۴) را هم بررسی کنیم:

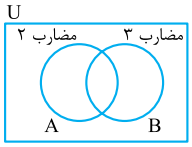
(۴) $\mathbb{Z} \cap \mathbb{N} \Rightarrow B=\{x \in \overbrace{\mathbb{Z} \cap \mathbb{N}}^{\mathbb{N}} \mid x<3\}=\{2,1\}$

A و B عضو مشترک ۱ دارند و جدا از هم نیستند.

این‌طوری به موضوع نگاه کنید که شرط B، کم‌تر از ۳ را می‌پذیرد و در A فقط عضو ۱ این شرط را دارد، پس A و B وقتی جدا از هم هستند که در B عدد ۱ نباشد، پس مرجع B یعنی U شامل ۱ نیست.

$\mathbb{Z}-\mathbb{W}$، $\mathbb{Q}'$ و $\mathbb{Q}-\mathbb{N}$ خوب‌هستنداما $\mathbb{Z} \cap \mathbb{N}$ خوب‌نیست‌چون ۱رادارد.

۱۱۸- گزینهٔ ۴ اگر A و B به ترتیب مجموعهٔ مضارب ۲ و مضارب ۳ باشند، تعداد عضوهای $A \cup B$ را می‌خواهیم:



$$n(A \cup B)=n(A)+n(B)-n(A \cap B)$$
$$=n(\text{مضارب ۲})+n(\text{مضارب ۳})-n(\text{مضارب مشترک ۲ و ۳})$$

تعداد عضوهای A یعنی تعداد مضارب ۲ در بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ برابر است با:

$$n(A)=50$$

تعداد عضوهای B یعنی تعداد مضارب ۳ برابر است با:

$$n(B)=33$$

مجموعه‌های A و B را ببینید:

$$A=\{2,4,6,\ldots,100\}$$
$$B=\{3,6,9,\ldots,99\}$$

اعضای مشترک A و B، اعداد مضرب ۶ هستند. تعداد آن‌ها برابر است با:

$$A \cap B=\{\underbrace{6}_{6\times1},12,18,\ldots,\underbrace{96}_{6\times16}\} \Rightarrow n(A \cap B)=16$$

پس داریم:

$$n(A \cup B)=50+33-16=67$$