# مقدمهٔ مؤلف

*کنکوری هستی؟ بزرگ شدیا!!*

دوستایِ بزرگم سلام. می‌خوام یکم دربارهٔ امسال باهاتون صحبت کنم *(خووب گوش کنید).*

امسال واسهٔ شماها قراره که امتحانِ نهاییِ خرداد، تأثیر مستقیم روی کنکور داشته باشه و خُب! خداییش درصد زیادیه پس برای این‌که بتونین توی یه دانشگاه خوب درس بخونید، هم باید تستی بخونید هم تشریحی. به قوی و ضعیف بودن دانش‌آموز هم ربطی نداره، ما امسال توی مدارس خفن هم از بچه‌ها امتحان تشریحی می‌گیریم.

این کتاب رو به پیشنهاد خیلی‌سبز عزیز برای شما و موفقیت شما توی امتحان نهایی نوشتم. ایشالا که تونسته باشم کمکتون کرده باشم.

**چندتا نکته هم در مورد کتاب بگم:**

سعی کردم یه درس‌نامهٔ بسیار روان به همراه مثال و پاسخ بیارم که با خوندنش درس رو به راحتی بفهمید. آخرِ هر درس هم چندتا تمرین آوردم که کل کتاب درسی و امتحان نهایی‌های چند سال اخیر رو کامل پوشش می‌ده و در آخر هر فصل هم آزمون‌های جمع‌بندی رو داریم. در آخر کتاب ۶تا آزمون تشریحی (دوتا برای نوبت اول، چهارتا امتحان نهایی) گذاشتم که حتماً شب امتحان حل کنید و برید واسه ۲۰ (بیستاااا نه نوزده و هفتاد و پنج).

## کلام آخر

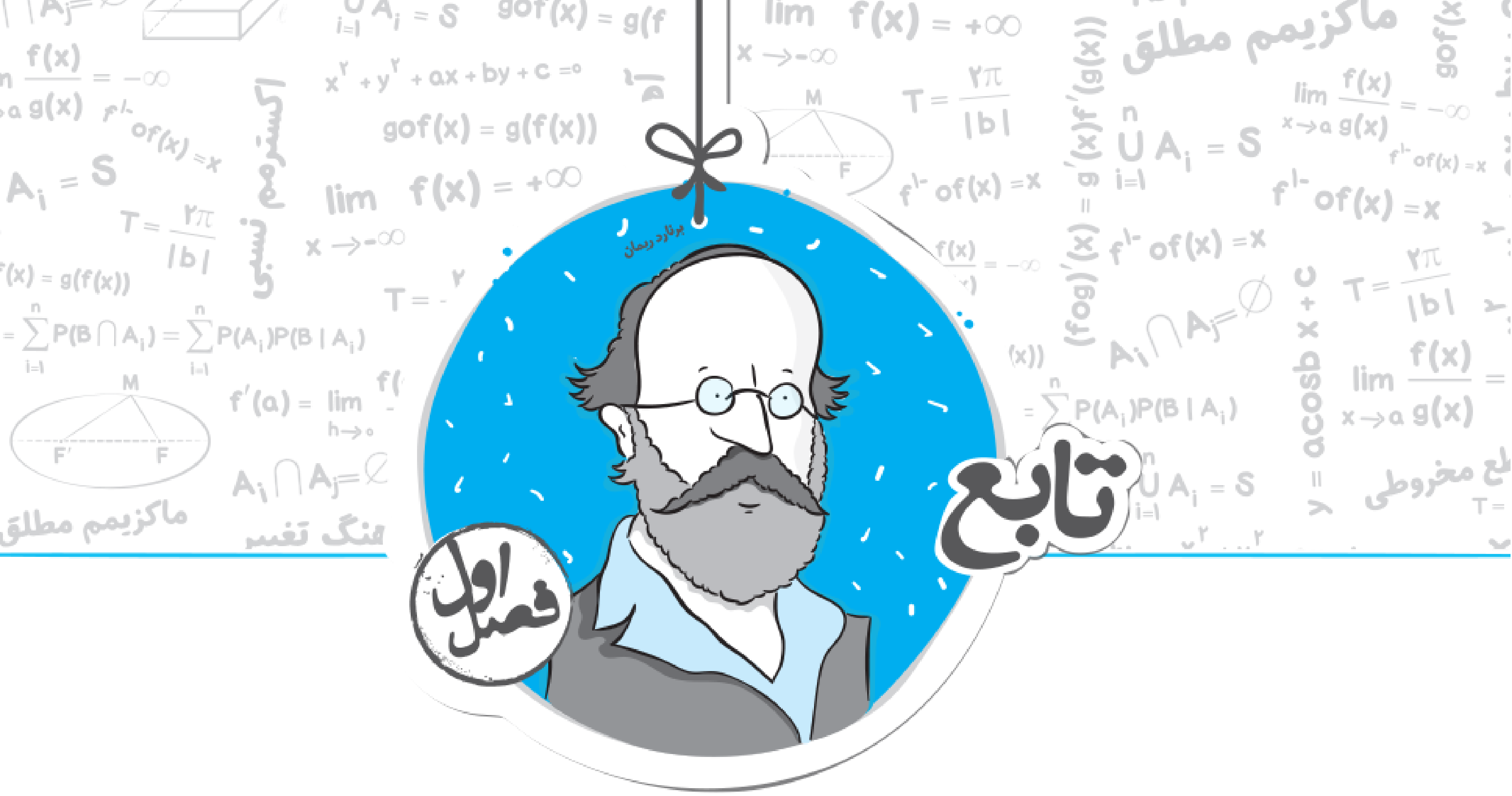
تشکر ویژه از اساتید عزیزم، مهندس مجید رفعتی (آقایِ حسابان)، مهندس محمد کشوری (💙)، مهندس علی‌رضا شریف خطیبی (پدرِ معنوی من)، دکتر کامبیز مقدم‌فر و استاد علی مؤمن‌زاده.

تشکر از همکاران خوبم خانم طلوعی و آقایان حیدریان *(عشقی)*، علیرضا محمدی و محسن فراهانی که ویرایشِ این کتاب رو قبول کردن.

و در نهایت از دوستان خوبم، آقایان حسین‌خانی، علیزاده و خانم‌ها سَبکار، ایمان‌زاده و امجدیان کمال تشکر را دارم.

**سلام برسون**

# فهرست




## ۱ تبدیل نمودار توابع

رسم خیلی از تابع‌ها آن هم در سطح دبیرستان اصلاً سخت نیست یعنی اگر نمودار یک تابع را داشته باشیم، با یک سری تبدیل‌ها می‌توان نمودار تابع‌های زیادی را رسم کرد.

### انتقال‌های عمودی و افقی

پارسال و پیرارسال (*دو سال پیش*) با یک سری تبدیل آشنا شدید و چون پیش‌نیاز درس‌های جدیدند، بد نیست یادی از آن‌ها کنیم. (*البته کتاب دوازدهم هم بهش اشاره کرده.*)

نمودار تابع $y=f(x)$ را داریم:

**الف) $y=f(x)+k$**

این نمودار را به این شکل رسم می‌کنیم:

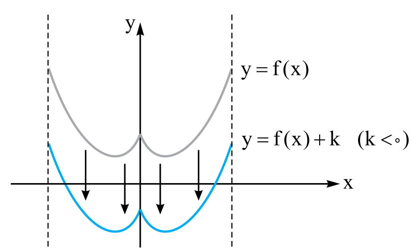
۱) $k>0 \Rightarrow$ $f(x)$ را $|k|$ واحد بالا می‌بریم

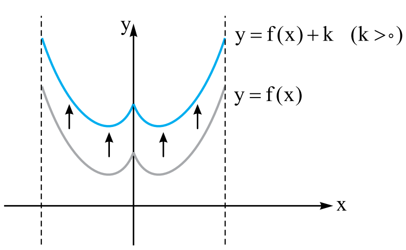
۲) $k<0 \Rightarrow$ $f(x)$ را $|k|$ واحد پایین می‌بریم

به این انتقال، **انتقال عمودی** می‌گوییم.

مثلاً $f(x)+2$ ، دو واحد نسبت به $f(x)$ به بالا می‌رود و $f(x)-1$، یک واحد نسبت به $f(x)$ به پایین می‌رود.

به نمودارهای زیر توجه کنید:



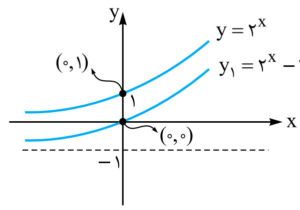



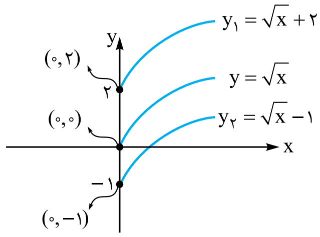

**دامنه و برد $y=f(x)+k$**

همان‌طور که می‌بینید در این انتقال، دامنهٔ تابع تغییری نمی‌کند. (*انتقال عمودیه*) ولی برد تابع، $k$ واحد جابه‌جا می‌شود.

پس اگر $R_{f(x)}=[a,b]$ (برد f) باشد، آن‌گاه $R_{f(x)+k}=[a+k,b+k]$ است.

چند مثال از انتقال عمودی توابع معروف ببینید:




دامنهٔ $y=2^x$، $\mathbb{R}$ و برد آن بازهٔ $(0,+\infty)$ است.

دامنهٔ $y_1$، $\mathbb{R}$ و برد آن بازهٔ $(-1,+\infty)$ است.

دامنه و برد تابع $y=\sqrt{x}$، بازهٔ $[0,+\infty)$ است.

دامنهٔ $y_1$، بازهٔ $[0,+\infty)$ و برد آن بازهٔ $[2,+\infty)$ است.

دامنهٔ $y_2$ بازهٔ $[0,+\infty)$ و برد آن بازهٔ $[-1,+\infty)$ است.

**تذکر** برای این‌که در انتقال، نمودار دقیق‌تری به دست آوریم، مختصات یک یا چند نقطه را در نمودار انتقال‌یافته مشخص می‌کنیم و سپس نمودار را براساس آن‌ها رسم می‌کنیم.

مثلاً برای رسم نمودار $y_1=\sqrt{x}+2$ با استفاده از نمودار $y=\sqrt{x}$، می‌گوییم نقطهٔ $(0,0)$ روی تابع $y=\sqrt{x}$ قرار دارد و اگر دو واحد رو به بالا انتقال پیدا کند، x آن عوض نشده و همان صفر است، ولی y آن به اضافهٔ دو خواهد شد و نقطهٔ انتقال‌یافته $(0,2)$ خواهد بود.

### ب) $y=f(x+k)$

این نمودار را به این شکل رسم می‌کنیم:

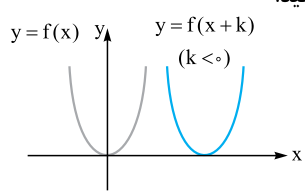
۱) $k>0 \Rightarrow$ $f(x)$ را $|k|$ واحد چپ می‌بریم

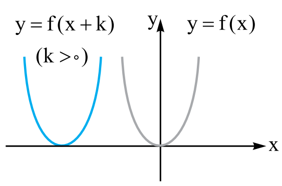
۲) $k<0 \Rightarrow$ $f(x)$ را $|k|$ واحد راست می‌بریم

به این انتقال، **انتقال افقی** می‌گوییم.

مثلاً $f(x-2)$، دو واحد نسبت به $f(x)$ به سمت راست می‌رود و $f(x+1)$، یک واحد نسبت به $f(x)$ به سمت چپ می‌رود *(برعکسه)*.

به نمودارهای زیر توجه کنید:



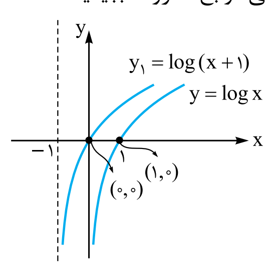



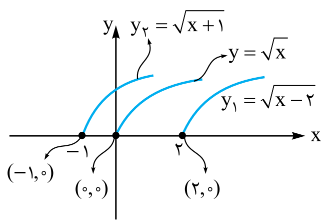

### دامنه و برد $y=f(x+k)$

همان‌طور که می‌بینید در این انتقال، برد تابع تغییری نمی‌کند *(انتقال افقیه دیگه)* ولی دامنهٔ تابع، k واحد جابه‌جا می‌شود.

پس اگر $D_{f(x)}=[a,b]$، آن‌گاه $D_{f(x+k)}=[a-k,b-k]$ است. *(چرا این‌جوری نگاه می‌کنید؟؟؟ گفتم که برعکسه)*

چند مثال از انتقال افقی توابع معروف ببینید:




دامنهٔ $y=\log x$، بازهٔ $(0,+\infty)$ و برد آن $\mathbb{R}$ است.

دامنهٔ $y_1$، بازهٔ $(-1,+\infty)$ و برد آن $\mathbb{R}$ است.

دامنه و برد $y=\sqrt{x}$، بازهٔ $[0,+\infty)$ است.

دامنهٔ $y_1$، بازهٔ $[2,+\infty)$ و برد آن بازهٔ $[0,+\infty)$ است.

دامنهٔ $y_2$، بازهٔ $[-1,+\infty)$ و برد آن بازهٔ $[0,+\infty)$ است.

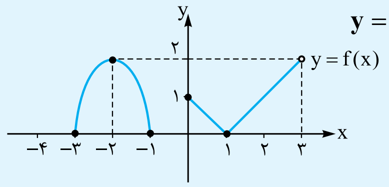
**توجه** خیلی وقت‌ها ممکن است در یک تابع، هم تغییرات افقی و هم عمودی داشته باشیم، مثلاً:

$$y=f(\underset{\substack{\downarrow\\ \text{تغییر افقی}}}{x+\square})+\Delta \rightarrow \text{تغییر عمودی}$$

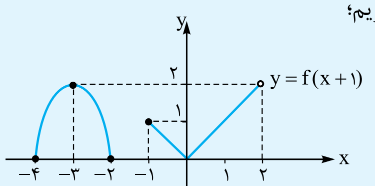
برای رسم این تابع‌ها از روی $y=f(x)$ اول تغییر افقی $(\square)$ و بعد تغییر عمودی $(\Delta)$ را اعمال می‌کنیم.

## مثال و پاسخ

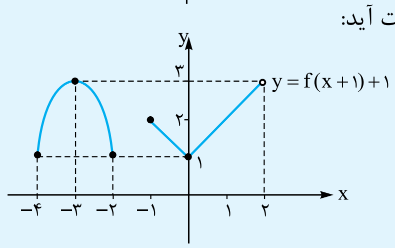
**مثال** نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت مقابل است. به کمک انتقال، نمودار تابع $y=f(x+۱)+۱$ را رسم کنید.




**پاسخ** ابتدا نمودار $f(x+۱)$ را رسم می‌کنیم، پس نمودار $f(x)$ را یک واحد به چپ می‌بریم؛ یعنی:

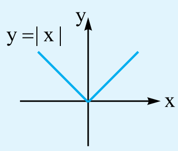



حالا نمودار $f(x+۱)$ را یک واحد بالا می‌بریم تا نمودار تابع $y=f(x+۱)+۱$ به دست آید:

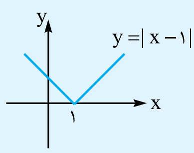



**مثال** نمودار تابع $y=|x-۱|-۲$ را با استفاده از انتقال رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.

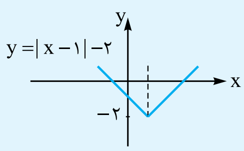
**پاسخ** ابتدا نمودار $y=|x|$ را رسم می‌کنیم.




در مرحلهٔ بعدی نمودار $y=|x-۱|$ را با انتقال افقی یک واحد به سمت راست تابع اصلی $(y=|x|)$ رسم می‌کنیم.



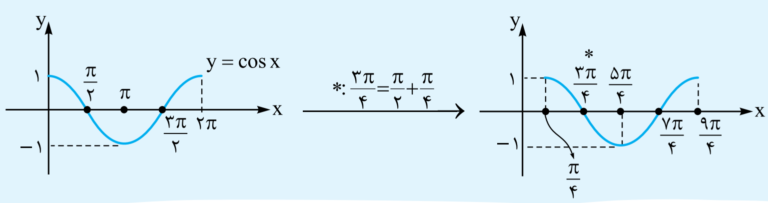

در مرحلهٔ آخر، نمودار مرحلهٔ قبلی را با انتقال عمودی دو واحد به پایین منتقل کرده و رسم می‌کنیم:




با توجه به نمودار مشخص هست که دامنهٔ نمودار انتقال‌یافته $\mathbb{R}$ و برد آن هم $[-۲,+\infty)$ می‌باشد.

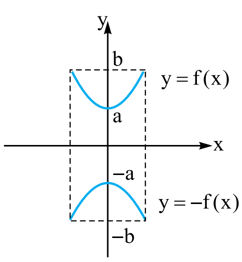
**مثال** نمودار تابع $y=\cos(x-\frac{\pi}{۴})$ را به کمک نمودار $y=\cos x$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ رسم کنید. *(نهایی خرداد ۱۴۰۰)*

**پاسخ** ابتدا نمودار $y=\cos x$ را در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ رسم می‌کنیم و سپس به اندازهٔ $\frac{\pi}{۴}$ به سمت راست انتقال افقی می‌دهیم.




از مطالبی که در سال‌های قبل یاد گرفتید، دو تبدیل بسیار مهم و پرکاربرد $-f(x)$ و $f(-x)$ باقی‌مانده است. این دو را هم بگوییم و برویم سراغ تبدیل‌های جدید.

## رسم $-f(x)$ و $f(-x)$ از روی $f(x)$




نمودار $y=f(x)$ را داریم:

### الف) $y=-f(x)$

برای رسم این تابع از روی $f(x)$، نمودار f را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.

واضح است که دامنهٔ f و $-f$ با هم برابرند ولی محدودهٔ برد به صورت زیر تغییر می‌کند.

- اگر $R_{f(x)}=[a,b]$، آن‌گاه $R_{-f(x)}=[-b,-a]$ است. *(نمودار رو ببینید)*

یک مثال هم از یکنوایی یک تابع سه‌ضابطه‌ای ببینید:

## مثال و پاسخ

**مثال** با رسم نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} -x^{۲}+۲ & -۲\le x<-۱ \\ -x-۱ & -۱\le x<۱ \\ x^{۲}-۱ & ۱\le x \end{cases}$، تعیین کنید تابع در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی می‌باشد؟

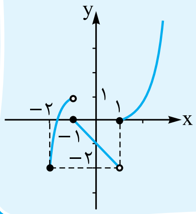
*(نهایی شهریور ۱۴۰۰)*

**پاسخ** با آرامش در هر بازه نمودار مربوطه را رسم می‌کنیم. (برای رسم از قوانین انتقال کمک می‌گیریم.)

صعودی $[-۲,-۱)$

نزولی $[-۱,۱)$

صعودی $[۱,+\infty)$




## سؤال‌های امتحانی

**۱۷- درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید.**

الف) نمودار تابع $y=x^{۳}$ در بازهٔ $[۰,۱]$ پایین‌تر از نمودار تابع $y=x^{۲}$ قرار دارد. *(نهایی خرداد ۹۹)*

ب) اگر تابع $f(x)$ در یک فاصله صعودی باشد، آن‌گاه اکیداً صعودی نیز خواهد بود. *(نهایی خرداد ۹۹)*

پ) اگر تابع $f$ در یک بازه نزولی اکید باشد، در این بازه نزولی نیز هست. *(نهایی شهریور ۹۹)*

ت) تابع $y=-\log_{۵}x+۱$ در دامنهٔ خود، یک تابع اکیداً یکنوا است. *(نهایی شهریور ۱۴۰۰)*

ث) چندجمله‌ای $P(x)=(۲-x)^{۲}(x+۱)^{۳}$ یک چندجمله‌ای از درجه ۵ است. *(نهایی شهریور ۹۹)*

ج) تابع $f(x)$ در بازهٔ شامل $a$ و $b$ صعودی است. اگر $f(a)\le f(b)$، آن‌گاه $a\le b$. *(نهایی دی ۹۹)*

**۱۸- جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.**

الف) اگر $\frac{۱}{۶۴}\le(\frac{۱}{۲})^{۳x-۲}$ باشد، حدود $x$ برابر ............ است. *(نهایی دی ۹۸)*

ب) به تابعی که در یک بازه فقط صعودی یا نزولی باشد، ............ می‌گوییم. *(نهایی خرداد ۱۴۰۰)*

پ) توابع اکیداً یکنوا، همواره ............ هستند.

**۱۹- کوتاه پاسخ دهید.**

الف) درجهٔ تابع $f(x)=x^{۲}(۱-x)^{۵}$ را مشخص کنید. *(نهایی شهریور ۹۸)*

ب) کدام تابع در یک بازه، هم صعودی است و هم نزولی؟

پ) تابع $h(x)=|x+۲|$ در چه بازه‌ای اکیداً صعودی است؟ *(نهایی شهریور ۹۸)*

ت) دامنهٔ توابع چندجمله‌ای برابر چیست؟

ث) وارون تابع با ضابطهٔ $y=x^{۳}$ چیست؟

**۲۰-** نمودار تابع $f(x)=(x+۱)^{۳}$ را رسم کنید. این تابع در دامنهٔ خود اکیداً صعودی است یا اکیداً نزولی؟ *(نهایی دی ۹۷)*

**۲۱-** اگر $\log(x+۱)\le\log(۲x-۳)$، حدود $x$ را به دست آورید. *(نهایی شهریور ۹۸)*

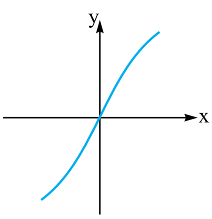
**۲۲-** با رسم نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} ۱-x^{۲} & x\le ۱ \\ -۱ & x>۱ \end{cases}$ تعیین کنید تابع در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی می‌باشد؟ *(نهایی دی ۹۹)*

**۲۳-** با رسم نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲} & x\ge ۰ \\ -۳x & -۱<x<۰ \end{cases}$ تعیین کنید تابع در چه بازه‌ای اکیداً صعودی و در چه بازه‌ای اکیداً نزولی می‌باشد؟

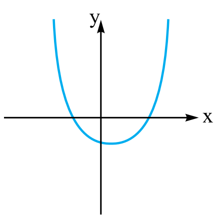
*(نهایی خرداد ۱۴۰۰)*

**۲۴-** وضعیت یکنوایی یا اکیداً یکنوایی نمودارهای زیر را بررسی کنید.

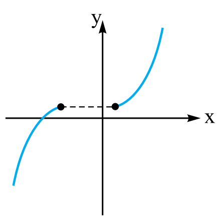
الف)



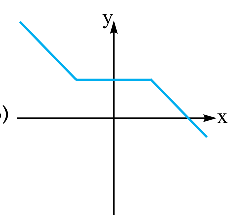

ب)




پ)

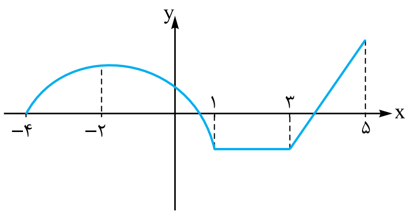



ت)




فصل اول: تابع

۲۵- با توجه به نمودار روبه‌رو، مشخص کنید این تابع در چه بازه‌ای اکیداً نزولی، در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای هم صعودی و هم نزولی است؟




۲۶- تابع $f(x)=\begin{cases} x+1 & x<-2 \\ 1 & -2<x<1 \\ -2x & x>1 \end{cases}$ را رسم کنید و بازه‌هایی که در آن تابع اکیداً صعودی، اکیداً نزولی و یا ثابت است را مشخص کنید.

۲۷- نمودار تابع $f(x)=-\cos(x+\frac{\pi}{4})$ را در بازهٔ $[0,\pi]$ رسم کنید و وضعیت یکنوایی آن را در بازه‌های مختلف بررسی کنید.

۲۸- دو تابع $f(x)=\frac{1}{x+1}$ و $g(x)=\log(x+1)$ را رسم کنید. کدام‌یک از آن‌ها در تمام دامنهٔ خود اکیداً صعودی است؟

۲۹- نشان دهید تابع $f(x)=x^2-2x$ با شرط $x\le 1$، اکیداً نزولی است.

۳۰- فرض کنید f در یک بازه، اکیداً نزولی باشد و a ، b متعلق به این بازه باشند. اگر $f(a)\le f(b)$، نشان دهید که $a\ge b$ است.

۳۱- اگر f در یک بازه، اکیداً صعودی باشد، آیا صعودی هم هست؟ در مورد عکس این رابطه چه می‌توان گفت؟

۳۲- مجموعه جواب هر یک از نامعادلات زیر را بیابید.

الف) $(\sqrt{2})^{3x-1}\ge 2^x$

ب) $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)\le -1$

پ) $(\frac{1}{2})^{2x+1}\ge \frac{1}{128}$

ت) $\log(\frac{x+1}{5})<1$

ث) $\log_{0/5}\frac{2x+1}{3}\le \log_{0/5}\frac{4x-1}{2}$

۳۳- اگر تابع‌های f و g در یک فاصله اکیداً صعودی (اکیداً نزولی) باشند، نشان دهید $f+g$ هم در این فاصله اکیداً صعودی (اکیداً نزولی) است.

# ۳ بخش‌پذیری و تقسیم

به خاطر دارم که یکی از سؤالات همیشگی دبستانم این بود:

«تقسیم مقابل را انجام دهید و درستی آن را امتحان کنید: $7 \,\big|\, \underline{2}$»

تقسیم:
$$\begin{array}{r|l} 7 & 2 \\ \cline{2-2} \underline{-6} & 3 \\ 1 & \end{array}$$

روش حل و امتحان درستی تقسیم هم به صورت مقابل است:

امتحان درستی تقسیم: $\underset{\text{مقسوم}}{7} = \underset{\text{مقسوم‌علیه}}{2}\times \overset{\text{خارج قسمت}}{3} + \underset{\text{باقی‌مانده}}{1}$

راه درستی تقسیم برای چندجمله‌ای‌ها هم برقرار است که به آن، **قضیهٔ تقسیم** می‌گوییم.

**قضیه** تقسیم

اگر $f(x)$ و $p(x)$ تابع‌های چندجمله‌ای باشند و درجهٔ $p(x)$ از صفر بزرگ‌تر باشد، آن‌گاه تابع‌هایِ چندجمله‌ایِ منحصر به فردِ $q(x)$ و $r(x)$ وجود دارند که:

$$\underset{\text{مقسوم}}{f(x)} = \overset{\text{مقسوم‌علیه}}{p(x)}\times \underset{\text{خارج قسمت}}{q(x)} + \overset{\text{باقی‌مانده}}{r(x)}$$

که در آن درجهٔ $r(x)$ از درجهٔ $p(x)$ کم‌تر است. (نه لزوماً ۱ واحد)

**توجه** اگر $r(x)=0$ باشد، می‌گوییم f بر p بخش‌پذیر است.

## مثال و پاسخ

**مثال** نشان دهید که $f(x)=x^3-27$ بر $p(x)=x^2+3x+9$ بخش‌پذیر است.

**پاسخ** برای بخش‌پذیربودن باید باقی‌مانده، صفر شود. ببینید:

$$\begin{array}{r|l} x^3 \qquad\qquad -27 & x^2+3x+9 \\ \cline{2-2} \underline{-\ (x^3+3x^2+9x)\qquad} & x-3 \\ -3x^2-9x-27 & \\ \underline{-(-3x^2-9x-27)} & \\ 0 & \end{array}$$

خیلی وقت‌ها پیداکردن باقی‌ماندهٔ تقسیم به این راحتی نیست و ممکن است بسیار طولانی شود. قضیهٔ زیر برای پیداکردن باقی‌ماندهٔ تقسیم‌هایی که مقسوم‌علیه آن $ax+b$ (درجه ۱) است خیلی کار راه‌انداز است.

**قضیه** باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax+b$ برابر است با: $r(x)=f(\frac{-b}{a})$

یعنی باید ریشهٔ معادلهٔ $ax+b=0$ را به دست آوریم و در $f(x)$ جای‌گذاری کنیم.

اثبات قضیه را هم بدانید: $f(x)=(ax+b)q(x)+r$

جای $r(x)$، $r$ می‌نویسیم چون مقسوم‌علیه درجه ۱ است پس باقی‌مانده حتماً درجهٔ صفر (عدد ثابت) است.

حالا اگر ریشهٔ $ax+b=0$؛ یعنی $\frac{-b}{a}$ را در رابطهٔ بالا جای‌گذاری کنیم، داریم:

$$f(\frac{-b}{a})=(a\times(\frac{-b}{a})+b)q(\frac{-b}{a})+r=\underbrace{(-b+b)q(-\frac{b}{a})}_{0}+r=r \Rightarrow f(-\frac{b}{a})=r$$

## مثال و پاسخ

**مثال** باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $x^{100}+x^{99}-x^{11}+2x+2$ بر $x+1$ را به دست آورید.

**پاسخ** اول ریشهٔ مقسوم‌علیه یعنی $x+1$ را پیدا می‌کنیم و در مقسوم جای‌گذاری می‌کنیم. ببینید:

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow (-1)^{100}+(-1)^{99}-(-1)^{11}+2(-1)+2=1-1+1-2+2=1$$

پس باقی‌مانده ۱ است.

---

**مثال** مقادیر a و b را چنان بیابید که چندجمله‌ای $x^3+x^2+ax-b$ بر $x+1$ و $x-1$ بخش‌پذیر باشد.

**پاسخ** چندجمله‌ای $x^3+x^2+ax-b$ در $x=1$ و $x=-1$ صفر می‌شوند. (بخش‌پذیری یعنی $r=0$)

$$x=-1 \Rightarrow (-1)^3+(-1)^2+a(-1)-b=0 \Rightarrow -1+1-a-b=0 \Rightarrow a+b=0 \quad (1)$$

$$x=1 \Rightarrow (1)^3+(1)^2+a(1)-b=0 \Rightarrow a-b=-2 \quad (2)$$

از حل دستگاه مقابل:

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a-b=-2 \end{cases} \Rightarrow 2a=-2 \Rightarrow a=-1 \text{ ، } b=1$$

---

**مثال** مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $P(x)=x^3+ax^2+bx-2$ بر $(x-2)$ بخش‌پذیر بوده و باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر $(x+1)$ برابر ۳ باشد.

*(نهایی شهریور ۹۹)*

**پاسخ** چون $P(x)$ بر $(x-2)$ بخش‌پذیر است، پس می‌بایست $P(2)=0$ (عدد ۲، ریشهٔ $(x-2)$ می‌باشد) و چون باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $(x+1)$ برابر ۳ هست، می‌بایست $P(-1)=3$ (عدد $-1$، ریشهٔ $(x+1)$ می‌باشد) باشد.

$$P(2)=0 \Rightarrow 2^3+a(2)^2+b(2)-2=0 \Rightarrow 8+4a+2b-2=0 \Rightarrow 4a+2b=-6 \xrightarrow{\div 2} 2a+b=-3$$

$$P(-1)=3 \Rightarrow (-1)^3+a(-1)^2+b(-1)-2=3 \Rightarrow -1+a-b-2=3 \Rightarrow a-b=6$$

$$\begin{cases} 2a+b=-3 \\ a-b=6 \end{cases} \Rightarrow 3a=3 \Rightarrow a=1 \quad , \quad b=-5$$

## کلام آخر

سه‌تا تجزیهٔ خیلی مهم که به کمک این‌ها، طراح‌های امتحانات و کنکور می‌توانند سؤالات سختی را مطرح کنند. *(فواهشاً مفظ کنید.)*

$n\in\mathbb{N}$:

**الف** $x^n-a^n=(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1})$

(در پرانتز دوم همهٔ علامت‌ها + هستند.)

حالت‌های خاص این تجزیه را قبلاً زیاد دیدید:

$n=2:\ x^2-a^2=(x-a)(x+a)$ (مزدوج)

$n=3:\ x^3-a^3=(x-a)(x^2+ax+a^2)$ (چاق و لاغر)

**n زوج باشد:**

**ب** $x^n-a^n=(x+a)(x^{n-1}-ax^{n-2}+a^2x^{n-3}-\cdots+a^{n-2}x-a^{n-1})$

(در پرانتز دوم علامت‌ها یکی‌درمیان + و - می‌شوند.)

حالت خاص:

$n=2:\ x^2-a^2=(x+a)(x-a)$ (مزدوج)

**n فرد باشد:**

**پ** $x^n+a^n=(x+a)(x^{n-1}-ax^{n-2}+a^2x^{n-3}-\cdots-a^{n-2}x+a^{n-1})$

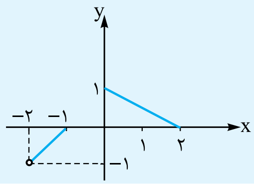
(در پرانتز دوم علامت‌ها یکی‌درمیان + و - می‌شوند.)

حالت خاص:

$n=3:\ x^3+a^3=(x+a)(x^2-ax+a^2)$ (چاق و لاغر)

*بچه‌ها به نظرم برای مفظ‌کردن این تجزیه‌ها از مالت‌های فاصشون می‌تونین کمک بگیرین.*

# آزمون جمع بندی

| ردیف | آزمون جمع‌بندی | رشتهٔ ریاضی و فیزیک | مدت امتحان: ۹۰ دقیقه | Kheilisabz.com | نمره |
|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | تابع $f(x)=\begin{cases}-x^{۳} & -۱<x<۱\\ x & ۱\le x\le ۲\end{cases}$ را در نظر بگیرید:<br>الف) نمودار تابع $f(x)$ را رسم کنید سپس دامنه و برد آن را مشخص کنید.<br>ب) دامنه و برد تابع $y=۲f(-x-۱)-۱$ را به کمک نمودارش پیدا کنید. | | | | ۲ |
| ۲ | اگر نقطهٔ $A(-۲,۱)$ روی تابع $f(x)$ باشد، مختصات نقطهٔ A را روی تابع $y=\frac{-۱}{۳}f(x-۲)$ به دست آورید. | | | | ۱ |
| ۳ | نمودار تابع $y=-f(-۲x)+۱$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $f(x)$ را رسم کنید سپس دامنه و برد آن را بیابید.<br><br> | | | | ۲ |
| ۴ | اگر دامنهٔ تابع $f(x)$ برابر $[-۱,۴]$ و برد آن $[۲,۵]$ باشد، دامنه و برد دو تابع $y=۳f(x+۱)$ و $y=۲-f(۲x-۱)$ را به دست آورید. | | | | ۲ |
| ۵ | به کمک نمودار تابع $y=\sin x$ با دامنهٔ $[۰,۲\pi]$، نمودار تابع $y=\sin(۲x-\frac{\pi}{۳})$ را رسم کنید و در آخر دامنه و برد آن را پیدا کنید. | | | | ۲ |
| ۶ | تابع $f=\{(۳,۲),(۱,۰),(-۱,۰),(-۲,-۱)\}$ صعودی است یا نزولی؟ چرا؟ | | | | ۰/۷۵ |
| ۷ | نمودار تابع $y=\lvert x-۱\rvert+\lvert x+۲\rvert$ را در بازهٔ $[-۴,۳]$ رسم کنید و وضعیت یکنوایی آن را در بازه‌های مختلف بررسی کنید. | | | | ۲ |
| ۸ | برای هر یک از موارد خواسته‌شده، تابع‌های f و g را به‌گونه‌ای مثال بزنید که در آن شرایط صدق کند.<br>الف) $\begin{cases}f & \text{صعودی}\\ g & \text{نزولی}\\ f+g & \text{صعودی}\end{cases}$<br>ب) $\begin{cases}f & \text{صعودی}\\ g & \text{صعودی}\\ f-g & \text{هم صعودی و هم نزولی}\end{cases}$<br>پ) $\begin{cases}f & \text{نزولی}\\ g & \text{نزولی}\\ f-g & \text{اکیداً صعودی}\end{cases}$ | | | | ۲/۲۵ |
| ۹ | تابع $f(x)=x^{۳}-۳x^{۲}+۳x$ را در نظر بگیرید.<br>الف) نمودار تابع $f(x)$ را به کمک تابع $y=x^{۳}$ رسم کنید.<br>ب) نشان دهید که f وارون‌پذیر است و نمودار $f^{-۱}$ را رسم کنید.<br>پ) ضابطهٔ $f^{-۱}$ را به دست آورید. | | | | ۲ |
| ۱۰ | اگر $x+۲$ یک عاملِ $p(x)=x^{۳}+ax^{۲}+bx-۴$ باشد و باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $x-۱$ برابر ۶- باشد، آن‌گاه ریشه‌های معادلهٔ $p(x)=۰$ را به دست آورید. | | | | ۲ |
| ۱۱ | سادهٔشدهٔ $A=\frac{۱+x+x^{۲}+x^{۳}+x^{۴}}{۲}$ به ازای $x=\sqrt[۵]{۳}$ چند برابر $\frac{۲}{۱-\sqrt[۵]{۳}}$ است؟ | | | | ۲ |
| | جمع نمرات | | | | ۲۰ |

# پاسخ سؤال‌های امتحانی

۱- الف) $\frac{2\pi}{|-\frac{\pi}{4}|} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8$

ب) $\frac{2\pi}{|\frac{1}{3}|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$

پ) $\max = |a| + c = |-\sqrt{5}| + 0 = \sqrt{5}$

۲- الف) نادرست، زیرا $\min = -|a| + c = -|-3| + 2 = -1$.

ب) نادرست، زیرا تابع سینوس در $x = \frac{\pi}{2}$ تعریف شده و مقدار آن ۱ است.

پ) درست، زیرا

$$y = 2\sin x \cos x = \sin 2x \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$$

۳-

$$\left.\begin{array}{l} \max = |a| + c = 6 \\ \min = -|a| + c = -2 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} 2c = 4$$

$$\Rightarrow c = 2 \ , \ |a| = 4 \Rightarrow a = \pm 4$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow b = \pm 2$$

هر یک از توابع $y = 4\sin(2x) + 2$ یا $y = -4\sin(2x) + 2$ یا $y = 4\sin(-2x) + 2$ یا $y = -4\sin(-2x) + 2$ قابل قبول است.

۴-

$$\left.\begin{array}{l} \max = |a| + c = 4 \\ \min = -|a| + c = -2 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} 2c = 2$$

$$\Rightarrow c = 1 \ , \ |a| = 3 \Rightarrow a = \pm 3$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = 2 \Rightarrow |b| = \pi \Rightarrow b = \pm\pi$$

هر یک از توابع $y = 3\cos(\pi x) + 1$ یا $y = -3\cos(\pi x) + 1$ یا $y = 3\cos(-\pi x) + 1$ یا $y = -3\cos(-\pi x) + 1$ قابل قبول است.

۵-

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \ , \ \max = |a| + c = |-3| + 1 = 4$$

$$\min = -|a| + c = -|-3| + 1 = -2$$

۶-

$$\max = |a| + c = |2| + 1 = 3$$

$$\min = -|a| + c = -|2| + 1 = -1$$

۷-

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$$

$$\max = |a| + c = |-2\pi| + 9 = 2\pi + 9$$

$$\min = -|a| + c = -|-2\pi| + 9 = -2\pi + 9$$

۸- ضابطهٔ تابع را به صورت $y = a\sin bx + c$ در نظر می‌گیریم:

$$\left.\begin{array}{l} \max = |a| + c = 5 \\ \min = -|a| + c = 3 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} 2c = 8$$

$$\Rightarrow c = 4 \ , \ |a| = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = 3 \Rightarrow |b| = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow b = \pm\frac{2\pi}{3}$$

هر یک از توابع $y = \sin(\frac{2\pi x}{3}) + 4$ یا $y = -\sin(-\frac{2\pi x}{3}) + 4$ یا $y = \sin(-\frac{2\pi x}{3}) + 4$ یا $y = \sin(-\frac{2\pi x}{3}) + 4$ قابل قبول است.

۹- نمودار نشان‌دهندهٔ یک تابع سینوسی به فرم $y = a\sin bx + c$ است. با توجه به شکل، مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دورهٔ تناوب تابع، ضابطهٔ تابع را به دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{l} \max = |a| + c = \frac{1}{2} \\ \min = -|a| + c = -\frac{1}{2} \end{array}\right\} \xrightarrow{+} 2c = 0$$

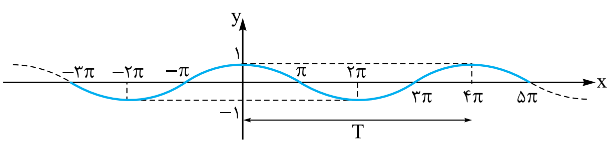
$$\Rightarrow c = 0 \ , \ |a| = \frac{1}{2} \ , \ a = \pm\frac{1}{2}$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow |b| = 3 \Rightarrow b = \pm 3$$

با توجه به این‌که نمودار تابع مانند شکل اصلی تابع نیست، پس $a \times b < 0$ می‌باشد. هر یک از توابع $y = -\frac{1}{2}\sin 3x$ یا $y = \frac{1}{2}\sin(-3x)$ قابل قبول است.

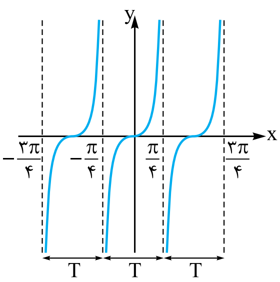
۱۰- الف) نمودار تابع $f(x) = \cos\frac{x}{2}$ به صورت زیر است:

*واسه رسم $\cos\frac{x}{2}$ باید دامنهٔ cosx رو دو برابر کنیم.*




همان‌طور که از روی نمودارش می‌بینید دورهٔ تناوب تابع $f(x) = \cos\frac{x}{2}$، $4\pi$ است.

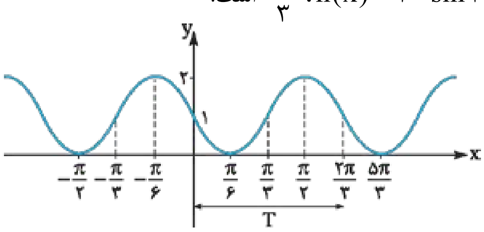
ب) نمودار تابع $g(x) = \frac{1}{2}\tan 2x$ به صورت مقابل است: با توجه به نمودار، دورهٔ تناوب $g(x) = \frac{1}{2}\tan 2x$ برابر با $\frac{\pi}{2}$ است.




پ) نمودار تابع $h(x) = 1 - \sin 3x$ به صورت زیر است:

*اول باید sin3x رو بکشیم، بعدش -sin3x و آخرش هم 1-sin3x.*

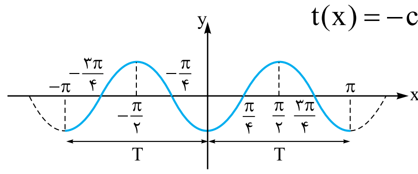
دورهٔ تناوب $h(x) = 1 - \sin 3x$، $\frac{2\pi}{3}$ است.




ت) *ترسیدید مگه نه؟*

خب! همان‌طور که می‌دانیم $\cos ۲x = ۲\cos^۲ x - ۱$ است، پس می‌توان نوشت: $t(x) = -\cos ۲x$

و نمودار $t(x)$ به صورت مقابل است:




پس دورهٔ تناوب $t(x) = -۲\cos^۲ x + ۱$ برابر $\pi$ است.

۱۱- دورهٔ تناوب هر تابع به فرم $y = a\sin(bx + c) + d$ و $y = a\cos(bx + c) + d$ برابر است با $T = \frac{۲\pi}{|b|}$؛ پس دورهٔ تناوب هر یک از توابع زیر به راحتی قابل محاسبه است.

الف) $T = \frac{۲\pi}{|\frac{۱}{۳}|} = ۶\pi$ ب) $T = \frac{۲\pi}{|\sqrt{۲}|} = \sqrt{۲}\pi$

پ) $T = \frac{۲\pi}{|\frac{۳\pi}{۲}|} = \frac{۴}{۳}$ ت) $T = \frac{\pi}{|\pi|} = ۱$

۱۲- ماکزیمم و مینیمم هر تابع به صورت $y = a\sin(bx + c) + d$ و $y = a\cos(bx + c) + d$ به ترتیب برابرند با $|a| + d$ و $-|a| + d$ پس می‌توان نوشت:

الف) $\max = |\pi| + ۲ = \pi + ۲ \ , \ \min = -|\pi| + ۲ = ۲ - \pi$

ب) $\max = |\frac{-۱}{\pi}| + \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{\pi} + \frac{۱}{۲} \ , \ \min = -|\frac{-۱}{\pi}| + \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{\pi}$

پ) $\max = |-۱| - ۱ = ۰ \ , \ \min = -|-۱| - ۱ = -۲$

ت) $\max = |\frac{۱}{۲}| + ۲ = \frac{۵}{۲} \ , \ \min = -|\frac{۱}{۲}| + ۲ = \frac{۳}{۲}$

۱۳- همان‌طور که می‌بینید این تابع در بازهٔ $[۰,۱۶]$، ۴ بار تکرار شده است، پس داریم: $۴T = ۱۶ \Rightarrow T = ۴$

یعنی می‌توان نوشت: $\frac{۲\pi}{|b|} = ۴ \Rightarrow |b| = \frac{\pi}{۲}$

از طرفی می‌دانیم: $d = \frac{\max + \min}{۲} = \frac{۷ + ۱}{۲} = ۴$

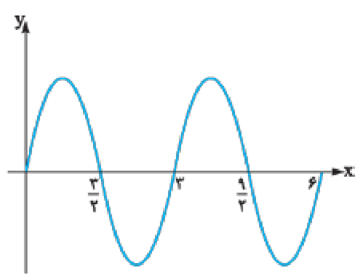
$|a| = \frac{\max - \min}{۲} = \frac{۷ - ۱}{۲} = ۳$

فقط مشخص‌کردن علامت b و a می‌ماند که الان خدمتتان عرض می‌کنم. با توجه به نمودار تابع داده‌شده *(شبیه فور سینوسه نه قرینش)* باید علامت a و b یکی باشد (یا هر دو + یا هر دو −) پس ضابطهٔ تابع به صورت مقابل است:

$y = ۳\sin(\frac{\pi x}{۲}) + ۴$ یا $y = -۳\sin(\frac{-\pi x}{۲}) + ۴$

۱۴- دورهٔ تناوب تابع مقابل، $T = ۳$ است، پس:

$T = \frac{۲\pi}{|b\pi|} = ۳ \Rightarrow |b| = \frac{۲}{۳} \xrightarrow{b>۰} b = \frac{۲}{۳}$



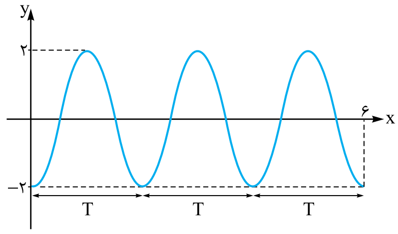

از طرفی برد تابع $[-۳,۳]$ است، پس $|a| = ۳$ است.

حالا با توجه به مثبت‌بودن b باید a هم مثبت باشد یعنی $a = ۳$ *(اگه a منفی باشه نمودار sin باید نسبت به محور xها قرینه می‌شد که این‌جا نشده)*.

در نهایت داریم: $a + b = ۳ + \frac{۲}{۳} = \frac{۱۱}{۳}$

۱۵- به نمودار زیر توجه کنید.

همان‌طور که می‌بینید این تابع در بازهٔ $[۰,۶]$ سه بار تکرار شده است، پس:




$۳T = ۶ \Rightarrow T = ۲$

همچنین دورهٔ تناوب این تابع از روی ضابطه برابر است با:

$$T = \frac{۲\pi}{|b\pi|} = \frac{۲}{|b|} \Rightarrow \frac{۲}{|b|} = ۲ \Rightarrow |b| = ۱$$

و همچنین بیشترین و کمترین مقدار تابع به ترتیب ۲ و ۲− است، پس $|a| = ۲$. در نهایت داریم: $|ab| = |a| \times |b| = ۲$

۱۶- الف) $\pi$

ب) $x \neq k\pi + \frac{\pi}{۲} \ , \ k \in \mathbb{Z}$ پ) $\mathbb{R}$

۱۷- الف) نادرست؛ تابع تانژانت در دامنه‌اش غیریکنوا است.

ب) درست

پ) نادرست؛ نقاط به فرم $x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$ در دامنهٔ تابع تانژانت قرار ندارند.

ت) درست

ث) نادرست؛ دورهٔ تناوب تابع تانژانت برابر $\pi$ است.

ج) نادرست

چ) نادرست؛ برد تابع $f(x) = \tan x$ برابر $\mathbb{R}$ است.

ح) نادرست؛ تابع تانژانت در $x = ۰$ محور xها را قطع می‌کند.

۱۸- الف) این گزاره نادرست است. در واقع هیچ بازهٔ مشخصی وجود ندارد که تابع $\tan x$ مدام در آن کاهش پیدا کند *(به نمودارش نگاه کنید.)*

ب) این گزاره درست است. تابع $\tan x$ در هر بازه‌ای که در تمامی نقاط آن تعریف‌شده باشد صعودی است. *(حتی اکیداً صعودیه مثلاً در بازهٔ* $[\frac{-\pi}{۴}, \frac{\pi}{۴}]$*)*

۱۹-

$$\cos ۳x - \cos x = ۰ \Rightarrow \cos ۳x = \cos x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + x \\ ۳x = ۲k\pi - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۲k\pi \\ ۴x = ۲k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{k\pi}{۲} \end{cases}$$

۲۰-

$$\sin ۳x = \sin ۲x \Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + ۲x \\ ۳x = ۲k\pi + \pi - ۲x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi \\ ۵x = ۲k\pi + \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi \\ x = \frac{۲k\pi}{۵} + \frac{\pi}{۵} \end{cases}$$

۲۱-

$$۲\cos ۳x - \sqrt{۳} = ۰ \Rightarrow ۲\cos ۳x = \sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow \cos ۳x = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \xrightarrow{\cos\frac{\pi}{۶} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}} \cos ۳x = \cos\frac{\pi}{۶}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \\ ۳x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۶} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۱۸} \\ x = \frac{۲k\pi}{۳} - \frac{\pi}{۱۸} \end{cases}$$

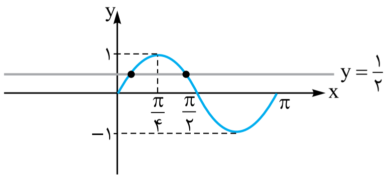
حواستان باشد که $0<\theta<\pi$ است، پس داریم:

| $k$ | ۰ | ۱ |
|---|---|---|
| $\theta = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{4}$ ✓ | $\frac{9\pi}{4}$ ✗ |

| $k$ | ۰ | ۱ |
|---|---|---|
| $\theta = 2k\pi + \frac{3\pi}{4}$ | $\frac{3\pi}{4}$ ✓ | $\frac{11\pi}{4}$ ✗ |

پس زاویه‌های قابل قبول $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$ هستند.

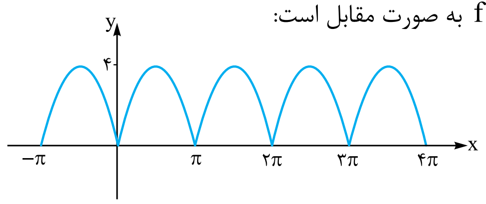
۳۵- دو تابع $y=\sin 2x$ و $y=\frac{1}{2}$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم تا نقاط تقاطع را پیدا کنیم:



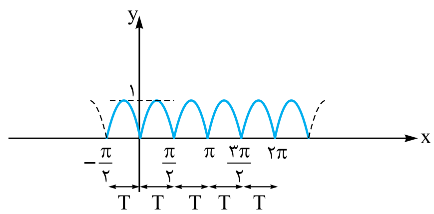
همان‌طور که می‌بینید این ۲ تابع در بازهٔ $[0,\pi]$ در دو نقطه متقاطع‌اند، پس معادلهٔ $\sin 2x = \frac{1}{2}$ در این بازه دو ریشه دارد.

## پاسخ آزمون جمع بندی

۱- نمودار $f(x)$ به صورت مقابل است:



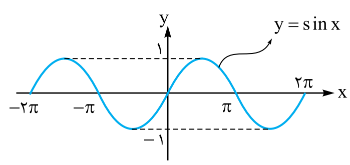
برای رسم تابع $y=\frac{1}{2}f(2x)$ ابتدا $f(2x)$ را رسم می‌کنیم و سپس از روی آن $\frac{1}{2}f(2x)$ را می‌کشیم (*اول دامنه رو نصف می‌کنیم و بعدشم برد رو نصف می‌کنیم*).

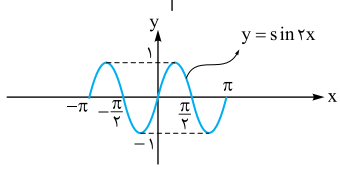


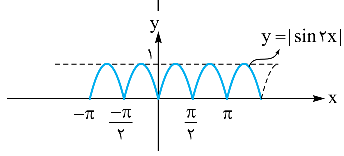
همان‌طور که می‌بینید این تابع در بازه‌های به طول $\frac{\pi}{2}$ تکرار می‌شود پس $T=\frac{\pi}{2}$ است.

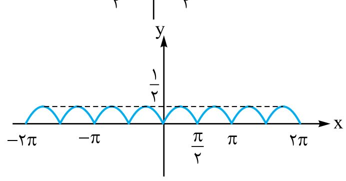
۲- ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده کرده، سپس رسم می‌کنیم:

$$y=|\sin x\cos x| = \left|\frac{1}{2}\sin 2x\right| \Rightarrow y=\frac{1}{2}|\sin 2x|$$









از روی شکل معلوم است که: $\max=\frac{1}{2}\,,\ \min=0\,,\ T=\frac{\pi}{2}$

۳-

$$y=\underbrace{\sin 2x\cos x+\sin x\cos 2x}_{\sin(2x+x)}+2\sin 3x+1$$

$$y=\sin 3x+2\sin 3x+1=3\sin 3x+1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \max = |3|+1=4 \\ \min = -|3|+1=-2 \\ T=\frac{2\pi}{3}\end{cases}$$

۴-

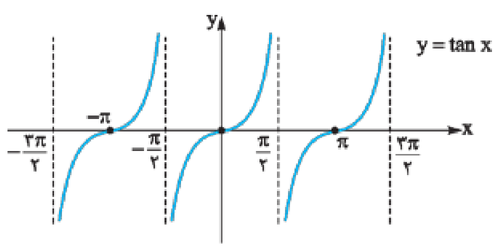
$$\begin{cases}\max = 4\\ \min = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}|b|+a=4\\ -|b|+a=0\end{cases}$$

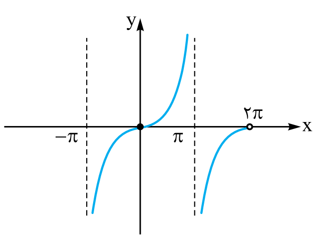
$$\Rightarrow \begin{cases}a=2\\ |b|=2 \Rightarrow b=-2\end{cases}$$ چون تابع هم‌شکل تابع اصلی نیست.

$$T=4 \Rightarrow \frac{2\pi}{|c|}=4 \Rightarrow |c|=\frac{\pi}{2}$$

هر دو مورد قابل قبول است. $\Rightarrow c=\pm\frac{\pi}{2}$

۵-





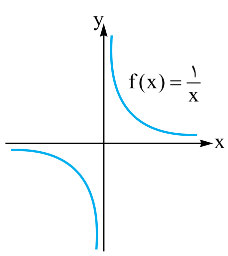
با توجه به شکل مشخص است که دورهٔ تناوب تابع $2\pi$ است و در بازه‌های $(-\pi,\pi)$ و $(\pi,2\pi)$ تابع اکیداً صعودی است و در هیچ بازه‌ای اکیداً نزولی نمی‌باشد.


# حدهای نامتناهی و حد در بی‌نهایت

## ۱ حدهای نامتناهی (حد بی‌نهایت)

در کتاب حسابان ۱، حد در نقطه را یاد گرفتید. الان قرار است که ادامهٔ آن را بخوانیم. داستان به این شکل است که بعضی وقت‌ها با نزدیک‌شدن x به a، f به سمت عدد مشخصی نمی‌رود، مثلاً ممکن است تابع f خیلی‌خیلی بزرگ شود و به سمت $+\infty$ برود ( $+\infty$ *عدد نیستا!!، سَمبُل بزرگیه*) یا حتی خیلی‌خیلی کوچک شود و به سمت $-\infty$ برود.

سال قبل با نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ آشنا شدید:




می‌خواهیم رفتار این تابع را در نزدیکی $x=۰$ بررسی کنیم. جدول زیر را ببینید:

| x | $-۱$ | $-۰/۱$ | $-۰/۰۱ \rightarrow$ | ۰ | $\leftarrow ۰/۰۱$ | $۰/۱$ | ۱ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)=\frac{۱}{x}$ | $-۱$ | $-۱۰$ | $-۱۰۰$ | تعریف‌نشده | ۱۰۰ | ۱۰ | ۱ |

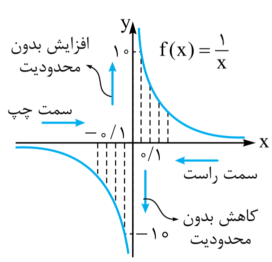
*صفر توی دامنهٔ $\frac{۱}{x}$ نیست*

*خُب بچه‌ها!* همان‌طور که می‌بینید وقتی x از مقادیر بیشتر از صفر به صفر نزدیک می‌شود $(x\rightarrow ۰^+)$ بدون محدودیت افزایش می‌یابد $(f(x)\rightarrow +\infty)$. به قول کتاب درسی: «**می‌توان $f(x)$ را از هر عدد مثبت مفروض بزرگ‌تر کرد، به شرطی که x به اندازهٔ کافی از سمت راست صفر، به صفر نزدیک شده باشد**» و در این حالت می‌نویسیم: $\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{۱}{x}=+\infty$

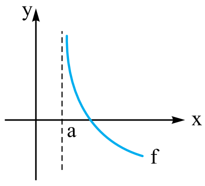
هم‌چنین وقتی x از مقادیر کم‌تر از صفر، به صفر نزدیک می‌شود $(x\rightarrow ۰^-)$، $f(x)$ بدون محدودیت کاهش می‌یابد $(f(x)\rightarrow -\infty)$. به قول کتاب درسی: «**می‌توان $f(x)$ را از هر عدد منفی کوچک‌تر کرد، به شرطی که x به اندازهٔ کافی از سمت چپ صفر، به صفر نزدیک شده باشد.**»

در این حالت می‌نویسیم: $\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{۱}{x}=-\infty$

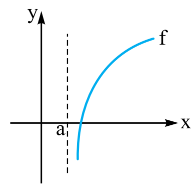
با نگاهی عمیق‌تر به تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ این اتفاقات را به خوبی می‌توان مشاهده کرد. ببینید:



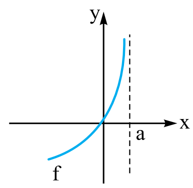
حالت‌های مختلف حدهای یک‌طرفۀ نامتناهی در شکل‌های زیر آمده است:



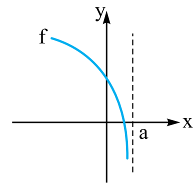

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$




$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$




$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$



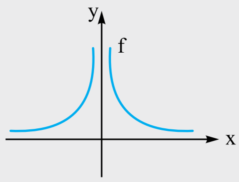

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$

**توجه** زمانی‌که حاصل حد بی‌نهایت می‌شود، می‌گوییم حد وجود ندارد. حتی اگر حد چپ و راست هر دو $+\infty$ شوند یا هر دو $-\infty$ شوند.

### حدِ مثبت بی‌نهایت

فرض کنید $f$ در دو طرف $a$ (به‌جز احتمالاً خود $a$) تعریف شده باشد. در این صورت $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$؛ یعنی می‌توان $f$ را به اندازۀ دلخواه (*هر چه‌قدر بخواهیم*) افزایش دهیم به شرطی که $x$ به اندازۀ کافی به عدد $a$ نزدیک شده باشد.

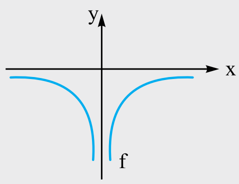
$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$




### حدِ منفی بی‌نهایت

فرض کنید $f$ در دو طرف $a$ (به‌جز احتمالاً خود $a$) تعریف شده باشد. در این صورت $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$؛ یعنی می‌توان $f$ را به اندازۀ دلخواه کاهش داد، به شرطی که $x$ به اندازۀ کافی به $a$ نزدیک شده باشد.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$

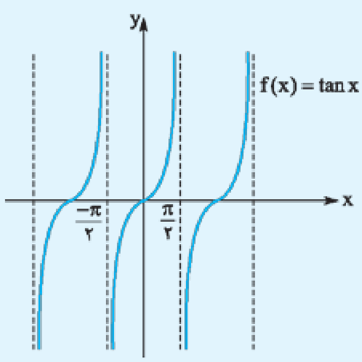



## مثال و پاسخ

**مثال** نمودار تابع $f(x)=\tan x$ را رسم کنید و با استفاده از آن حدهای خواسته‌شده را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ب) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x)$ پ) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} f(x)$

**پاسخ** نمودار تابع $f(x)=\tan x$ به صورت مقابل است:




**الف** همان‌طور که می‌بینید وقتی $x\to 0$ (چه از چپ، چه از راست) مقادیر $\tan x$ هم به صفر نزدیک می‌شود یعنی: $\lim\limits_{x\to 0}\tan x=0$ (*این واسه پارسال بود*)

**ب** وقتی $x$ از سمت چپ به $\frac{\pi}{2}$ نزدیک می‌شود $(x\to\frac{\pi}{2}^-)$، $\tan x$ به شدت افزایش می‌یابد و به سمت $+\infty$ میل می‌کند: (*نمودار رو نگاه کنید*) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\tan x=+\infty$

**پ** وقتی $x$ از سمت راست به $-\frac{\pi}{2}$ نزدیک می‌شود $(x\to -\frac{\pi}{2}^+)$، $\tan x$ به شدت کاهش می‌یابد و به سمت $-\infty$ می‌رود؛ یعنی: $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+}\tan x=-\infty$

## قضایای حد در بی‌نهایت

**قضیه ۱**

برای محاسبۀ حد تابع $f(x)=\frac{1}{x^n}$ در $x=0$، باید حد چپ و راست را جداگانه به دست آوریم:

۱) $x\to 0^+$: در این حالت حاصل این حد همیشه $+\infty$ می‌شود؛ یعنی: $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x^n}=+\infty$

۲) $x\to 0^-$: حاصل حد به صورت مقابل است:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^n}=\begin{cases}+\infty & \text{زوج } n\\ -\infty & \text{فرد } n\end{cases}$$

بگذارید یک مثال بزنم، مثلاً می‌خواهیم حد تابع $f(x)=\frac{1}{x^3}$ را در $x=0$ به دست آوریم.

۱) $x\to 0^+ : \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x^3}=+\infty$

۲) $x\to 0^- : \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x^3}=-\infty$

این تابع در $x=0$ حد ندارد. *(نه به خاطر این‌که حد چپ و راست برابر نشدنا!!، به خاطر این‌که ∞ شدن.)*

البته برای جلوگیری از حفظ‌کردن، بد نیست این سبک استدلال‌کردن را هم یاد بگیرید. ببینید:

زمانی‌که x از سمت راست صفر به صفر نزدیک می‌شود $(x\to 0^+)$ می‌توان مثلاً x را $\frac{1}{1000}$ در نظر گرفت. *(یه عدد کوچیکِ مثبتِ نزدیک صفر)* و همچنین فرض کنید $n=3$. پس:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^n}=\frac{1}{(\frac{1}{1000})^3}=\frac{1}{\frac{1}{10^9}}=10^9$$

می‌بینید که مقدار تابع به شدت افزایش می‌یابد و انگار به سمت $+\infty$ می‌رود. همچنین زمانی‌که $x\to 0^-$، می‌توان x را $\frac{-1}{1000}$ در نظر گرفت:

n: فرد $\quad \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x^n}\xrightarrow{n=3\ (\text{عدد فرد دلخواه})}\frac{1}{(-\frac{1}{1000})^3}=-10^9$

انگار به سمت $-\infty$ می‌رود.

n: زوج $\quad \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x^n}\xrightarrow{n=4\ (\text{عدد زوج دلخواه})}\frac{1}{(-\frac{1}{1000})^4}=10^{12}$

انگار به سمت $+\infty$ می‌رود.

*به نظرم این‌جوری نگاه‌کردن به حد، خیلی مسائل را برایتان راحتتر حل می‌کند.*

**قضیهٔ ۲**

**الف)** اگر $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=+\infty$، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$ و برعکس.

**ب)** اگر $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=-\infty$، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}f(x)=-\infty$ و برعکس.

**قضیهٔ ۳**

اگر $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L\neq 0$ و $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$، آن‌گاه:

**الف)** اگر $L>0$ و $g(x)$ در یک همسایگی a (به‌جز احتمالاً خود a) مثبت است: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$

**ب)** اگر $L<0$ و $g(x)$ در یک همسایگی a (به‌جز احتمالاً خود a) مثبت باشد: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

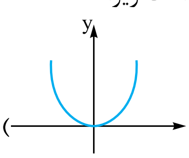
**پ)** اگر $L>0$ و $g(x)$ در یک همسایگی a (به‌جز احتمالاً خود a) منفی باشد: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

**ت)** اگر $L<0$ و $g(x)$ در یک همسایگی a (به‌جز احتمالاً خود a) منفی باشد: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$

مثلاً حد تابع $f(x)=\frac{5}{|x+2|}$ وقتی $x\to(-2)^+$ و $x\to(-2)^-$ میل می‌کند را بررسی می‌کنیم:

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to(-2)^+}f(x)&=\lim_{x\to(-2)^+}\frac{5}{|x+2|}=\lim_{x\to(-2)^+}\frac{5}{x+2}=+\infty\\ \lim_{x\to(-2)^-}f(x)&=\lim_{x\to(-2)^-}\frac{5}{|x+2|}=\lim_{x\to(-2)^-}\frac{5}{-x-2}=+\infty\end{aligned}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to(-2)}f(x)=\lim_{x\to(-2)}\frac{5}{|x-2|}=+\infty$$

این مثال را هم ببینید: حد تابع $f(x)=\frac{2x-1}{x^2}$ در $x=0$ برابر $-\infty$ است زیرا: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x-1}{x^2}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$

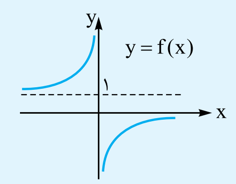
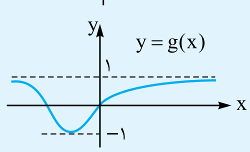



مخرج $0^+$ می‌شود زیرا تابع $y=x^2$ همواره بزرگ‌تر و مساوی صفر است و طبق قسمت **ب** قضیهٔ قبل حاصل حد $-\infty$ می‌شود.

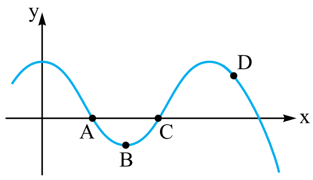
این‌طوری هم ببینید:

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\frac{2x-1}{x^2}&=\frac{-1}{(0^+)^2}=\frac{-1}{0^+}=-\infty\\ \lim_{x\to 0^-}\frac{2x-1}{x^2}&=\frac{-1}{(0^-)^2}=\frac{-1}{0^+}=-\infty\end{aligned}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{2x-1}{x^2}=-\infty$$

# آزمون جمع‌بندی

| ردیف | آزمون جمع‌بندی — رشتهٔ ریاضی و فیزیک — مدت امتحان: ۹۰ دقیقه — Kheilisabz.com | نمره |
|---|---|---|
| ۱ | نمودار تابع $f(x)=\log x$ را رسم کنید و به سؤالات زیر پاسخ دهید.<br>الف) حد چپ و راست این تابع را در $x=0$ به دست آورید. ب) آیا این تابع در $x=0$ حد دارد؟ چرا؟ | ۱/۵ |
| ۲ | حاصل حدهای زیر را به دست آورید.<br>الف) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{2x+1}{\tan\frac{x}{2}}$ ب) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-1}{\log x}$ | ۲ |
| ۳ | اگر $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{\sin x} & x>0\\ \dfrac{1}{2x} & x<0\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\cos x} & x>\frac{\pi}{2}\\ \dfrac{-x-1}{\tan x} & x<\frac{\pi}{2}\end{cases}$ باشند، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.<br>الف) $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$ ب) $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ پ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+}g(x)$ ت) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}g(x)$ | ۱ |
| ۴ | اگر خط‌های $x=2$ و $x=1$ مجانب‌های قائم تابع $f(x)=\dfrac{3x+1}{x^2+ax+b}$ باشند، $a$ و $b$ را بیابید. | ۲ |
| ۵ | اگر در تابع $f(x)=\dfrac{x-a}{x^2+3x+2}$ فقط خط $x=-1$ مجانب قائم باشد، $a$ را بیابید. | ۲ |
| ۶ | مجانب قائم تابع‌های زیر را به دست آورید و سپس نمودارشان را در حوالی مجانب قائمشان رسم کنید.<br>الف) $y=\dfrac{2x+2}{(x-1)^4}$ ب) $y=\dfrac{1-2x}{x^2-1}\quad (x>0)$ پ) $y=\dfrac{1}{x-\lvert x\rvert}$ | ۲/۵ |
| ۷ | با توجه به نمودارهای زیر، حاصل حدهای خواسته‌شده را بیابید.<br>الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+g(x))$<br>ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)-2f(x))$<br><br>پ) $\lim\limits_{x\to\infty}g^2(x)$<br>ت) $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)\times g(x)-f^2(x))$<br> | ۲ |
| ۸ | نمودار مربوط به هر یک از حالات زیر را رسم کنید.<br>الف) $\begin{cases}y=1 & \text{مجانب افقی}\\ x=1 & \text{مجانب قائم}\end{cases}$ ب) $\begin{cases}y=-1 & \text{مجانب افقی}\\ \lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)]=-2\end{cases}$ | ۱ |
| ۹ | اگر $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{ax^m+3x^2+1}{bx^3-x+2}=\dfrac{3}{2}$، حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{mx+1}{\frac{a}{b}x+1}$ را به دست آورید. | ۲ |
| ۱۰ | اگر خط $y=4$ مجانب افقی تابع $f(x)=\dfrac{mx^2+2x}{x^2-m}$ باشد، مجانب قائم‌های $f(x)$ را به دست آورید. | ۲ |
| ۱۱ | اگر تابع $f(x)=\dfrac{x^2-mx+2}{x-1}$ فاقد مجانب قائم باشد، مجانب افقی تابع $g(x)=\dfrac{2mx^2+4x}{mx^3-1}$ را به دست آورید. | ۲ |
| | جمع نمرات | ۲۰ |

**۱۳- نمودار تابع $y = f(x)$ و نقاط $A$، $B$، $C$ و $D$ روی آن مفروض‌اند. هر یک از گزاره‌های زیر را به یکی از این نقاط نظیر کنید.**




**الف) نقطه‌ای که در آن $f' < ۰$ و تابع بعد از آن اکیداً نزولی است.**

**ب) نقطه‌ای که در آن $f' = ۰$ و $f < ۰$ .**

**پ) نقطه‌ای که در آن $f' > ۰$ و عرض تابع برابر صفر است.**

**۱۴- در هر یک از موارد، نمودار تابعی را رسم کنید که از $A(۲,۲)$ و $B(۳,۳)$ گذشته و .........**

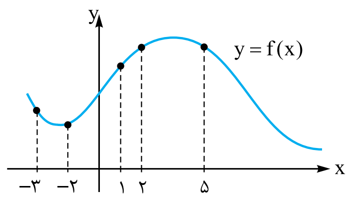
**الف) $m_A > ۰$ ، $m_B < ۰$ و $m_{AB} > ۰$** **ب) $m_A = ۰$ ، $m_B = ۰$ و $m_{AB} > ۰$**

**۱۵- اگر $f(x) = (x-۱)^۳$ باشد، $f'(۲)$ را به دست آورید.**

**۱۶- در تابع $f(x) = \sqrt{x}$ ، شیب خط مماس بر f در $x = ۴$ را به دست آورید.**

**۱۷- معادلهٔ خط مماس بر تابع $f(x) = x^۲ + ۲$ در نقطه‌ای به طول صفر واقع بر آن را بنویسید.**

**۱۸- با توجه به نمودار $y = f(x)$ ، درستی یا نادرستی هر یک از گزاره‌های زیر را بررسی کنید.**




**الف) $f'(۱) > f'(۲)$**

**ب) $f'(۵) > f'(-۳)$**

**پ) $f'(-۲) < f(۵)$**

**ت) $f'(-۳) < f'(-۲) < f'(۲) < f'(۱)$**

## ۲ مشتق‌پذیری و پیوستگی

در درس گذشته دو تعریف برای $f'(a)$ به صورت مقابل گفتیم:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{یا} \quad f'(a) = \lim_{h \to ۰} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

اگر حدهای بالا موجود باشند می‌گوییم f در $x = a$ مشتق‌پذیر است. بررسی مشتق‌پذیری با تعریف‌های بالا، واقعاً کار سخت و زمان‌بَری است. برای همین از یک قضیه کمک می‌گیریم که ما را از شر تعریف مشتق راحت می‌کند.

در این درس ابتدا ارتباط بین پیوستگی و مشتق‌پذیری و بعد از آن، مشتق چپ و راست را می‌گوییم.

### مشتق‌پذیری و پیوستگی

این درس را با یک قضیهٔ بسیار مهم شروع می‌کنیم:

**قضیه** اگر f در $x = a$ مشتق‌پذیر باشد (حد بالا موجود باشد)، قطعاً در $x = a$ پیوسته هم است.

**اثبات** کافی است نشان دهیم: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

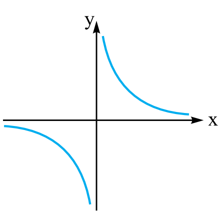
$$\lim_{x \to a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \to a} ((x-a) \times \frac{f(x) - f(a)}{x - a}) = \lim_{x \to a} (x-a) \times \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = ۰ \times f'(a) = ۰$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} (f(x) - f(a)) = ۰ \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

**توجه** اگر f در a پیوسته نباشد، در a مشتق‌پذیر هم نیست. *(پیوستگی شرط لازم برای مشتق‌پذیریه)* بگذارید یک مثال بزنیم:

می‌خواهیم مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \frac{۱}{x}$ را در $x = ۰$ بررسی کنیم:

*خب!* قبل از هر چیزی به نمودار $\frac{۱}{x}$ توجه کنید:

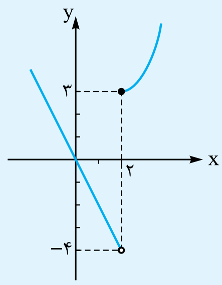



همان‌طور که می‌بینید این تابع در $x = ۰$ تعریف‌نشده است ($D_f = \mathbb{R} - \{۰\}$)؛ پس در $x = ۰$ ناپیوسته و در نتیجه مشتق‌ناپذیر است.

## مثال و پاسخ

**مثال** به کمک نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & x\geq 2 \\ -2x & x<2 \end{cases}$ بگویید آیا $f'(2)$ موجود است؟ چرا؟

**پاسخ** نمودار f به صورت مقابل است:




همان‌طور که مشاهده می‌کنید، $f(x)$ در $x=2$ پیوسته نیست و در نتیجه مشتق‌پذیر هم نیست. *(راستی این‌جوری هم میشه گفت که اصلاً در $x=2$ خط مماس وجود نداره.)*

خلاصهٔ این درس به صورت زیر است:

**الف** اگر f در a مشتق‌پذیر باشد ⟸ در a پیوسته هم است.

**ب** اگر f در a پیوسته نباشد ⟸ در a مشتق‌پذیر هم نیست.

*حالا باید براتون یک سؤال ایجاد شده باشد.* شد؟؟؟

سؤال این است! اگر f در $x=a$ پیوسته باشد، آن‌گاه حتماً مشتق‌پذیر است؟ *نه*

برای پاسخ دقیق به این سؤال باید درس بعدی را به خوبی مطالعه کنید.

## مشتق چپ و راست

**تعریف** مشتق چپ و راست تابع f در $x=a$ را به ترتیب با نماد $f'_-(a)$ و در $f'_+(a)$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \text{یا} \quad f'_+(a)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad : \text{مشتق راست } f \text{ در } x=a$$

$$f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \text{یا} \quad f'_-(a)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad : \text{مشتق چپ } f \text{ در } x=a$$

همان‌طور که می‌دانید تعبیر هندسی $f'(a)$، شیب خط مماس بر نمودار f در $x=a$ است پس به طور مشابه می‌توان نتیجه گرفت:

شیب نیم‌مماس راست بر f در $x=a$ : $f'_+(a)$      شیب نیم‌مماس چپ بر f در $x=a$ : $f'_-(a)$

این قضیه را هم بگوییم و برویم سراغ مثال‌ها.

**قضیه** تابع $f(x)$ در $x=a$ مشتق‌پذیر است، اگر:

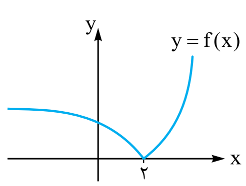
الف) f در a پیوسته باشد:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a)$$

ب) مشتق چپ و راست f در a موجود و مساوی باشند (موجودبودن یعنی جواب حد ∞ نشود.):

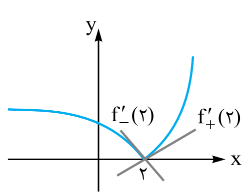
$$f'_+(a)=f'_-(a)$$

برای درک قضیهٔ بالا به نمودار f توجه کنید:




این تابع در تمامی نقاط (حتی $x=2$) پیوسته است. سؤالی که مطرح می‌شود این است که آیا f در $x=2$ مشتق‌پذیر است؟

*خب!* اگر f بخواهد در $x=2$ مشتق‌پذیر باشد (با فرض پیوستگی)، باید شیب نیم‌مماس راست ($f'_+(2)$) با شیب نیم‌مماس چپ ($f'_-(2)$) با هم برابر باشند. اما نمودار زیر را ببینید:



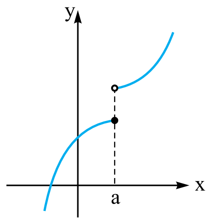

واضح است که $f'_+(2)>0$ و $f'_-(2)<0$ هستند پس با هم برابر نیستند و در نتیجه f در $x=2$ مشتق‌ناپذیر است (اگر بخواهد مشتق‌پذیر باشد باید نیم‌مماس چپ و راست روی هم منطبق باشند.) کتاب درسی به نقاطی که مشتق چپ و راست دو عدد نابرابر می‌شوند نقاط گوشه می‌گوید *(زاویه‌دار هم می‌گفتن)*.

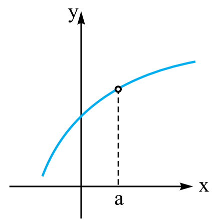
**توجه** پس به طور کلی، اگر یک تابع پیوسته باشد، لزوماً مشتق‌پذیر نیست و مشتق‌پذیری آن باید بررسی شود.

## بررسی مشتق‌پذیری تابع از روی نمودار آن

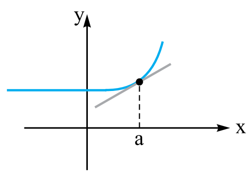
موارد الف تا ث همگی نشان‌دهندهٔ نقاط مشتق ناپذیر در یک تابع هستند. به شکل‌ها و اسم‌های آن‌ها خوب دقت کنید:

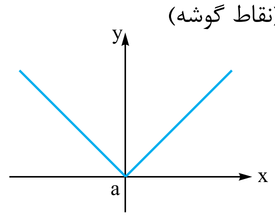
الف f در a ناپیوسته است. (نقاط توخالی یا پرش نمودار یا عدم یکپارچگی)



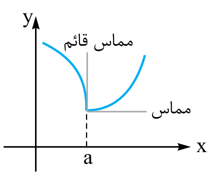




ب f در a پیوسته باشد و مشتق چپ و راست در a، هر دو متناهی و نابرابر باشد. (نقاط گوشه)

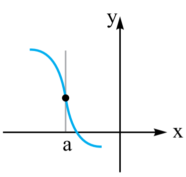


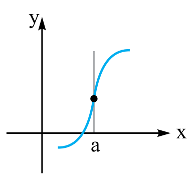




پ f در a پیوسته باشد و یکی از مشتق‌های چپ یا راست متناهی و دیگری نامتناهی باشد. (نقاط گوشه)

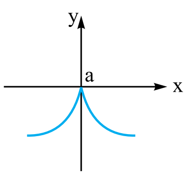


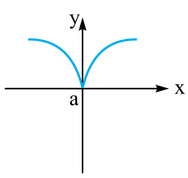

ت مشتق چپ و راست در a نامتناهی $(\infty)$ و هم‌علامت باشند. (مماس قائم)



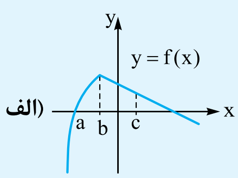

ث مشتق چپ و راست در a نامتناهی $(\infty)$ و غیرهم‌علامت باشند. (مماس قائم)

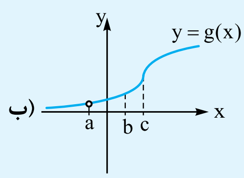


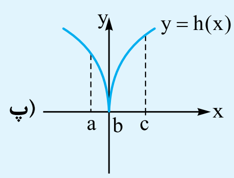



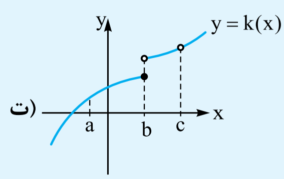

## مثال و پاسخ

**مثال در شکل‌های زیر وضعیت مشتق‌پذیری را در نقاط a، b و c بررسی کنید.**

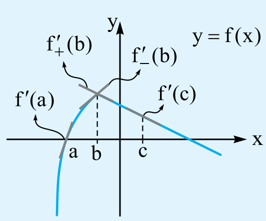



پاسخ الف به نمودار $f(x)$ توجه کنید:

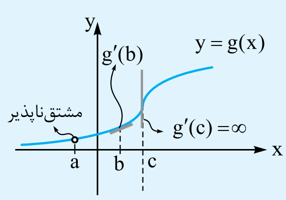



همان‌طور که می‌بینید در نقاط a و c مشتق چپ و راست با هم برابرند ولی در نقطهٔ b مشتق چپ و راست فرق دارند:

$f'_-(b) > 0 \ , \ f'_+(b) < 0$

پس f در a و c مشتق‌پذیر و در b مشتق‌ناپذیر است.

ب نمودار $g(x)$:




*خب!* $g(x)$ در $x = a$ تعریف‌نشده است پس ناپیوسته و در نتیجه مشتق‌ناپذیر است.

$g(x)$ در $x = b$ مشتق‌پذیر است زیرا مشتق چپ و راست با هم برابرند *(قدیمی‌ها بهش می‌گفتن خط مماس واحد داره)* و در نهایت، این تابع در $x = c$ مشتق‌ناپذیره، چون $g'_+(b)$ و $g'_-(b)$ هر دو بی‌نهایت‌اند *(گفتم که مشتق نباید ∞ بشه)*. **در این حالت می‌گوییم $g(x)$ در $x = b$ مماس قائم دارد.**

| | $f(x)$ | $f'(x)$ | توضیح و مثال |
|---|---|---|---|
| ۱ | $f(x)=c$ | $f'(x)=۰$ | مشتق تابع ثابت صفر است، مثلاً: $f(x)=۲ \Rightarrow f'(x)=۰$ |
| ۲ | $f(x)=x^n \quad (n\in\mathbb{N})$ | $f'(x)=nx^{n-۱}$ | $f(x)=x^۳ \Rightarrow f'(x)=۳x^۲$ |
| ۳ | $y=\sqrt{f(x)}$ | $y'=\dfrac{f'(x)}{۲\sqrt{f(x)}}$ | باید f مشتق‌پذیر و گویا باشد، مثلاً: $y=\sqrt{۲x+۳} \Rightarrow y'=\dfrac{۲}{۲\sqrt{۲x+۳}}$ <br> $y=\sqrt{۴x^۲-x+۱} \Rightarrow y'=\dfrac{۸x-۱}{۲\sqrt{۴x^۲-x+۱}}$ |
| ۴ | $g=\sqrt[۳]{f(x)}$ | $y'=\dfrac{f'(x)}{۳\sqrt[۳]{f^۲(x)}}$ | باید f مشتق‌پذیر و گویا باشد، مثلاً: $y=\sqrt[۳]{۴x-۱} \Rightarrow y'=\dfrac{۴}{۳\sqrt[۳]{(۴x-۱)^۲}}$ <br> $y=\sqrt[۳]{۵x^۲-۲x-۱} \Rightarrow y'=\dfrac{۱۰x-۲}{۳\sqrt[۳]{(۵x^۲-۲x-۱)^۲}}$ |

**توجه** ۱) مشتق سه تابع زیر که مربوط به حالت‌های خاص جدول بالا است را حتماً حفظ کنید:

الف) $f(x)=\dfrac{۱}{x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{-۱}{x^۲}$  ب) $f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{۱}{۲\sqrt{x}}$  پ) $f(x)=\sqrt[۳]{x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}$

۲) در قسمت (۲) جدول بالا، حالت کلی‌تر هم برقرار است یعنی *(لزومی نداره توان عدد صحیح باشه، کسری هم باشه اکیه)*، مثلاً:

$$f(x)=x^{\frac{۷}{۳}} \Rightarrow f'(x)=\frac{۷}{۳}x^{\frac{۴}{۳}}$$

## مثال و پاسخ

**مثال** مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید.

الف) $f(x)=x^{-۳}$  ب) $f(x)=\sqrt{۴x-۲}$  پ) $f(x)=\sqrt{-x^۲+x+۱}$  ت) $f(x)=\sqrt[۳]{۴x^۳-x}$

**پاسخ**

الف) $f'(x)=-۳x^{-۴}$  ب) $f'(x)=\dfrac{۴}{۲\sqrt{۴x-۲}}$  پ) $f'(x)=\dfrac{-۲x+۱}{۲\sqrt{-x^۲+x+۱}}$  ت) $f'(x)=\dfrac{۱۲x^۲-۱}{۳\sqrt[۳]{(۴x^۳-x)^۲}}$

اگر توابع f و g مشتق‌پذیر باشند:

| | $h(x)$ | $h'(x)$ | توضیح و مثال |
|---|---|---|---|
| ۱ | $h(x)=f(x)\pm g(x)$ | $h'(x)=f'(x)\pm g'(x)$ | $h(x)=x^۲+x^۳ \Rightarrow h'(x)=۲x+۳x^۲$ <br> $h(x)=x^۴-\dfrac{۱}{x} \Rightarrow h'(x)=۴x^۳+\dfrac{۱}{x^۲}$ |
| ۲ | $h(x)=kf(x)$ | $h'(x)=kf'(x)$ | f مشتق‌پذیر است و k یک عدد ثابت است، مثلاً: <br> $h(x)=۳x^۲ \Rightarrow h'(x)=۳(۲x)=۶x$ <br> *(ضریب رو نگه دار و از بقیه مشتق بگیر.)* |
| ۳ | $h(x)=f(x)\times g(x)$ | $h'(x)=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$ | $h(x)=\overbrace{(۲x+۱)}^{f}\overbrace{(x-۱)}^{g}$ <br> $\Rightarrow h'(x)=\underbrace{(۲)}_{f'}\underbrace{(x-۱)}_{g}+\underbrace{(۱)}_{g'}\underbrace{(۲x+۱)}_{f}$ |
| ۴ | $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ <br> $(g(x)\neq ۰)$ | *حواست باشه + نیستا!!* <br> $h'(x)=\dfrac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^۲(x)}$ | $g(x)\neq ۰$ پس: <br> $h(x)=\dfrac{\overbrace{۲x+۱}^{f}}{\underbrace{x-۱}_{g}} \Rightarrow h'(x)=\dfrac{\overbrace{(۲)}^{f'}\overbrace{(x-۱)}^{g}-\overbrace{(۱)}^{g'}\overbrace{(۲x+۱)}^{f}}{(x-۱)^۲}$ |

# پاسخ سؤال‌های امتحانی

۱- الف) نادرست، شیب خط مماس در A مثبت و در B منفی است.

ب) نادرست

۲- A

۳- الف) a    ب) d

۴- الف) گزینهٔ «۲»

ب) گزینهٔ «۱»

پ) گزینهٔ «۲»

۵- $m_A < m_{AB} = ۰ < m_B$

۶- الف) مشتق تابع f در نقطهٔ $x=۲$، همان شیب خط مماس بر نمودار f در نقطهٔ $x=۲$ می‌باشد.

$(۰,۱) \in$ خط ، $(۲,۳) \in$ خط ، شیب خط مماس $= \frac{۳-۱}{۲-۰} = ۱$

$\Rightarrow$ مشتق تابع f در نقطهٔ $x=۲$ $= ۱$

ب) برای به دست آوردن معادلهٔ خط کافی است، مقدار شیب در نقطهٔ A را در رابطهٔ $y-y_A=m(x-x_A)$ جای‌گذاری کنیم:

$$A(۲,۳)\,,\; y-۳=۱(x-۲) \Rightarrow y=x+۱$$

۷- الف) $x=b$    ب) $x=c$

۸- معادلهٔ خط مماس را به دست آورده، سپس مختصات نقاط B و C را حساب می‌کنیم:

$$A(۴,۲۵)\,,\; f'(۴)=۱/۵\,,\; y-y_A=m(x-x_A)$$

$$\Rightarrow y-۲۵=۱/۵(x-۴) \Rightarrow y=۱/۵x+۱۹$$

$$x_B=۵ \Rightarrow y_B=۱/۵(۵)+۱۹=۲۶/۵$$

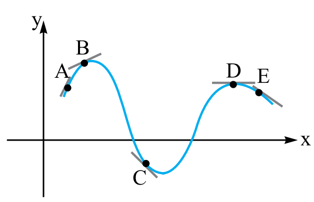
$$x_C=۳ \Rightarrow y_C=۱/۵(۳)+۱۹=۲۳/۵$$

۹-

$$f'(۱)=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲-۳x+۲}{x-۱}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x-۲)}{x-۱}=-۱$$

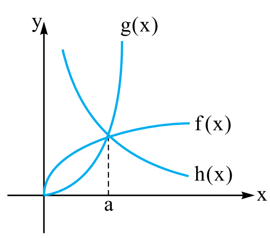
۱۰- به نمودار تابع f(x) توجه کنید:



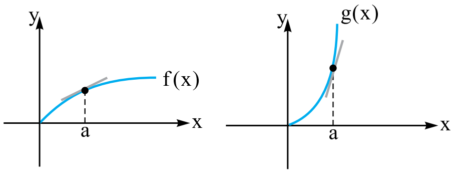
همان‌طور که می‌بینید شیب خط مماس در B و A مثبت، در C و E منفی و در D صفر است و همچنین $m_A > m_B$ (به وضوح شیب توی A بیشتره نسبت به B) و $m_C < m_E$. پس تکمیل‌شدهٔ جدول به صورت مقابل است:

| شیب | ۳- | ۱- | ۰ | ۱ | ۲ |
|---|---|---|---|---|---|
| نقاط | C | E | D | B | A |

۱۱- به نمودار مقابل توجه کنید:

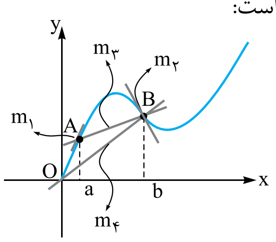


شیب خط مماس بر f(x) و g(x) در $x=a$ مثبت است ولی در تابع h(x)، شیب خط مماس در $x=a$ منفی است. همچنین واضح است که بین دو تابع f(x) و g(x)، شیب خط مماس بر g(x) در $x=a$ بیشتر از شیب خط مماس بر f(x) در $x=a$ است:



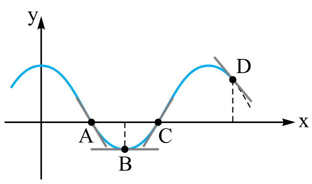
پس می‌توان نوشت: $m_{h(a)} < m_{f(a)} < m_{g(a)}$

۱۲- نمودار $y=f(x)$ به صورت زیر است:



با کمی دقت از روی نمودار نتیجه می‌گیریم: $m_۱ > m_۴ > m_۳ > m_۲$

۱۳- نمودار $y=f(x)$ را ببینید:



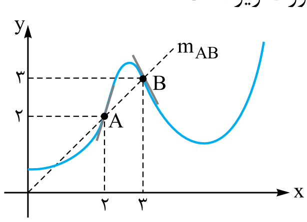
حالا گزاره‌ها:

الف) نقطه‌ای که در آن $f'<۰$ و تابع بعد از آن اکیداً نزولی است: جواب نقطهٔ D

ب) نقطه‌ای که در آن $f'=۰$ و $f<۰$: جواب نقطهٔ B

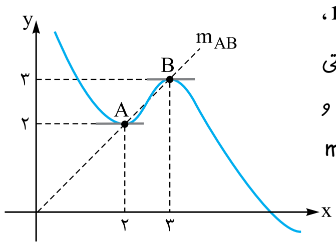
پ) نقطه‌ای که در آن $f'>۰$ و عرض تابع برابر صفر است: جواب نقطهٔ C

۱۴- الف) نمودار خواسته‌شده به صورت زیر است:



همان‌طور که می‌بینید تابع از A و B گذشته، $m_A>۰$، $m_B<۰$ و $m_{AB}>۰$ است.

ب) نمودار به صورت زیر است:



از A و B گذشته و $m_A=۰$، $m_B=۰$ و $m_{AB}>۰$ *(راستی بچه‌ها چون تابع از A(۲,۲) و B(۳,۳) می‌گذره همیشه $m_{AB}>۰$ است.)*

۱۵- *همه جا بلدین دیگه!* ابهام $\frac{۰}{۰}$ به وجود می‌آید بعدش باید به کمک اتحاد، تقسیم، مزدوج و ... رفع ابهام کنید.

$$f'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۱)^{۳}-۱}{x-۲}=\frac{۰}{۰}\ \text{ابهام}$$

$$\xrightarrow[\text{تقسیم}]{\text{رفع ابهام به کمک}}\lim_{x\to ۲}\frac{x^{۳}-۳x^{۲}+۳x-۲}{x-۲}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(x^{۲}-x+۱)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}(x^{۲}-x+۱)=۳$$

توجه کنید برای تجزیهٔ عبارت $x^{۳}-۳x^{۲}+۳x-۲$ به عامل $x-۲$، آن را بر $x-۲$ تقسیم کردیم. *(خودتون انجام بدین.)*

۱۶- شیب خط مماس بر $f$ در $x=۴$ همان $f'(۴)$ است، پس:

$$f'(۴)=\lim_{x\to ۴}\frac{f(x)-f(۴)}{x-۴}=\lim_{x\to ۴}\frac{\sqrt{x}-۲}{x-۴}=\frac{۰}{۰}\ \text{ابهام}$$

$$\xrightarrow[\text{مزدوج}]{\text{رفع ابهام به کمک}}\lim_{x\to ۴}\frac{\sqrt{x}-۲}{x-۴}\times\underbrace{\frac{\sqrt{x}+۲}{\sqrt{x}+۲}}_{\text{کنار هم بنویسشون}}$$

$$=\lim_{x\to ۴}\frac{(x-۴)}{(x-۴)(\sqrt{x}+۲)}=\lim_{x\to ۴}\frac{۱}{\sqrt{x}+۲}=\frac{۱}{۴}$$

۱۷- با جای‌گذاری $x=۰$ در تابع داریم: $f(۰)=۲$؛ پس $A(۰,۲)$ روی $f$ است. همچنین برای نوشتن معادلهٔ خط مماس به شیب خط مماس در $x=۰$ نیاز داریم، پس:

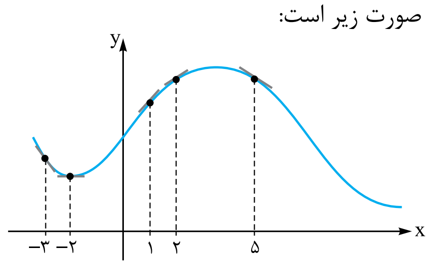
$$f'(۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰}\frac{x^{۲}+۲-۲}{x-۰}=\lim_{x\to ۰}\frac{x^{۲}}{x}=۰$$

در نتیجه معادلهٔ خط به صورت مقابل است:

$$y-۲=۰(x-۰)\ \Rightarrow\ y=۲$$

تابع $f$ در $x=۰$، مماس افقی دارد.

۱۸- نمودار $f(x)$ به صورت زیر است:




الف) این گزاره درست است یعنی $f'(۱)>f'(۲)$ *(زیرا شیب خط مماس بر f در نقطهٔ ۱ از ۲ بیشتره).*

ب) این گزاره درست است یعنی $f'(۵)>f'(-۳)$ *(شیب مماس در −۳ منفی تره).*

پ) این گزاره هم درست است یعنی $f'(-۲)<f(۵)$. همان‌طور که می‌بینید $f'(-۲)=۰$ است و مقدار $f$ در نقطهٔ $x=۵$ عددی مثبت است. *($f'(۵)$ نیستا!)*

ت) این گزاره هم درست است، یعنی:

$$\underbrace{f'(-۳)}_{\text{منفی}}<\underbrace{f'(-۲)}_{۰}<\underbrace{f'(۲)<f'(۱)}_{\text{طبق قسمت الف}}$$

۱۹- الف) پیوسته　　ب) مماس قائم

پ) نقطهٔ گوشه‌ای

۲۰- الف) درست　　ب) نادرست

پ) نادرست؛ خط $x=۰$ مماس قائم منحنی $f(x)=\sqrt[۳]{x}$ است.

ت) نادرست؛ این تابع در $x=۰$ ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است.

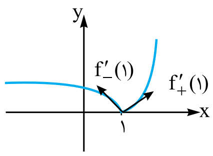
۲۱- $x=b$

۲۲- $x=d$

۲۳- الف) تابع در $x=۱$ مماس قائم است و اکیداً یکنوا می‌باشد.

جواب: تابع $h(x)$. همان‌طور که می‌بینید در $x=۱$ مماس قائم دارد و همچنین اکیداً صعودی هم هست.

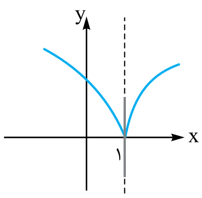
ب) تابع در $x=۱$ نقطهٔ گوشه‌ای است.




جواب: تابع $g(x)$. می‌دانیم که نقطهٔ گوشه یعنی مشتق چپ و راست دو عدد نابرابر باشند.

پ) تابع بیشتر از یک نقطهٔ مشتق‌ناپذیر دارد. جواب: تابع $f(x)$. این تابع در $x=۰$ و $x=۱$ پیوسته نیست. (در $x=۰$ اصلاً تعریف نشده) پس مشتق‌ناپذیر است.

ت) تابع در $x=۱$ مشتق چپ و راست نامتناهی غیرهم‌علامت دارد: جواب: تابع $k(x)$ : همان‌طور که می‌بینید، مشتق چپ و راست این تابع در $x=۱$، بی‌نهایت است و هم‌علامت هم نیست.( از چپ $-\infty$ و از راست $+\infty$ است.)




۲۴- تابع $f$ در $x=-۱$ پیوسته است.

$$f'_{+}(-۱)=\lim_{x\to(-۱)^{+}}\frac{f(x)-f(-۱)}{x+۱}=\lim_{x\to(-۱)^{+}}\frac{|x^{۲}+x|-۰}{x+۱}$$

$$=\lim_{x\to(-۱)^{+}}\frac{-x(x+۱)}{x+۱}=۱$$

$$f'_{-}(-۱)=\lim_{x\to(-۱)^{-}}\frac{f(x)-f(-۱)}{x+۱}=\lim_{x\to(-۱)^{-}}\frac{|x^{۲}+x|-۰}{x+۱}$$

$$=\lim_{x\to(-۱)^{-}}\frac{x(x+۱)}{x+۱}=-۱$$

مشتق‌های چپ و راست متناهی و نابرابر هستند، پس $x=-۱$ نقطهٔ گوشه‌ای تابع است.

۲۵- در درس‌نامه این قضیه اثبات شده است.

۲۶- تابع $f$ در $x=۱$ پیوسته است، زیرا:

$$f(۱)=۴$$

$$\lim_{x\to ۱^{+}}f(x)=\lim_{x\to ۱^{+}}x^{۲}+۳=۴$$

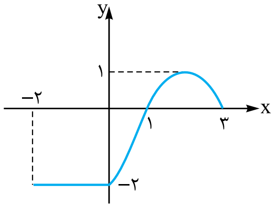
$$\lim_{x\to ۱^{-}}f(x)=\lim_{x\to ۱^{-}}۳x+۱=۴$$

$$\Rightarrow f(۱)=\lim_{x\to ۱^{+}}f(x)=\lim_{x\to ۱^{-}}f(x)$$

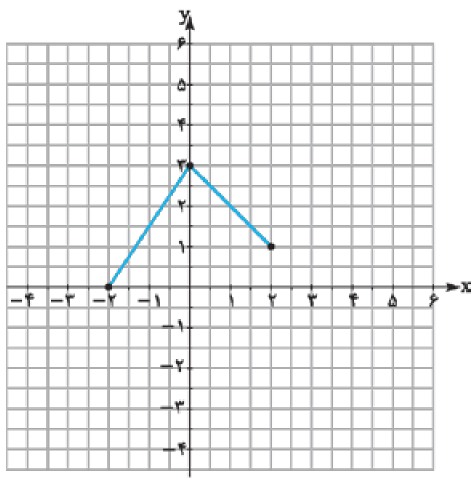
حالا مشتق‌پذیری را بررسی می‌کنیم:

$$f'_{+}(۱)=\lim_{x\to ۱^{+}}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^{+}}\frac{x^{۲}+۳-۴}{x-۱}$$

| نمونه امتحان نیم‌سال اول | رشتهٔ ریاضی و فیزیک | حسابان ۲ |
|---|---|---|
| امتحان شمارهٔ ۱ | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه | kheilisabz.com |

| ردیف | سؤال | نمره |
|---|---|---|
| ۱ | نمودار تابع $f(x)$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $y=2f(x-1)$ را رسم کنید سپس دامنه و برد آن را مشخص کنید.<br><br> | ۱ |
| ۲ | با رسم نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 & x<0 \\ -1 & 0\le x\le 1 \\ x & x>1 \end{cases}$، یکنوایی آن را در دامنه‌اش بررسی کنید. | ۱ |
| ۳ | مجموعه جواب نامعادلهٔ $\log\frac{2x-4}{3}<1$ را پیدا کنید. | ۱ |
| ۴ | اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عبارت $p(x)=mx^3+x^2-x$ بر $x-1$ برابر با ۲ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)=x^4+mx$ را بر $x+1$ به دست آورید. | ۱ |
| ۵ | درستی و نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.<br>الف) در تجزیهٔ عبارت $p(x)=125x^3+8$ عامل $5x+2$ وجود دارد.<br>ب) اگر تابع $f$ صعودی باشد و $g$ نزولی باشد، تابع $f\times g$ صعودی است.<br>پ) اگر برد تابع $f(x)$، $[-4,3]$ باشد، برد تابع $y=-\frac{1}{2}f(x-1)-1$ برابر $[-\frac{5}{2},1]$ است. | ۱/۵ |
| ۶ | دورهٔ تناوب، مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع $f(x)=2\cos\pi x$ را به دست آورید. | ۰/۷۵ |
| ۷ | ضابطهٔ تابع سینوسی به صورت $f(t)=a\sin bt$ را بنویسید که دورهٔ تناوب آن $\frac{3\pi}{2}$ و ماکزیمم آن ۳ باشد. | ۱ |
| ۸ | جواب‌های معادلهٔ $2\tan x.\cos^2 x=1$ را در بازهٔ $[0,2\pi]$ به دست آورید. | ۱ |
| ۹ | هر یک از معادلات زیر را حل کنید.<br>الف) $\tan 5x=\tan 3x$<br>ب) $\cos^2 x-3\cos x+2=0$ | ۱/۵ |
| ۱۰ | اگر $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ و انتهای کمان $\alpha$ در ربع اول باشد، حاصل $\tan 2\alpha$ را به دست آورید. | ۲ |
| ۱۱ | حاصل هر یک از حدهای زیر را پیدا کنید.<br>الف) $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{2x+1}{1-x^2}$<br>ب) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^2+1}{\cos(\frac{\pi}{2}+x)}$<br>پ) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{3x+1}{1-x}$<br>ت) $\lim\limits_{x\to -\infty} -4x^3+x$ | ۲ |
| ۱۲ | اگر $f(x)=\frac{2x^n+1}{x^3-1}$ باشد و داشته باشیم $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=2$، حاصل $f(2)$ را پیدا کنید. | ۱ |
| ۱۳ | نمودار تابعی را رسم کنید که همهٔ شرایط زیر را با هم داشته باشد:<br>الف) $y=1$ مجانب افقی آن باشد.<br>ب) $x=1$ مجانب قائم آن باشد.<br>پ) تابع در دو طرف مجانب قائم صعودی باشد. | ۰/۷۵ |
| ۱۴ | مجانب‌های قائم و افقی تابع‌های زیر را در صورت وجود پیدا کنید.<br>الف) $f(x)=\frac{4x^2-4}{x^2+4x+3}$<br>ب) $g(x)=\frac{3x}{x^2-1}$ | ۳ |
| ۱۵ | نمودار تابع $f(x)=\frac{1-x}{(x-2)^2}$ را در حوالی مجانب قائمش رسم کنید. | ۱/۵ |
| | جمع نمرات | ۲۰ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| نمونه امتحان نیم‌سال دوم | رشتهٔ ریاضی و فیزیک | حسابان ۲ | |
| ردیف / امتحان شمارهٔ ۳ | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه | نهایی خردادماه ۱۴۰۱ | نمره |

| ردیف | سؤال | نمره |
|---|---|---|
| ۱ | درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید.<br>الف) اگر تابع f در $x=a$ پیوسته باشد و در این نقطه مشتق چپ و راست نامتناهی باشد، آن‌گاه $f'(a)$ وجود ندارد.<br>ب) هر نقطهٔ بحرانی تابع $f(x)$، یک نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $f(x)$ است. | ۱ |
| ۲ | جاهای خالی را با عدد یا کلمهٔ مناسب کامل کنید.<br>الف) دورهٔ تناوب تابع $y=7\sin(\frac{-\pi}{2}x)+2$ برابر .............. است.<br>ب) اگر برای هر x در بازهٔ I، $f''(x)>0$؛ آن‌گاه نمودار $f(x)$ در این بازه تقعر رو به .............. دارد. | ۱ |
| ۳ | نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $g(x)=f(x-1)$ را رسم کرده و دامنهٔ تابع g را تعیین کنید.<br> | ۱ |
| ۴ | ابتدا نمودار تابع $f(x)=x^2+2x$ را رسم نمایید، سپس تعیین کنید که این تابع در چه بازه‌ای اکیداً صعودی و در چه بازه‌ای اکیداً نزولی است. | ۱ |
| ۵ | باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $p(x)=8x^3-4x^2+2$ را بر $2x+1$ به دست آورید. | ۰/۵ |
| ۶ | معادلهٔ مثلثاتی $\sin 2x-\cos x=0$ را حل کنید. | ۱/۵ |
| ۷ | حدود توابع زیر را در صورت وجود بیابید.<br>الف) $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x^2-4}{(x-2)^2}$ ب) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{2x-x^3}{2x-1}$ | ۱ |
| ۸ | مجانب‌های قائم و افقی منحنی تابع $f(x)=\frac{1-x^2}{x^2+x}$ را در صورت وجود بیابید. | ۱/۵ |
| ۹ | مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\|2x-4\|$ را در $x=2$ بررسی کنید. | ۱/۵ |
| ۱۰ | برای تابع $f(x)=x^3-8$ در نقطهٔ تقاطع آن با محور xها معادلهٔ خط مماس را بنویسید. | ۱/۵ |
| ۱۱ | مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده‌کردن مشتق الزامی نیست.)<br>الف) $f(x)=(-3x^2+x)^5(2x)$ ب) $g(x)=5\tan x+\sin x^2$ پ) $h(x)=\frac{2}{x}$ | ۲/۵ |
| ۱۲ | اگر سرعت متوسط یک متحرک در یک بازه برابر ۲ متر بر ثانیه باشد و معادلهٔ حرکت متحرک به صورت $f(t)=t^3-t$ برحسب متر باشد، در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای متحرک برابر سرعت متوسط آن است؟ | ۱ |
| ۱۳ | اگر نقطهٔ $A(-1,1)$ نقطهٔ عطف تابع با ضابطهٔ $f(x)=ax^3+bx^2+2$ باشد، مقادیر a و b را به دست آورید. | ۱/۵ |

۱- الف) یکنوا (۰/۲۵) ب) $\mathbb{R}$ (۰/۲۵)

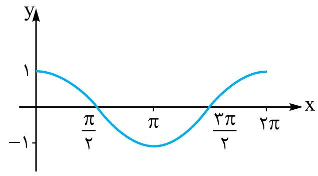
پ) $+\infty$ (۰/۲۵) ت) پیوسته (۰/۲۵)

۲- الف) درست (۰/۲۵) ب) نادرست (۰/۲۵)

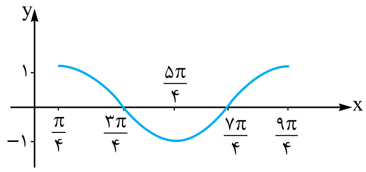
پ) درست (۰/۲۵) ت) درست (۰/۲۵)

۳-

رسم شکل (۰/۵)

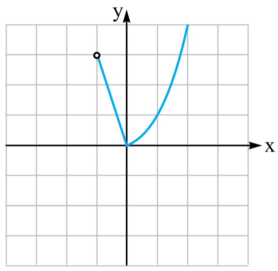



رسم شکل (۰/۲۵)




۴-

رسم شکل (۰/۲۵)




$(-۱,۰]$ اکیداً نزولی (۰/۲۵)

$[۰,+\infty)$ اکیداً صعودی (۰/۲۵)

۵- $x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲ \Rightarrow \begin{cases} p(-۲)=-۲a-۷ \\ q(-۲)=۱۱ \end{cases}$ (۰/۵)

$\Rightarrow a=-۹$ (۰/۲۵)

۶- $|b|=\frac{۲\pi}{۳}$ (۰/۲۵)

$|a|=۱\ ,\ c=۴$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow y=\sin\frac{۲\pi}{۳}x+۴$ (۰/۲۵) یا $y=-\sin\frac{۲\pi}{۳}x+۴$

«تنها نوشتن یکی از ضابطه‌های بالا کافی است.»

۷- $\underbrace{-۲\sin^۲ x-\sin x+۳=۰}_{(۰/۲۵)}$

$\Rightarrow \begin{cases} \sin x=۱ \Rightarrow x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\ ,\ k\in\mathbb{Z} & (۰/۵) \\ \sin x=\frac{-۳}{۲} \quad (۰/۲۵) & \text{غ ق ق} \end{cases}$

۸- الف) $\frac{۳}{۰^+}=+\infty$ (۰/۵) ب) $\frac{۳+۰}{۰-۲}=\frac{-۳}{۲}$ (۰/۵)

۹- $x^۲-۱=۰$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow \begin{cases} x=۱ & (۰/۲۵) \\ x=-۱ & (۰/۲۵) \end{cases}$ مجانب‌های قائم

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{۱-۲x^۲}{x^۲-۱}=-۲$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow y=-۲$ (۰/۲۵) مجانب افقی

۱۰- $f'(x)=۳x^۲-۲ \Rightarrow f'(۱)=۱$ (۰/۵)

$\Rightarrow f(۱)=-۱$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow y=x-۲$ (۰/۷۵)

۱۱-

الف) $x=b$ (۰/۲۵)

ب) $x=d$ (۰/۲۵)

پ) $x=c$ (۰/۲۵)

۱۲-

سرعت متوسط الف) $\frac{h(۲)-h(۱)}{۲-۱}=۲۵$ (۰/۵)

سرعت لحظه‌ای ب) $h'(t)=-۱۰t+۴۰ \Rightarrow h'(۳)=۱۰$ (۰/۵)

۱۳- $y=\begin{cases} ۱ & x\le ۱ \\ \frac{۱}{x} & x>۱ \end{cases} \Rightarrow y'=\begin{cases} ۰ & x<۱ \\ \frac{-۱}{x^۲} & x>۱ \end{cases}$ (۰/۵)

$y'_-(۱)\ne y'_+(۱)$ (۰/۲۵)

تابع در این نقطه مشتق‌پذیر نیست. (۰/۲۵)

۱۴-

الف) $f'(x)=\frac{۳}{۲\sqrt{۳x}}(۲x^۳-۱)+(\sqrt{۳x}+۱)(۶x^۲)$ (۰/۷۵)

ب) $g'(x)=۶\tan x(۱+\tan^۲ x)+۲x(-\sin x^۲)$ (۱)

پ) $h'(x)=\frac{(۲x-۳)(۵x)-(۵)(x^۲-۳x)}{(۵x)^۲}$ (۰/۷۵)

۱۵- $f'(x)=۳x^۲-۶x=۰$ (۰/۵) $\Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=۲\notin[-۱,۱] \end{cases}$ (۰/۵)

$\Rightarrow \begin{cases} f(۱)=-۱ & \\ f(۰)=۱ & \max \ (۰/۵) \\ f(-۱)=-۳ & \min \end{cases}$

۱۶- $\underbrace{f(-۱)=۱ \Rightarrow a-b=۳}_{(۰/۲۵)},\underbrace{f''(-۱)=۰ \Rightarrow -۶+۲a=۰}_{(۰/۲۵)}$

$\Rightarrow \overbrace{a=۳,b=۰}^{(۰/۵)}$

۱۷-

مجانب قائم: $x=-۱$ (۰/۲۵)

مجانب افقی: $y=۲$ (۰/۲۵)

$y'=\frac{۳}{\underbrace{(x+۱)^۲}_{(۰/۲۵)}}>۰$ (۰/۲۵)

رسم جدول (۱)

| x | $-\infty$ | | $-۱$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | ‖ | + | |
| $f(x)$ | ۲ | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | ۲ |

رسم شکل (۰/۵)