# فهرست

# فصل پنجم کاربرد مشتق

۲۷۴- تعداد بازه‌هایی که تابع $f(x)=\frac{x^۴-۳}{x^۲-۲}$ ؛ $x\in(-۲,۲)$ در آن‌ها اکیداً نزولی باشد، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۷۵- اگر تابع $f(x)=\frac{x^۴}{x^۳-۸}$ در بازهٔ $(a,b)$ پیوسته و اکیداً نزولی باشد، حداکثر مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\sqrt[۳]{۴}-۱$ ۳) $۲\sqrt[۳]{۴}$ ۴) $۲(\sqrt[۳]{۴}-۱)$

۲۷۶- مجموعه مقادیری از اعداد حقیقی که در آن تابع $f(x)=۳\sqrt[۳]{x}+|x|$ صعودی باشد، کدام است؟

۱) $[-۱,+\infty)$ ۲) $\mathbb{R}$

۳) $[-۱,۰)\cup(۰,+\infty)$ ۴) $[-۳\sqrt{۳},۰]$

۲۷۷- کدام عبارت برای تابع $f(x)=۲x-\frac{۳}{۲\sqrt[۳]{x^۲-۱}}$ درست است؟

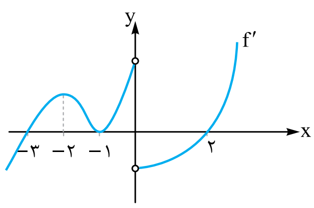
۱) تابع f در بازهٔ $(۰,۱)\cup(۱,+\infty)$ صعودی است.

۲) تابع f در بازه‌های $(۱,+\infty)$ و $(۰,۱)$ صعودی است.

۳) تابع f در بازهٔ $(۱,+\infty)$ صعودی و در بازهٔ $(۰,۱)$ نزولی است.

۴) تابع f در بازهٔ $(۱,+\infty)$ نزولی و در بازهٔ $(۰,۱)$ صعودی است.

۲۷۸- نمودار مشتق تابع پیوستهٔ f به صورت مقابل است. اگر f از مبدأ بگذرد، کدام‌یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟




۱) f دارای ۲ مینیمم نسبی ـ فاقد ماکزیمم

۲) f در بازهٔ $[۰,+\infty)$ حداکثر یک ریشه دارد.

۳) مبدأ نقطهٔ مینیمم نسبی است.

۴) f در بازهٔ $(-۳,-۲)$ اکیداً صعودی است.

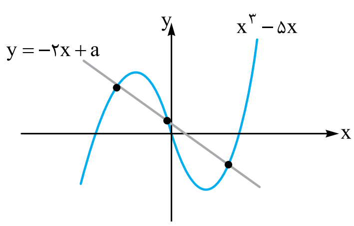
۲۷۹- اگر نقاط بحرانی تابع $f(x)=(x^۲-۶a^۲)\sqrt[۵]{x^۲}$ تشکیل مثلث قائم‌الزاویه بدهند، مقدار مثبت a کدام است؟

۱) $۵^{-\frac{۶}{۷}}$ ۲) $۵^{-\frac{۵}{۷}}$ ۳) $۵^{-\frac{۴}{۷}}$ ۴) $۵^{-\frac{۳}{۷}}$

۲۸۰- به ازای کدام مقادیر a، هر دو اکسترمم تابع $f(x)=\frac{x^۳}{۳}+\frac{ax^۲}{۲}+x+۱$ در بازهٔ $(-۱,۳)$ قرار دارد؟

۱) $(-۲,۲)$ ۲) $(-\infty,\frac{۱۰}{۳})$ ۳) $(-\frac{۱۰}{۳},-۲)$ ۴) $(-\infty,-۲)$

۲۸۱- نمودار $f(x)=x^۳-۵x$ را رسم کرده‌ایم. اگر مطابق شکل خط $y=-۲x+a$ را طوری رسم کنیم که با نمودار f همواره ۳ نقطه برخورد داشته باشد. حدود a کدام است؟




۱) $(-۱,۱)$

۲) $(-۲,۲)$

۳) $(-۳,۳)$

۴) $(-۴,۴)$

۲۸۲- تعداد نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x)=\frac{x^۲}{x^۲-۱}|x^۲-۴|$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۸۳- مینیمم تابع $f(x)=x^۴+۸x^۳+۲۲x^۲+۲۴x+۶$ کدام است؟

۱) $-۱$ ۲) $-۲$ ۳) $-۳$ ۴) $-۴$

۲۸۴- مجموع مقادیر اکسترمم $f(x)=\frac{1}{1+|x|}+\frac{1}{1+|x-2|}$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{5}{3}$ ۳) $\frac{8}{3}$ ۴) $\frac{11}{3}$

۲۸۵- اگر مجموع اکسترمم‌های نسبی تابع $f(x)=\frac{x^2+ax}{x-2}$ برابر ۱۶ باشد، مقدار $a$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۱۶

۲۸۶- اگر حاصل‌ضرب اکسترمم‌های تابع $f(x)=\frac{x^2+x+a}{x^2+4}$ برابر $-0/3125$ باشد، مقدار $a$ کدام است؟

۱) $-1$ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۲۸۷- مینیمم مطلق تابع $f(x)=x|3-x^2|$ در بازهٔ $[-1/5,\sqrt{3}]$ کدام است؟

۱) $-\frac{9}{4}$ ۲) $-2$ ۳) $-\sqrt{3}$ ۴) $-\frac{9}{8}$

۲۸۸- ماکزیمم مطلق تابع $f(x)=\frac{2x^4+8x^{\frac{5}{2}}+8x+10}{x^4+4x^{\frac{5}{2}}+4x+4}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $2/5$ ۴) ۵

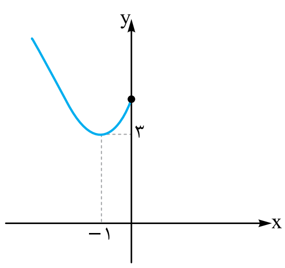
۲۸۹- ماکزیمم مطلق تابع $y=\sqrt[5]{x^5-4x^4-x^2}-x+3$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۹۰- اگر $a$ عددی حقیقی و مثبت باشد، حداکثر مقدار $f(x)=ax-(1+a^4)x^2$ کدام است؟

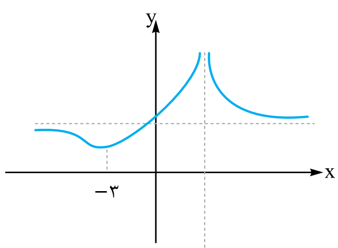
۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{3}{16}$

۲۹۱- اگر نمودار $f(x)=(a-\sqrt{-x+b})^2+c$ به صورت مقابل باشد، حاصل $a+b+c$ کدام است؟



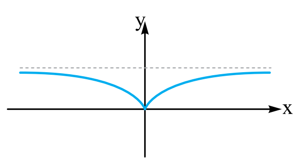

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۲۹۲- شکل روبه‌رو نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^2+a}{x^2+bx+4}$ است. $a$ کدام است؟




۱) ۷
۲) ۶
۳) ۵
۴) ۴

۲۹۳- قسمتی از نمودار یک تابع رسم شده است. ضابطهٔ آن کدام می‌تواند باشد؟




۱) $y=\frac{x^2}{x^2+2}$ ۲) $y=\frac{x^2}{x^2-2}$

۳) $y=\frac{|x|}{2+|x|}$ ۴) $y=\frac{|x|}{2-|x|}$

۲۹۴- اگر $x=4$ طول نقطهٔ اکسترمم تابع $f(x)=\frac{x-4\sqrt{x}+a}{\sqrt{x^3}+8}$ باشد، مقدار $a$ و نوع اکسترمم تابع در این نقطه کدام است؟

۱) صفر ـ مینیمم ۲) صفر ـ ماکزیمم

۳) ۴ ـ مینیمم ۴) ۴ ـ ماکزیمم

۲۹۵- اگر $f(x)=|x^2-6x|\sqrt[3]{(x-1)^2}$ باشد، مجموع طول نقاط بحرانی تابع $y=3f(-2x+2)+4$ کدام است؟

۱) $-0/25$ ۲) $-0/5$ ۳) $-0/75$ ۴) $-1$

۲۹۶- در تابع $f(x)=\dfrac{۲x^۲+۱۵۱}{x^۲+۷۵}$ با رئوس اکسترمم‌های توابع $f$ و $f'$ چه شکلی تشکیل می‌شود؟

۱) مستطیل　　۲) مربع

۳) مثلث　　۴) مثلث متساوی‌الاضلاع

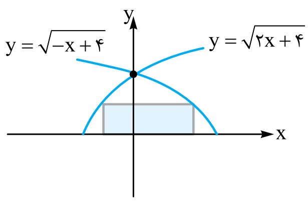
۲۹۷- با شرط $-۲\le x\le ۲$ و $f(x)=x^۳-۳x$ و $g(x)=۳x^۵+۵x^۳+۴x+۴$ مجموع حداقل و حداکثر مقدار تابع $gof$ کدام است؟

۱) صفر　　۲) ۴　　۳) ۸　　۴) ۱۰

۲۹۸- کوتاه‌ترین فاصلهٔ سهمی $y^۲=۴x$ از نقطهٔ $M(۳,۰)$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$　　۲) $\dfrac{۳}{۲}$　　۳) $۲\sqrt{۲}$　　۴) ۳

۲۹۹- از بین مستطیل‌هایی که مطابق شکل، دو رأس آن‌ها روی $y=\sqrt{۲x+۴}$ و $y=\sqrt{-x+۴}$ است و یک ضلع آن منطبق بر محور $x$هاست، مساحت ماکزیمم کدام است؟




۱) $\dfrac{۴}{\sqrt{۳}}$　　۲) $\dfrac{۶}{\sqrt{۳}}$

۳) $\dfrac{۸}{\sqrt{۳}}$　　۴) $\dfrac{۱۶}{\sqrt{۳}}$

۳۰۰- کره به شعاع ۳ مفروض است. مخروطی با حداکثر حجم در آن محاط کرده‌ایم. ارتفاع مخروط کدام است؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

۳۰۱- حداکثر مساحت جانبی استوانه‌ای که درون کره به شعاع $۴\sqrt{۲}$ محاط می‌شود، کدام است؟

۱) $۳۲\pi$　　۲) $۶۴\pi$　　۳) $\dfrac{۲۵۶\pi}{۳}$　　۴) $\dfrac{۵۱۲\pi}{۳}$

۳۰۲- استوانه‌ای درون مخروط قائم به شعاع ۳ محاط است. اگر حجم استوانه ماکزیمم باشد، شعاع آن کدام است؟

۱) ۱　　۲) ۱/۵　　۳) ۲　　۴) ۲/۵

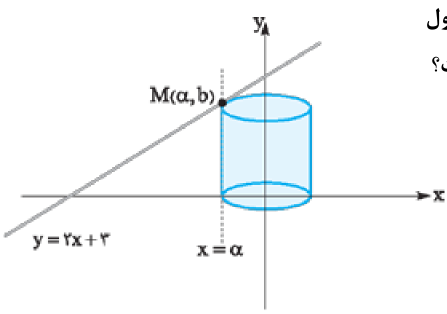
۳۰۳- در ساخت یک قیف به شکل مخروط قائم به حجم $\dfrac{۴\pi}{۳}$، با کدام ارتفاع کم‌ترین مقدار جنس مصرف می‌شود؟

۱) ۲　　۲) ۱　　۳) $\sqrt[۳]{۲}$　　۴) $\sqrt{۲}$

۳۰۴- کره‌ای به شعاع ۱ در مخروطی قائم محاط شده است. ارتفاع مخروط چه‌قدر باشد، تا حجم آن مینیمم شود؟

۱) ۴　　۲) ۳　　۳) ۲　　۴) ۱

۳۰۵- مطابق شکل نقطهٔ $M$ را در ناحیهٔ دوم روی خط $y=۲x+۳$ انتخاب می‌کنیم و خط $x=\alpha$ را حول محور $y$ها دوران می‌دهیم. به ازای کدام مقدار $\alpha$ حجم استوانهٔ تولیدشده در ربع اول و دوم ماکزیمم است؟




۱) $-۱$

۲) $-\dfrac{۱}{۲}$

۳) $-\dfrac{۱}{۳}$

۴) $-\dfrac{۱}{۴}$

۳۰۶- از بین مثلث‌های قائم‌الزاویه با اندازهٔ وتر ۱، دو ضلع قائم با کدام نسبت انتخاب شود تا حجم حاصل از دوران این مثلث حول وتر بیشترین باشد؟

۱) $\dfrac{۱}{۲}$　　۲) $\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$　　۳) $\dfrac{\sqrt{۳}}{۲}$　　۴) ۱

۳۰۷- قرینهٔ نقطهٔ $A$ واقع بر سهمی $f(x)=x^۲$ را نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم مختصات تعیین کرده و آن را $A'$ می‌نامیم. اگر طول نقطهٔ $A$ بین دو طول متوالی از محل برخورد $f$ با نیمساز مورد نظر باشد، ماکزیمم طول پاره‌خط $AA'$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$　　۲) $\dfrac{\sqrt{۲}}{۲}$　　۳) $\dfrac{\sqrt{۲}}{۴}$　　۴) $\dfrac{\sqrt{۲}}{۸}$

**۳۰۸- قرینهٔ نقطهٔ $A$ واقع بر منحنی $f(x)=\sqrt[3]{-x}$ را در دامنهٔ $[0,1]$ نسبت به نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم $A'$ می‌نامیم. ماکزیمم طول $AA'$ کدام است؟**

۱) $\frac{2}{3\sqrt{6}}$
۲) $\frac{4}{3\sqrt{6}}$
۳) $\frac{2}{3\sqrt{2}}$
۴) $\frac{4}{3\sqrt{2}}$

**۳۰۹- اگر $\sin\alpha+\sin\beta=\frac{1}{2}$ باشد، حداقل مقدار عبارت $\sin^2\alpha+4\sin^2\beta$ کدام است؟**

۱) $\frac{1}{5}$
۲) $\frac{2}{5}$
۳) $\frac{3}{5}$
۴) $\frac{4}{5}$

**۳۱۰- در میان تمام مستطیل‌های محیط بر مستطیلی با طول و عرض ۷ و ۵، ماکزیمم مقدار مساحت کدام است؟**

۱) ۶۶
۲) ۶۸
۳) ۷۰
۴) ۷۲

**۳۱۱- ذوزنقه‌ای با بیشترین مساحت ممکن در نیم‌دایره‌ای به قطر ۴ محاط است (قاعدهٔ بزرگ ذوزنقه بر قطر نیم‌دایره منطبق است). ارتفاع ذوزنقه کدام است؟**

۱) $\sqrt{2}$
۲) $\sqrt{3}$
۳) ۲
۴) ۳

الف) خط $y=-x+m$ از نقطهٔ $(۳,۰)$ بگذرد. در این حالت:

$$۰=-۳+m \Rightarrow m=۳$$

ب) خط $y=-x+m$ در نقطه‌ای بین رأس و ۳، $(\frac{۳}{۲}<x<۳)$ بر سهمی مماس شود:

$$\xrightarrow[x^{۲}-۳x<۰]{۰<x<۳} y=-(x^{۲}-۳x)=۳x-x^{۲} \Rightarrow y'=۳-۲x$$

$$m_{\text{مماس}}=-۱ \Rightarrow y'=۳-۲x=-۱$$

$$\Rightarrow x=۲ \xrightarrow{\text{در معادلهٔ منحنی}} y=۲$$

پس خط باید از $T(۲,۲)$ بگذرد: $۲=-۲+m$ که نتیجه می‌دهد $m=۴$.

پس مجموع مقادیر $m$ می‌شود $۳+۴=۷$.

**۲۷۴.** گزینهٔ ۳ برای این‌که تابع $f$ در بازه‌ای نزولی باشد، باید علامت مشتق منفی باشد:

$$f(x)=\frac{x^{۴}-۳}{x^{۲}-۲} \xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x)=\frac{۴x^{۳}(x^{۲}-۲)-۲x(x^{۴}-۳)}{(x^{۲}-۲)^{۲}}$$

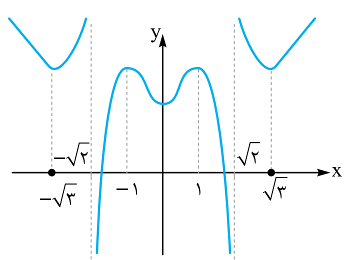
عبارت مشتق را ساده کنیم: $f'(x)=\frac{۲x^{۵}-۸x^{۳}+۶x}{(x^{۲}-۲)^{۲}}$

$$=\frac{۲x(x^{۴}-۴x^{۲}+۳)}{(x^{۲}-۲)^{۲}}=\frac{۲x(x^{۲}-۳)(x^{۲}-۱)}{(x^{۲}-۲)^{۲}}$$

پس ریشه‌های صورت مشتق، صفر، $\pm۱$ و $\pm\sqrt{۳}$ و ریشهٔ مخرج $\pm\sqrt{۲}$ است و البته مخرج اثری در علامت‌ها نمی‌گذارد. پس مطابق جدول تعیین علامت ۴ بازهٔ نزولی داریم.

| $x$ | $-۲$ | | $-\sqrt{۳}$ | | $-\sqrt{۲}$ | | $-۱$ | | $۰$ | | $۱$ | | $\sqrt{۲}$ | | $\sqrt{۳}$ | | $۲$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $-$ نزولی | $۰$ | $+$ | ت ن | $+$ | | $-$ نزولی | | $+$ | | $-$ نزولی | ت ن | $-$ نزولی | $۰$ | $+$ | |

دوست دارید نمودار را ببینید؟!




**۲۷۵.** گزینهٔ ۱ با استفاده از جدول تغییرات تابع مشتق، بازه‌های صعودی و نزولی را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x^{۴}}{x^{۳}-۸} \Rightarrow f'(x)=\frac{۴x^{۳}(x^{۳}-۸)-۳x^{۲}x^{۴}}{(x^{۳}-۸)^{۲}}$$

مشتق را ساده‌تر کنیم: $=\frac{x^{۶}-۳۲x^{۳}}{(x^{۳}-۸)^{۲}}=\frac{x^{۳}(x^{۳}-۳۲)}{(x^{۳}-۸)^{۲}}$

پس ریشه‌های صورت $\sqrt[۳]{۳۲}$ و صفر و ریشهٔ مخرج ۲ است و علامت مشتق به صورت جدول زیر است:

| $x$ | | $۰$ | | $۲$ | | $\sqrt[۳]{۳۲}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $+$ | $۰$ | $-$ | ت ن | $-$ | $۰$ | $+$ |

پس بازه‌های نزولی تابع $(۰,۲)$ و $(۲,\sqrt[۳]{۳۲})$ هستند. طول بازهٔ $(۰,۲)$ از $(۲,\sqrt[۳]{۳۲})$ بیشتر است. پس داریم: $(a,b)=(۰,۲) \Rightarrow b-a=۲$

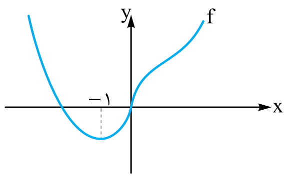
**۲۷۶.** گزینهٔ ۱ تابع برای $x\geq ۰$ از جمع دو قسمت صعودی $\lfloor x \rfloor$ و $۳\sqrt[۳]{x}$ ساخته شده و اکیداً صعودی است. برای $x<۰$ داریم: $f(x)=۳\sqrt[۳]{x}-x$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x)=\frac{۳}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}}-۱ \xrightarrow{\text{صعودی}} \frac{۱}{\sqrt[۳]{x^{۲}}}-۱\geq ۰$$

$$\Rightarrow \frac{۱-\sqrt[۳]{x^{۲}}}{\sqrt[۳]{x^{۲}}}\geq ۰$$

$$\xrightarrow{\text{مخرج مثبت است.}} ۱-\sqrt[۳]{x^{۲}}\geq ۰ \Rightarrow x^{۲}\leq ۱ \xrightarrow[\text{داشتیم.}]{\text{شرط } x<۰ \text{ را}} -۱\leq x<۰$$

پس تابع در $[-۱,۰]$ و همچنین $(۰,+\infty)$ صعودی است و چون در $x=۰$ پیوسته است، در کل $[-۱,+\infty)$ صعودی است. نمودارش را ببینید:




**۲۷۷.** گزینهٔ ۲ راه I از تابع مشتق می‌گیریم و علامت مشتق را بررسی می‌کنیم. برای سادگی در مشتق، از توان کسری به جای رادیکال استفاده کنیم:

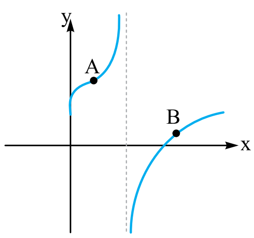
$$f(x)=۲x-\frac{۳}{۲\sqrt[۳]{x^{۲}-۱}}=۲x-\frac{۳}{۲}(x^{۲}-۱)^{-\frac{۱}{۳}}$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x)=۲-\frac{۳}{۲}(-\frac{۱}{۳})(۲x)(x^{۲}-۱)^{-\frac{۴}{۳}}=۲+\frac{x}{\sqrt[۳]{(x^{۲}-۱)^{۴}}}$$

واضح است که مشتق برای $x>۰$ و $x\neq ۱$ مثبت است. اما تابع در $x=۱$ تعریف نمی‌شود و جدول تعیین علامت مشتق به شکل زیر است:

| $x$ | $۰$ | | $۱$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $+$ | ت ن | $+$ | |

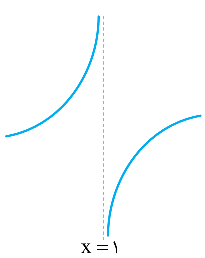
و در تک‌تک بازه‌های $(۰,۱)$ و $(۱,+\infty)$ تابع صعودی است. نمودار تقریبی تابع را هم ببینید:




دقت کنید که اولاً $(۰,۱)\cup(۱,+\infty)$ یک **بازه** نیست یعنی عبارت صورت (۱) اساساً بی‌معنی است.

و همچنین تابع در تک‌تک این بازه‌ها صعودی است نه در اجتماع آن‌ها! (به نقاط A و B دقت کنید.)

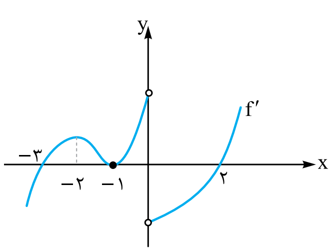
راه II بدون مشتق‌گیری و با دقت به حدهای چپ و راست $f$ در $x=۱$ نمودار تابع در اطراف این نقطه باید به شکل روبه‌رو باشد:



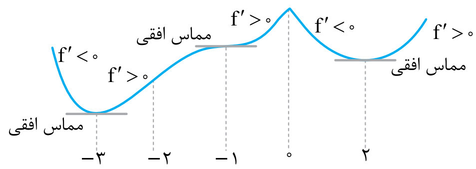

$$\lim_{x\to ۱^{-}} f(x)=۲-\frac{۳}{۰^{-}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to ۱^{+}} f(x)=۲-\frac{۳}{۰^{+}}=-\infty$$

**۲۷۸.** گزینهٔ ۴ هر جا مشتق از $(-)$ به $(+)$ تغییر علامت دهد تابع پیوستهٔ $f$، مینیمم دارد، این اتفاق در $x=-۳,۲$ افتاده است.



همچنین اگر مشتق از (+) به (−) تغییر علامت دهد، تابع پیوستهٔ f ماکزیمم دارد که در $x=0$ این‌طور شده است. این نمودار تقریبی f است:




با توجه به شکل و آن‌چه در بالا گفتیم f ماکزیمم نسبی دارد ((۱) نادرست است). f از مبدأ می‌گذرد، پس $(0,0)$ یک ریشه است. بعد از آن تابع تا نقطهٔ ۲ نزولی است و سپس صعودی می‌شود و ممکن است یک بار دیگر محور طول‌ها را قطع کند. پس (۲) هم نادرست است. در صورت سؤال گفته $f(0)$ صفر است و همان‌طور که می‌بینید در $(0,0)$ ماکزیمم داریم ((۳) غلط است) اما (۴) درست است و به خاطر مثبت‌بودن مشتق، در $(-3,-2)$ تابع f اکیداً صعودی است.

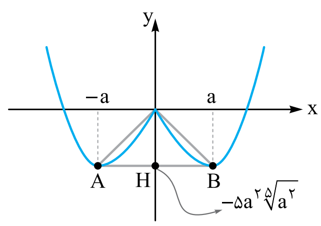
**۲۷۹. گزینه ۲** به خاطر $\sqrt[5]{x^2}$ یک نقطهٔ بحرانی در $x=0$ داریم. حالا $f'=0$ قرار می‌دهیم تا سایر نقاط بحرانی پیدا شوند:

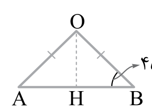
$$f(x)=(x^2-6a^2)\sqrt[5]{x^2}$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x)=2x\sqrt[5]{x^2}+\frac{2(x^2-6a^2)}{5\sqrt[5]{x^3}}$$

$$=\frac{10x^2+2x^2-12a^2}{5\sqrt[5]{x^3}}=0 \Rightarrow x^2=a^2 \Rightarrow x=\pm a$$

پس طول‌های بحرانی صفر، a و −a و عرضشان (در ضابطهٔ f قرار دهیم) به ترتیب صفر، $-5a^2\sqrt[5]{a^2}$ و $-5a^2\sqrt[5]{a^2}$ است.




طبق صورت سؤال AOB قائم‌الزاویه است. چون OA و OB هم‌اندازه هستند، پس مثلث متساوی‌الساقین هم هست پس:

$$\hat{A}=\hat{B}=45^\circ$$

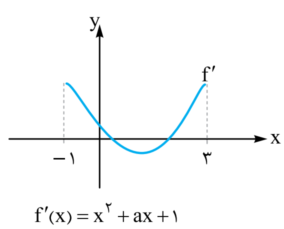
$$\tan 45^\circ=1 \Rightarrow \frac{OH}{HB}=1 \Rightarrow |a|=5a^2\sqrt[5]{a^2} \xrightarrow{a>0} 1=5aa^{\frac{2}{5}}$$

$$\Rightarrow a^{\frac{7}{5}}=\frac{1}{5} \Rightarrow a=(\frac{1}{5})^{\frac{5}{7}}=5^{-\frac{5}{7}}$$

**۲۸۰. گزینه ۳** باید ریشه‌های $f'$ در این فاصله باشند:

$$f'(x)=x^2+ax+1$$

برای این‌که ریشه‌های این سهمی در فاصلهٔ $(-1,3)$ قرار بگیرند باید: الف) ۲ تا ریشه بدهد، ب) $x_S$ بین $(-1,3)$ باشد و پ) $f'(-1)$ و $f'(3)$ هر دو مثبت باشند:




الف) دو ریشه: $\Delta=a^2-4>0 \Rightarrow a^2>4 \Rightarrow a>2$ یا $a<-2$

ب) رأس بین آن‌هاست: $x_S=-\frac{a}{2}\in(-1,3) \Rightarrow -1<-\frac{a}{2}<3$

$$\Rightarrow 2>a>-6$$

پ) در −۱ و ۳ مقدار $f'$ مثبت است: $f'(-1)>0, f'(3)>0$

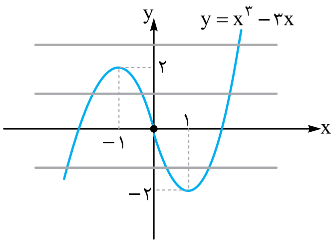
$$\Rightarrow 2-a>0, 10+3a>0 \Rightarrow a<2, a>-\frac{10}{3}$$

از اشتراک این شرط‌ها داریم: $-\frac{10}{3}<a<-2$

**۲۸۱. گزینه ۲** برای تلاقی خط و نمودار داریم:

$$y_1=y_2 \Rightarrow x^3-5x=-2x+a \Rightarrow x^3-3x=a$$

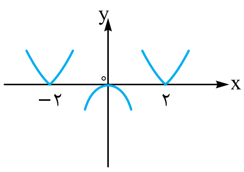
نمودار $y=x^3-3x$ را بلدیم: (مشتق آن $3x^2-3$ است که در ±۱ نقطهٔ اکسترمم می‌دهد.) با توجه به شکل برای این‌که معادلهٔ $x^3-3x=a$ سه جواب دهد باید $-2<a<2$ باشد.



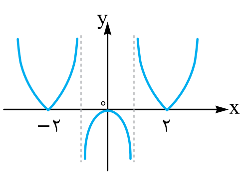

**۲۸۲. گزینه ۲ راه I** به خاطر عامل $x^2$ در $x=0$ اکسترمم نسبی داریم و چون سایر عوامل $(\frac{|x^2-4|}{x^2-1})$ در این نقطه منفی می‌شوند، نمودار شبیه تابع $-x^2$ است. (ماکزیمم)

به خاطر عامل $|x^2-4|$ در $x=\pm 2$، مینیمم نسبی داریم (سایر عوامل $\frac{x^2}{x^2-1}$ در اطراف ±۲، مثبت هستند.)

پس تا این‌جا نمودار باید به شکل روبه‌رو باشد:




در $x=\pm 1$ مخرج صفر است و تابع در اطراف ±۱ به طرف $\pm\infty$ می‌رود. پس نمودار به صورت مقابل کامل می‌شود:




و با توجه به شکل ۳ اکسترمم دارد.

**راه II** $x=\pm 2$ بحرانی گوشه‌ای و اکسترمم هستند. در سایر نقاط، با برداشتن قدرمطلق، ضابطهٔ تابع به صورت $\frac{x^2(x^2-4)}{x^2-1}$ یا قرینهٔ آن است. حالا مشتق می‌گیریم و مساوی صفر می‌گذاریم:

$$y=\frac{x^4-4x^2}{x^2-1} \Rightarrow y'=\frac{(4x^3-8x)(x^2-1)-2x(x^4-4x^2)}{(x^2-1)^2}$$

مشتق را ساده‌تر کنیم:

$$=\frac{2x^5-4x^3+8x}{(x^2-1)^2}=\frac{2x(x^4-2x^2+4)}{(x^2-1)^2}=\frac{2x((x^2-1)^2+3)}{(x^2-1)^2}$$

پس تنها ریشهٔ مشتق $x=0$ است (تغییر علامت هم می‌دهد و اکسترمم است).

پس به همراه ±۲ سه اکسترمم داریم.

**۲۸۳. گزینه ۳** از تابع مشتق می‌گیریم و مساوی صفر می‌گذاریم:

$$f'(x)=4x^3+24x^2+44x+24=4(x^3+6x^2+11x+6)=0$$

با کمی دقت $x=-1$ در معادله صدق می‌کند و عبارت $f'(x)$ بر $x+1$ بخش‌پذیر است:

$$x^3+6x^2+11x+6=(x+1)\underbrace{(x^2+5x+6)}_{\text{از تقسیم به‌دست‌آمده}}$$

$$=(x+1)(x+2)(x+3)=0$$

پس ریشه‌های مشتق ۱−، ۲− و ۳− هستند.

تابع در $\pm\infty$، به طرف $+\infty$ می‌رود پس کم‌ترین مقدار در یکی از همین طول‌های بحرانی است:

| $x$ | $-1$ | $-2$ | $-3$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-3$ | $-2$ | $-3$ |

$\Rightarrow \min f=-3$

**۲۸۴. گزینه ۴**

$$f(x)=\frac{1}{1+|x|}+\frac{1}{1+|x-2|}$$

الف) برای $x<0$ هر دو قدرمطلق را با علامت $(-)$ برمی‌داریم:

$$f(x)=\frac{1}{-x+1}+\frac{1}{-x+3}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{(3-x)^2}>0$$

در این حالت تابع صعودی است و اکسترمم ندارد.

ب) برای $0\le x<2$ فقط $|x|$ را با علامت $(+)$ برمی‌داریم:

$$f(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{-x+3}\Rightarrow f'(x)=\frac{-1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(3-x)^2}=0$$

$$\Rightarrow (x+1)^2=(3-x)^2\Rightarrow 2x+1=-6x+9\Rightarrow x=1$$

در این حالت یک نقطهٔ اکسترمم داریم.

پ) برای $x\ge 2$ هر دو قدرمطلق را با علامت $(+)$ برمی‌داریم:

$$f(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\Rightarrow f'(x)=\frac{-1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x-1)^2}<0$$

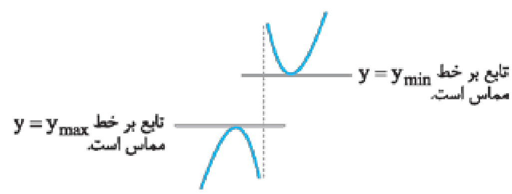
در این حالت تابع نزولی است و اکسترمم ندارد.

پس در $x=1$ بحرانی از نوع مشتق صفر داریم و در $x=0$ و $x=2$ هم بحرانی از نوع گوشه (ریشهٔ سادهٔ یک قدرمطلق) داریم. عرض‌ها را به دست می‌آوریم:

| $x$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}+\frac{1}{1}$ |

پس جمع اکسترمم‌ها می‌شود: $\frac{4}{3}+1+\frac{4}{3}=\frac{11}{3}$

**۲۸۵. گزینه ۲** چون این تابع مشتق‌پذیر است و در اکسترمم‌های نسبی، خط مماس افقی می‌شود، تابع بر خط $y=k$ مماس است. ببینید:




پس ببینیم تابع بر چه خط‌های افقی مماس است؟

$$y=k\Rightarrow \frac{x^2+ax}{x-2}=k\Rightarrow x^2+(a-k)x+2k=0$$

$$\xrightarrow{\text{مماس است}}\Delta=(a-k)^2-4(1)(2k)=0$$

$$\Rightarrow k^2-2ak+a^2-8k=0\Rightarrow k^2-(2a+8)k+a^2=0$$

جمع مقادیر k از این معادله می‌شود: $S=\frac{-B}{A}=\frac{+(2a+8)}{1}$

که باید ۱۶ باشد: $2a+8=16\Rightarrow a=4$

**۲۸۶. گزینه ۱** برای یافتن مقادیر اکسترمم‌های نسبی در توابع کسری با صورت و مخرج درجه ۲، تابع را مساوی k قرار می‌دهیم و معادلهٔ حاصل باید ریشهٔ مضاعف داشته باشد:

$$\frac{x^2+x+a}{x^2+4}=k\Rightarrow (k-1)x^2-x+(4k-a)=0$$

این معادله ریشهٔ مضاعف دارد، پس:

$$\Delta=B^2-4AC=0\Rightarrow (-1)^2-4\overbrace{(k-1)(4k-a)}^{4k^2-4k-ka+a}=0$$

$$\Rightarrow 0=16k^2-16k-4ka+4a-1$$

حاصل‌ضرب مقادیر k می‌شود $P=\frac{C}{A}=\frac{4a-1}{16}$ که باید $-0/3125$ باشد:

$$\Rightarrow 4a-1=16\times -0/3125=-5\Rightarrow a=-1$$

**۲۸۷. گزینه ۲** به خاطر عامل $|3-x^2|$ در $x=\sqrt{3}$ گوشه داریم ($-\sqrt{3}$ در بازهٔ ما نیست). در سایر نقاط، قدرمطلق با علامت مثبت برداشته می‌شود:

$$-1/5\le x\le\sqrt{3}\Rightarrow x^2\le 3\Rightarrow 3-x^2\ge 0$$

$$\Rightarrow |3-x^2|=3-x^2$$

پس داریم: $f(x)=x(3-x^2)=3x-x^3$

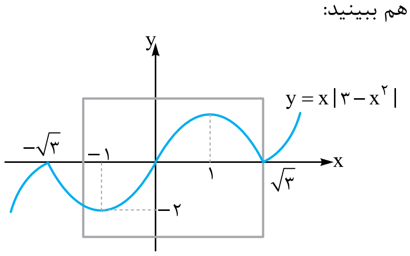
مشتق: $f'(x)=3-3x^2$

پس دو نقطهٔ بحرانی در $x=\pm 1$ هستند.

برای پیداکردن min مطلق، جدولی از مقادیر تابع می‌کشیم:

| دلیل | ابتدای دامنه | مشتق صفر | مشتق صفر | انتها و گوشه |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-1/5$ | $-1$ | $1$ | $\sqrt{3}$ |
| $y$ | $-\frac{9}{8}$ | $-2$ | $2$ | $0$ |

پس $y_{min}=-2$. شکل را هم ببینید:




**۲۸۸. گزینه ۳** به خاطر $x^{\frac{5}{2}}$ دامنهٔ تابع فقط شامل اعداد نامنفی است و با کمی دقت، در صورت و مخرج اتحاد مربع کامل داریم:

$$f(x)=\frac{2x^4+8x^{\frac{5}{2}}+8x+10}{x^4+4x^{\frac{5}{2}}+4x+4}=\frac{2(x^2+2\sqrt{x})^2+10}{(x^2+2\sqrt{x})^2+4}$$

با تغییر متغیر $t=x^2+2\sqrt{x}\ge 0$ تابع به صورت $f(t)=\frac{2t+10}{t+4}$ است.

چون f اکیداً نزولی است $(f'=\frac{-2}{(t+4)^2}<0)$ بیشترین مقدارش را در همان اول دامنه به ازای $t=0$ می‌گیرد: $\xrightarrow{t=0}\min f=\frac{10}{4}=2/5$

**۲۸۹.** گزینه ۳ اگر زیر رادیکال $x^۴$ و $x^۲$ نبودند، تابع به صورت $\sqrt[۵]{x^۵}-x+۳$ بود که جوابش می‌شود ۳. الان از $x^۵$ به اندازهٔ $۴x^۴+x^۲$ کم شده است پس داریم: $\sqrt[۵]{x^۵-۴x^۴-x^۲}\le x$

$$\Rightarrow \sqrt[۵]{x^۵-۴x^۴-x^۲}-x+۳\le x-x+۳$$

پس تابع همیشه از ۳ کم‌تر یا مساوی است و چون $f(۰)=۳$، حتماً $y=۳$ ماکزیمم مقدار تابع است.

**۲۹۰.** گزینه ۳ راه I f یک سهمی رو به پایین است و حداکثر مقدار آن، عرض نقطهٔ رأس خواهد بود: $f(x)=ax-(۱+a^۴)x^۲$

$$f_{max}=y_S=-\frac{\Delta}{۴A}=\frac{-a^۲}{-۴(۱+a^۴)}=\frac{a^۲}{۴(۱+a^۴)}$$

$$\xrightarrow[\div a^۲]{\div a^۲} f_{max}=\frac{۱}{۴(\frac{۱}{a^۲}+a^۲)}$$

می‌دانیم $a^۲+\frac{۱}{a^۲}$، جمع عددی مثبت و معکوسش است و همواره بیشتر یا مساوی ۲ است پس مخرج همیشه بیشتر یا مساوی ۸ است و حداکثر مقدار آن می‌شود $\frac{۱}{۸}$.

راه II قسمت $\frac{a^۲}{۱+a^۴}$ را به صورت $y=\frac{x^۲}{۱+x^۴}$ در نظر می‌گیریم و با استفاده از مشتق، ماکزیمم آن را به دست می‌آوریم.

$$y'=\frac{۲x(۱+x^۴)-۴x^۳x^۲}{(۱+x^۴)^۲}=۰\Rightarrow ۲x-۲x^۵=۰\xrightarrow{a>۰}x=۱$$

$$\Rightarrow y_{max}=\frac{۱}{۲}$$

و جواب $f_{max}$ می‌شود $\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۸}$.

**۲۹۱.** گزینه ۴ دامنهٔ تابع $(-\infty,۰]$ است پس حتماً صفر ریشهٔ زیر رادیکال بوده: $\sqrt{-۰+b}=۰\Rightarrow b=۰$

پس: $f(x)=(a-\sqrt{-x})^۲+c$ حالا باید $f(-۱)=۳$ و $f'(-۱)=۰$ باشد:

الف) $f'(x)=۲(۰-\frac{-۱}{۲\sqrt{-x}})(a-\sqrt{-x})'+۰$

$$\xrightarrow{x=-۱} f'(-۱)=۲(\frac{۱}{۲})(a-۱)=۰\Rightarrow a=۱$$

ب) $f(-۱)=(۱-۱)^۲+c=۳\Rightarrow c=۳$

و بنابراین: $a+b+c=۴$

**۲۹۲.** گزینه ۲ شکل می‌گوید تابع در ۱ نقطه با طول مثبت تعریف نشده پس مخرج ریشهٔ مضاعف مثبت دارد و با توجه به عبارت $x^۲+bx+۴$ باید $b=-۴$ باشد تا مخرج $(x-۲)^۲$ شود.

از طرف دیگر طول نقطهٔ مینیمم برابر ۳- است. پس در ۳- مشتق صفر است. مشتق را ببینید:

$$y=\frac{x^۲+a}{(x-۲)^۲}\Rightarrow y'=\frac{۲x(x-۲)^۲-۲(x-۲)(x^۲+a)}{(x-۲)^۴}$$

$$\xrightarrow{x=-۳} y'(-۳)=\frac{-۶(-۵)^۲-۲(-۵)(۹+a)}{(-۵)^۴}=۰$$

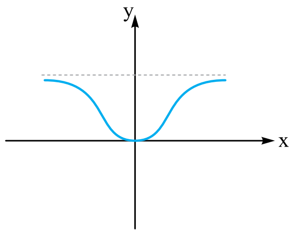
$$\Rightarrow \underbrace{-۶\times۲۵}_{-۱۵۰}+۱۰(۹+a)=۰\Rightarrow ۹+a=۱۵\Rightarrow a=۶$$

**۲۹۳.** گزینه ۳ شکل نشان می‌دهد f در مبدأ گوشه دارد و در $(۰,+\infty)$ پیوسته است. پس فقط ۳ مناسب است.

گزینه‌های ۱ و ۲ در مبدأ گوشه ندارند و ۴ در $x=۲$ ناپیوستگی دارد.

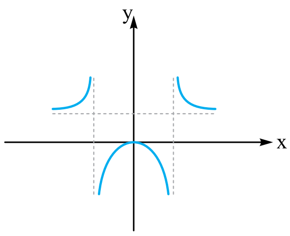
البته برای رد ۴ می‌توانیم دقت کنیم که حد در $\pm\infty$ برابر ۱- است در حالی که شکل در $\pm\infty$ حد مثبت دارد. نمودار گزینه‌ها را ببینید:

۱ $\frac{x^۲}{x^۲+۲}$



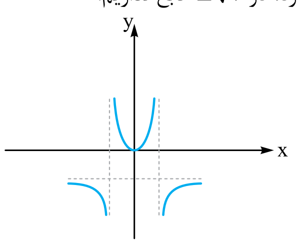

در مبدأ مینیمم دارد؛ پیوسته است.

۲ $\frac{x^۲}{x^۲-۲}$




در مبدأ ماکزیمم دارد، در $\pm\sqrt{۲}$ تابع نداریم.

۴ $y=\frac{|x|}{۲-|x|}$




در صفر گوشه دارد و حدش در ۲± نامتناهی است.

**اشاره** هر ۴ تابع با تبدیل x به x- تغییر نمی‌کنند و نمودارشان نسبت به محور y متقارن است.

**۲۹۴.** گزینه ۳ در تابع $f(x)=\frac{x-۴\sqrt{x}+a}{\sqrt{x^۳}+۸}$ باید $x=۴$ ریشهٔ مشتق f باشد، مشتق را ببینید:

$$f'(x)=\frac{(۱-۴\frac{۱}{۲\sqrt{x}})(\sqrt{x^۳}+۸)-\frac{۳x^۲}{۲\sqrt{x^۳}}(x-۴\sqrt{x}+a)}{(\sqrt{x^۳}+۸)^۲}$$

$$f'(۴)=\frac{۰-\frac{۳\times۱۶}{۲\times۸}(۴-۸+a)}{(۸+۸)^۲}=۰\Rightarrow a=۴$$

حالا دقت کنید که به ازای $a=۴$ صورت کسر $x-۴\sqrt{x}+۴$ است که می‌شود $(\sqrt{x}-۲)^۲$ و مخرج هم مثبت است پس حتماً نقطهٔ $(۴,۰)$ مینیمم نسبی (و مطلق) تابع است. (سایر نقاط تابع، عرض مثبت دارند.)

**۲۹۵.** گزینه ۳ اول طول نقاط بحرانی خود f را پیدا کنیم:

$$f(x)=|x^۲-۶x|\sqrt[۳]{(x-۱)^۲}$$

f در سه نقطهٔ صفر، ۶ و ۱ نقطهٔ بحرانی دارد (در صفر و ۶ گوشه دارد و در $x=۱$ نیم‌مماس عمودی دارد). برای سایر مقادیر x، اول قدرمطلق را برمی‌داریم ((+) یا (−) فرقی در ریشه‌های $f'$ ندارد.)

$$f(x)=(x^۲-۶x)\sqrt[۳]{(x-۱)^۲}$$

حالا مشتق: $(x^2-6x)$ $\Rightarrow f'(x) = (2x-6)\sqrt[3]{(x-1)^2} + \frac{2}{3\sqrt[3]{(x-1)}}(x^2-6x)$

مشتق را مساوی صفر می‌گذاریم: $= \frac{(2x-6)3(x-1)+2(x^2-6x)}{3\sqrt[3]{x-1}} = 0$

$$\Rightarrow 2(\underbrace{(x-3)(3x-3)}_{3x^2-12x+9} + x^2-6x) = 0 \Rightarrow 4x^2-18x+9=0$$

پس جمع طول‌های نقاط بحرانی در این قسمت برابر است با:

$$x_1+x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$$

سه‌تا بحرانی هم از قبل داشتیم که جمع طول‌هایشان $7 = 6+1+0$ بود. پس جمع طول کل بحرانی‌های $f(x)$ می‌شود $7+\frac{9}{2} = 11/5$.

حالا برای $f(-2x+2)$ تمام این نقاط را ۲ واحد به چپ می‌بریم و سپس طول‌ها را بر $-2$ تقسیم می‌کنیم. ۵ نقطهٔ بحرانی داشتیم، اگر از x هر کدام ۲تا کم شود، از مجموع xها ۱۰تا کم می‌شود (از ۱۱/۵ به ۱/۵ می‌رسیم) و سپس با تقسیم بر $-2$، جمع طول‌ها هم می‌شود $\frac{1/5}{-2}$ یعنی $-\frac{3}{4} = -0/75$.

**۲۹۶.** گزینهٔ ۳ اول $\frac{2x^2+151}{x^2+75}$ را به صورت $2+\frac{1}{x^2+75}$ ببینید. تنها اکسترمم این تابع در $x=0$ قرار دارد:

$$y' = 0 + \frac{-2x}{(x^2+75)^2} = 0 \Rightarrow x=0$$

پس $A(0,\frac{151}{75})$ اولین نقطه است (اکسترمم تابع $f(x)$ است).

برای پیداکردن اکسترمم‌های $f'$ باید از آن مشتق بگیریم:

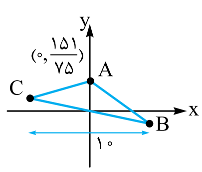
$$g'(x) = (f')'(x) = \frac{-2(x^2+75)^2 - 2(2x)(x^2+75)(-2x)}{(x^2+75)^4}$$

$$= \underbrace{\frac{-2(x^2+75)}{(x^2+75)^4}}((x^2+75)-4x^2) = 0 \Rightarrow 75 = 3x^2$$

این‌ها اثری روی ریشهٔ مشتق ندارند.

$$\Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x=\pm 5$$

با قراردادن طول‌ها در $g(x) = \frac{-2x}{(x^2+75)^2}$ عرض این نقاط $\pm\frac{10}{100^2}$ است. پس دو اکسترمم $f'$ در $C(-5, 0/001)$ و $B(5, -0/001)$ هستند.




واضح است که مثلث ABC متساوی‌الاضلاع نیست.

**۲۹۷.** گزینهٔ ۳ مشتق g می‌شود $g'(x) = 15x^4+15x^2+4$ که همواره مثبت است پس g اکیداً صعودی است و برای رسیدن به مینیمم و ماکزیمم gof باید سراغ f برویم:

$$f(x) = x^3-3x,\ x\in[-2,2] \Rightarrow f'(x) = 3x^2-3=0$$

پس نقاط بحرانی f در طول‌های $\pm1$ و $\pm2$ هستند و داریم:

| x | -1 | 1 | 2 | -2 |
|---|---|---|---|---|
| f | 2 | -2 | 2 | -2 |

بنابراین $\max f = 2$ و $\min f = -2$ و داریم:

$$\xrightarrow{\text{g اکیداً صعودی}} \begin{cases}\min gof = g(\min f) = g(-2)\\ \max gof = g(\max f) = g(2)\end{cases}$$

موافقید که در $g(2)$ و $g(-2)$، جملات xدار قرینهٔ هم هستند و جمعشان صفر است؟ پس $g(2)+g(-2)$ می‌شود $8 = 4+4$ ببینید:

$$g(2) = 3(2)^5 + 5(2)^3 + 4(2) + 4$$
$$g(-2) = 3(-2)^5+5(-2)^3+4(-2)+4$$

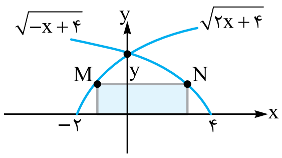
جمع: $g(2)+g(-2) = 0+0+0+8$

**۲۹۸.** گزینهٔ ۳ فاصلهٔ نقطهٔ $A(x,y)$ روی سهمی از $M(3,0)$ برابر است با:

$$AM = \sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2} \xrightarrow[y^2=4x]{\text{معادلهٔ سهمی}} = \sqrt{(x-3)^2+\underbrace{4x}_{\text{به‌جای } y^2}}$$

پس در زیر رادیکال $x^2-2x+9$ داریم که به صورت $(x-1)^2+8$ مربع کامل می‌شود و کم‌ترین مقدارش ۸ است. پس $AM_{min} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

**۲۹۹.** گزینهٔ ۳ اگر عرض نقاط N و M را y بگیریم، داریم:




$M: y_M = \sqrt{2x_M+4} \xrightarrow{y_M=y} x_M = \frac{y^2-4}{2}$ روی منحنی است.

$N: y_N = \sqrt{-x_N+4} \xrightarrow{y_N=y} x_N = 4-y^2$ روی منحنی است.

پس طول مستطیل برابر است با: $x_N - x_M = 4-y^2-\frac{y^2-4}{2} = 6-\frac{3y^2}{2}$

و مساحت مستطیل می‌شود:

$$S = \text{طول}\times\text{عرض} = (6-\frac{3}{2}y^2)y \Rightarrow S = 6y-\frac{3}{2}y^3$$

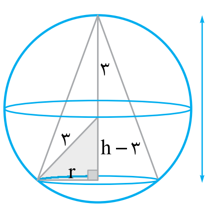
و باید $S'=0$ قرار دهیم تا به $S_{max}$ برسیم:

$$S' = 6-\frac{9}{2}y^2 = 0 \Rightarrow \frac{9}{2}y^2 = 6 \Rightarrow y^2=\frac{4}{3}$$

$$\xrightarrow{y>0} y=\frac{2}{\sqrt3} \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} S_{max} = y(6-\frac32 y^2)$$

$$= \frac{2}{\sqrt3}(6-\frac32\times\frac43) = \frac{8}{\sqrt3}$$

**۳۰۰.** گزینهٔ ۴ با توجه به شکل در مثلث قائم‌الزاویه داریم:




فیثاغورس: $3^2 = (h-3)^2+r^2$

$\Rightarrow 9 = 9-6h+h^2+r^2$

$\Rightarrow r^2 = 6h-h^2$

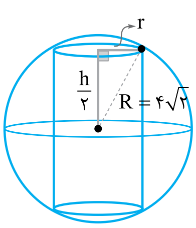
حجم مخروط برابر است با:

$$V = \frac{\pi}{3}r^2h \xrightarrow{r^2\ \text{جای‌گذاری}} V = \frac{\pi}{3}(6h-h^2)h = \frac{\pi}{3}(6h^2-h^3)$$

برای رسیدن به حجم ماکزیمم، مشتق V را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$V' = \frac{\pi}{3}(12h-3h^2)=0 \Rightarrow 12h=3h^2 \xrightarrow{\div 3h} h=4$$

**۳۰۱.** گزینهٔ ۲ با توجه به شکل وقتی استوانه درون کره محاط می‌شود، طبق رابطهٔ فیثاغورس داریم: $r^2+(\frac{h}{2})^2 = R^2 = 32$




مساحت جانبی استوانه $S_w = 2\pi rh$ است و باید ماکزیمم شود.

**راه I** چون در شرط $r^۲+(\frac{h}{۲})^۲=۳۲$، توان r و $\frac{h}{۲}$ با هم برابر است پس برای رسیدن $S=۴\pi r(\frac{h}{۲})$ به بیشترین مقدار، آن‌ها را مساوی می‌گیریم:

$$r^۲+(\frac{h}{۲})^۲=۳۲ \xrightarrow{r=\frac{h}{۲}} r^۲=(\frac{h}{۲})^۲=\frac{۳۲}{۲} \Rightarrow r=\frac{h}{۲}=۴ \Rightarrow h=۸$$

پس حداکثر $S_W$ می‌شود: $\max S_W=۲\pi(۴)(۸)=۶۴\pi$

**راه II** در تابع $S_W$ با استفاده از شرط $r^۲+\frac{h^۲}{۴}=۳۲$ می‌نویسیم:

$$r=\sqrt{۳۲-\frac{h^۲}{۴}} \Rightarrow S_W=۲\pi rh=۲\pi\sqrt{۳۲-\frac{h^۲}{۴}}\,h$$

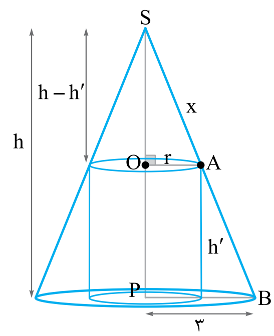
$$\xrightarrow{\text{h را ببریم زیر رادیکال}} ۲\pi\sqrt{h^۲(۳۲-\frac{h^۲}{۴})}=۲\pi\sqrt{۳۲h^۲-\frac{h^۴}{۴}}$$

حالا برای رسیدن به ماکزیمم، باید مشتق را مساوی صفر بگذاریم:

$$S'_W=\dots\times(۶۴h-h^۳)=۰ \xrightarrow{h\neq۰} h^۲=۶۴ \Rightarrow h=۸$$

و با $h=۸$ داریم: $\max S_W=۲\pi\sqrt{۳۲-\frac{۶۴}{۴}}\times۸=۶۴\pi$

**۳۰۲. گزینه ۳** با توجه به $OA \parallel PB$ و تشابه دو مثلث داریم:

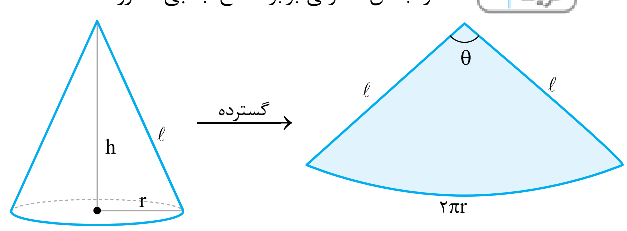



$$\frac{h-h'}{h}=\frac{r}{۳} \Rightarrow h-h'=\frac{rh}{۳} \Rightarrow h'=h-\frac{rh}{۳}=h(۱-\frac{r}{۳})$$

حجم استوانه برابر است با: $V=\pi r^۲h'=\pi r^۲h(۱-\frac{r}{۳})=V=\pi h(r^۲-\frac{r^۳}{۳})$

برای رسیدن به حجم ماکزیمم، از V نسبت به r مشتق می‌گیریم و آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم: $V'=\pi h(۲r-r^۲)=۰ \Rightarrow ۲r-r^۲=۰ \xrightarrow[r\neq۰]{\div r} r=۲$

**۳۰۳. گزینه ۱** مقدار جنس مصرفی برابر سطح جانبی مخروط است.




$$S_{\text{جانبی}}=\pi r\ell=\pi r\sqrt{h^۲+r^۲}$$

حجم مخروط هم $\frac{\pi}{۳}r^۲h$ است که باید $\frac{۴\pi}{۳}$ باشد پس $r^۲h=۴$ و داریم:

$$r^۲=\frac{۴}{h} \Rightarrow r=\frac{۲}{\sqrt{h}}$$

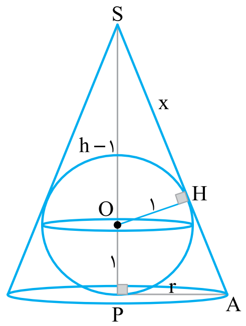
حالا r را در S جای‌گذاری می‌کنیم:

$$S=\pi\frac{۲}{\sqrt h}\sqrt{h^۲+\frac{۴}{h}}=۲\pi\sqrt{\frac{h^۲+\frac{۴}{h}}{h}}=۲\pi\sqrt{h+\frac{۴}{h^۲}}$$

مشتق S را مساوی صفر می‌گذاریم تا به $S_{min}$ برسیم:

$$S'=\frac{۱+\frac{-۲h(۴)}{h^۴}}{۲\sqrt{\dots}}=۰ \Rightarrow ۱=\frac{۸}{h^۳} \Rightarrow h^۳=۸ \Rightarrow h=۲$$

**۳۰۴. گزینه ۱** بر طبق رابطهٔ فیثاغورس در مثلث SOH داریم:




$$x^۲+۱^۲=(h-۱)^۲ \Rightarrow x^۲=h^۲-۲h \Rightarrow x=\sqrt{h^۲-۲h}$$

حالا تشابه دو مثلث قائم‌الزاویهٔ SOH و SPA می‌گوید:

$$\frac{OH}{PA}=\frac{SH}{SP} \Rightarrow \frac{۱}{r}=\frac{x}{h}=\frac{\sqrt{h^۲-۲h}}{h}$$

پس $r=\frac{h}{\sqrt{h^۲-۲h}}$ و حجم مخروط می‌شود:

$$V=\frac{\pi}{۳}r^۲h=\frac{\pi}{۳}\frac{h^۲}{h^۲-۲h}h=\frac{\pi}{۳}\frac{h^۲}{h-۲}$$

و برای رسیدن به حجم مینیمم باید $V'=۰$ قرار دهیم:

$$V'(h)=\frac{\pi}{۳}\frac{۲h(h-۲)-۱h^۲}{(h-۲)^۲}=۰$$

$$\xrightarrow{\text{صورت صفر است}} h^۲-۴h=۰ \xrightarrow{h\neq۰} h=۴$$

**۳۰۵. گزینه ۱** شعاع قاعدهٔ استوانه برابر $|\alpha|$ (اندازهٔ طول نقطهٔ M) و ارتفاع آن برابر $۲\alpha+۳$ (اندازهٔ عرض نقطهٔ M) است. پس داریم:

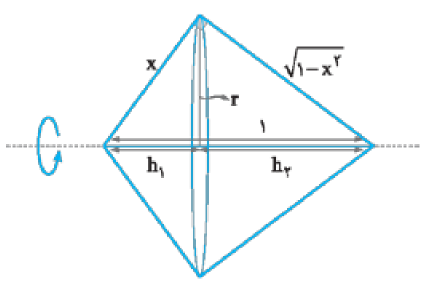
$$V=\pi r^۲h=\pi|\alpha|^۲(۲\alpha+۳)=\pi\alpha^۲(۲\alpha+۳)=\pi(۲\alpha^۳+۳\alpha^۲)$$

پس مشتق آن می‌شود: $V'=\pi(۶\alpha^۲+۶\alpha)$

که به ازای $\alpha=-۱$ صفر می‌شود و V به حداکثر خود می‌رسد. جدول تغییرات $V'$ را ببینید:

| α | | −۱ | | ۰ | |
|---|---|---|---|---|---|
| V′ | + | | − | | + |
| | ↗ | max | ↘ | min | ↗ |

**۳۰۶. گزینه ۴** **راه I** حجم حاصل از دوران مثلث قائم‌الزاویه با وتر ۱ حول وتر برابر است با:




$$V=\frac{۱}{۳}\pi r^۲h_۱+\frac{۱}{۳}\pi r^۲h_۲=\frac{۱}{۳}\pi r^۲\underbrace{(h_۱+h_۲)}_{\text{وتر مثلث}=۱}=\frac{۱}{۳}\pi r^۲$$

از طرف دیگر r همان ارتفاع مثلث قائم‌الزاویه است که برابر است با:

$$r=\frac{\text{ضرب اضلاع قائم}}{\text{وتر}}=\frac{x\sqrt{۱-x^۲}}{۱}=x\sqrt{۱-x^۲}$$

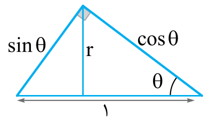
پس حجم برابر است با: $V=\frac{\pi}{۳}r^۲=\frac{\pi}{۳}x^۲(۱-x^۲)$

چون مجموع $x^۲$ و $۱-x^۲$ ثابت است، ضربشان به ازای حالت مساوی، ماکزیمم می‌شود و داریم: $x^۲=۱-x^۲ \Rightarrow ۲x^۲=۱ \Rightarrow x^۲=\frac{۱}{۲} \Rightarrow x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

پس نسبت اضلاع قائم باید ۱ باشد.

**راه II** مثلث را به صورت روبه‌رو در نظر بگیرید.

حجم دوار برابر است با:

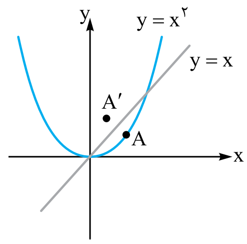



$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 \xrightarrow{r=\frac{1}{2}\sin 2\theta} V=\frac{\pi}{3}\frac{1}{4}\sin^2 2\theta$$

که به ازای $\theta=\frac{\pi}{4}$ ماکزیمم است و نسبت اضلاع قائم در این حالت برابر است با:

$$\tan\theta=1$$

**۳۰۷. گزینه ۳** A روی سهمی $y=x^2$ است پس مختصاتش $A(\alpha,\alpha^2)$ است. قرینهٔ A نسبت به $y=x$ می‌شود $A'(\alpha^2,\alpha)$. راستی طول A بین صفر و ۱ (نقاط برخورد سهمی و خط $y=x$) قرار دارد. حالا طول پاره‌خط $AA'$ برابر است با:




$$AA'=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\sqrt{(\alpha-\alpha^2)^2+(\alpha^2-\alpha)^2}$$

$$=\sqrt{2(\alpha-\alpha^2)^2}=\sqrt{2}\,|\alpha-\alpha^2| \xrightarrow[\alpha^2<\alpha]{0<\alpha<1} =\sqrt{2}(\alpha-\alpha^2)$$

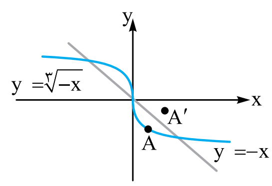
ماکزیمم طول $AA'$ زمانی رخ می‌دهد که $\alpha-\alpha^2$ حداکثر شود.

با دقت به $y=x-x^2$ که در $S(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ ماکزیمم دارد، بیشترین مقدار $AA'$ برابر است با:

$$AA'_{max}=\sqrt{2}\,\underbrace{(\alpha-\alpha^2)_{max}}_{\text{حداکثر } \alpha-\alpha^2 \text{ برابر } \frac{1}{4} \text{ است.}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

**اشاره** اگر $\alpha-\alpha^2$ را به صورت $\frac{1}{4}-(\alpha-\frac{1}{2})^2$ مربع کامل کنیم، بیشترین مقدار آن برابر $\frac{1}{4}$ است.

**۳۰۸. گزینه ۲** قرینهٔ نقطهٔ $(x,y)$ نسبت به نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم به صورت $(-y,-x)$ است.




مختصات A روی $f(x)=\sqrt[3]{-x}$ به صورت $A(\alpha,\sqrt[3]{-\alpha})$ است و با توجه به قانونی که در ابتدا گفتیم مختصات نقطهٔ $A'$ می‌شود $A'(-\sqrt[3]{-\alpha},-\alpha)$.

پس داریم:

$$\xrightarrow[A'(\sqrt[3]{\alpha},-\alpha)]{A(\alpha,\sqrt[3]{-\alpha})} AA'=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

$$=\sqrt{(\alpha-\sqrt[3]{\alpha})^2+(\underbrace{\sqrt[3]{-\alpha}+\alpha}_{\text{همان } \alpha-\sqrt[3]{\alpha}})^2}=\sqrt{2(\alpha-\sqrt[3]{\alpha})^2}=\sqrt{2}\,|\alpha-\sqrt[3]{\alpha}|$$

سؤال گفته α در بازهٔ [۰,۱] است پس $\sqrt[3]{\alpha}$ از α بیشتر است و داخل قدرمطلق منفی است پس داریم:

$$AA'_{\text{طول}}=\sqrt{2}(\sqrt[3]{\alpha}-\alpha)$$

با در نظر گرفتن $y=\sqrt[3]{x}-x$ در فاصلهٔ (۰,۱) داریم:

$$y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-1=0 \Rightarrow \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}=1 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2}=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x=(\frac{1}{3})^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3\sqrt{3}}$$

پس بیشترین مقدار با قراردادن $\alpha=(\frac{1}{3})^{\frac{3}{2}}$ به دست می‌آید:

$$AA'_{max}=\sqrt{2}\left(\sqrt[3]{(\frac{1}{3})^{\frac{3}{2}}}-(\frac{1}{3})^{\frac{3}{2}}\right)=\sqrt{2}\left((\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}}-(\frac{1}{3})^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$=\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3\sqrt{3}})=\sqrt{2}\,\frac{2}{3\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \xrightarrow[\times\sqrt{2}]{\times\sqrt{2}} \frac{4}{3\sqrt{6}}$$

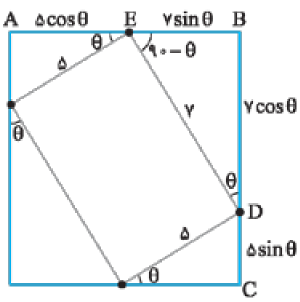
**۳۰۹. گزینه ۱** در واقع $x+y=\frac{1}{2}$ است و ما کم‌ترین مقدار $x^2+4y^2$ را می‌خواهیم. به جای y می‌نویسیم $\frac{1}{2}-x$ و داریم:

$$f(x)=x^2+4(\frac{1}{2}-x)^2=x^2+4(\frac{1}{4}-x+x^2)=5x^2-4x+1$$

که حداقل مقدار آن در رأس و به ازای $x=-\frac{b}{2a}=\frac{2}{5}$ برابر است با:

$$\min(f)=5(\frac{2}{5})^2-4(\frac{2}{5})+1=\frac{4}{5}-\frac{8}{5}+1=\frac{1}{5}$$

**۳۱۰. گزینه ۴** با دقت به زاویه‌های متمم، در شکل روبه‌رو می‌توانیم طول اضلاع مستطیل بزرگ را برحسب $\sin\theta$ و $\cos\theta$ بنویسیم:




$$AB=AE+EB=5\cos\theta+7\sin\theta$$

$$BC=BD+CD=7\cos\theta+5\sin\theta$$

پس مساحت مستطیل بزرگ می‌شود:

$$S=AB.BC=(5\cos\theta+7\sin\theta)(5\sin\theta+7\cos\theta)$$

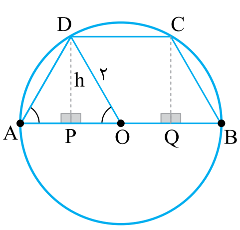
$$=35\cos^2\theta+35\sin^2\theta+\underbrace{(25+49)}_{74}\sin\theta\cos\theta$$

$$=35\underbrace{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}_{1}+37(2\sin\theta\cos\theta)=35+37\sin 2\theta$$

به ازای $\theta=45^\circ$ بیشترین مقدار مساحت را داریم که می‌شود $35+37=72$.

**اشاره** بهترین مستطیل، مربع است پس $\theta=45^\circ$.

**۳۱۱. گزینه ۲** OD برابر شعاع دایره یعنی ۲ است. طبق رابطهٔ فیثاغورس داریم:




$$OP=\sqrt{OD^2-DP^2}$$

$$=\sqrt{2^2-h^2}=\sqrt{4-h^2}$$

با توجه به شکل DC دو برابر PO است:

$$DC=2OP=2\sqrt{4-h^2}$$

پس مساحت ذوزنقه می‌شود:

$$S=\frac{(AB+DC)h}{2}=\frac{(4+2\sqrt{4-h^2})h}{2}=(2+\sqrt{4-h^2})h$$

از S مشتق می‌گیریم و مساوی صفر می‌گذاریم:

$$S=2h+h\sqrt{4-h^2}$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} S'=2+1\sqrt{4-h^2}+\frac{-2h}{2\sqrt{4-h^2}}h=0$$

$$\xrightarrow{\text{ساده}} ۲+\sqrt{۴-h^۲}-\frac{h^۲}{\sqrt{۴-h^۲}}=۰$$

$$\xrightarrow{\text{مخرج‌مشترک}} ۲+\frac{۴-h^۲-h^۲}{\sqrt{۴-h^۲}}=۰$$

$$\Rightarrow \frac{۴-۲h^۲}{\sqrt{۴-h^۲}}=-۲ \xrightarrow[\div(-۲)]{\text{طرفین‌وسطین}} h^۲-۲=\sqrt{۴-h^۲}$$

برای ادامهٔ حل دو راه داریم:

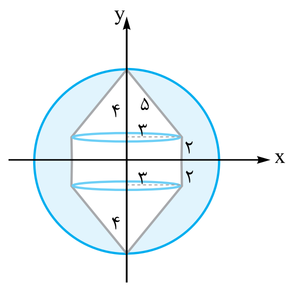
**عددگذاری** گزینه‌ها را کنترل کنیم و $h=\sqrt{۳}$ می‌خورد.

**راه II** به توان ۲ می‌رسانیم:

$$h^۴-۴h^۲+۴=۴-h^۲ \Rightarrow h^۴=۳h^۲ \xrightarrow[h\neq ۰]{\div h^۲} h^۲=۳$$

$$\Rightarrow h=\sqrt{۳}$$

**۳۱۲. گزینهٔ ۳** برای محاسبهٔ حجم دوران، باید از حجم کره به اندازهٔ دو مخروط و یک استوانه کم کنیم. با توجه به مقادیر در شکل روبه‌رو، شعاع کره ۶ است.




**اشاره** حواستان به اعداد فیثاغورسی ۳،۴،۵ هست؟!

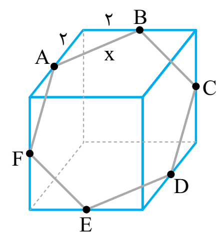
$$V_{کره}=\frac{۴}{۳}\pi(۶^۳)=\frac{۴}{\cancel{۳}}\pi\overset{۲}{\cancel{۶}}\times۶^۲=۲۸۸\pi$$

حجم مخروط‌های بالا و پایین $۲\times\frac{۱}{۳}\pi(۳)^۲\times۴$ است که می‌شود $۲۴\pi$.

حجم استوانه هم $\pi r^۲h=\pi(۳)^۲۴=۳۶\pi$ است، پس داریم:

$$V_{کل}=۲۸۸\pi-(۲۴\pi+۳۶\pi)=۲۲۸\pi$$

**۳۱۳. گزینهٔ ۱** با توجه به شکل، سطح مقطع مورد نظر یک شش‌ضلعی منتظم است که هر ضلع آن، وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ ۲×۲ است:




$$x^۲=۲^۲+۲^۲=۸$$

مساحت شش‌ضلعی منتظم به ضلع x: $S=۶\frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲$

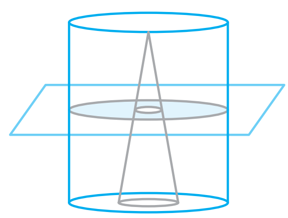
پس مساحت برابر است با:

$$S=۶\frac{\sqrt{۳}}{۴}\times۸=۱۲\sqrt{۳}$$

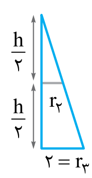
**۳۱۴. گزینهٔ ۴** سطح مقطع، بین دو دایره است و داریم:

$$S=\pi(r_۱^۲-r_۲^۲)$$

شکل را ببینید:



$r_۱$ شعاع دایرهٔ بیرونی و برابر ۴ است، $r_۲$ شعاع دایرهٔ درونی است. حالا این شکل را ببینید:



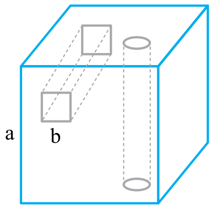

قضیهٔ تالس جزءبه‌کل می‌گوید:

$$\frac{r_۲}{r_۳}=\frac{\frac{h}{۲}}{h}\Rightarrow\frac{r_۲}{۲}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow r_۲=۱$$

و داریم:

$$S=\pi(۴^۲-۱^۲)=۱۵\pi$$

**۳۱۵. گزینهٔ ۱** از سطح مکعب، ۲تا دایره به اندازهٔ قاعدهٔ استوانه و همچنین دوتا مربع کم می‌شود.




$$S=۶a^۲-\underbrace{۲\pi r^۲}_{\text{۲تادایره}}-\underbrace{۲b^۲}_{\text{۲تامربع}}$$

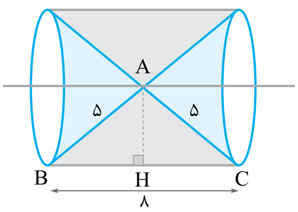
$$=۶\times۴^۲-۲\pi(\frac{۲}{\sqrt{\pi}})^۲-۲\times۱^۲$$

$$=۹۶-۸-۲=۸۶$$

به خاطر سوراخ‌ها (تونل‌های ایجادشده)، به اندازهٔ سطح جانبی استوانه و به اندازهٔ ۴تا مستطیل (سطح جانبی مکعب‌مستطیل) در دیواره‌ها به مساحت اضافه می‌شود:

$$S=۸۶+\underbrace{۴\times۴\times۱}_{\text{۴ مستطیل}}+\underbrace{۲\pi(\frac{۲}{\sqrt{\pi}})۴}_{\text{دیوارهٔ استوانه}}=۱۰۲+۱۶\sqrt{\pi}$$

**۳۱۶. گزینهٔ ۲** مطابق شکل مقابل حجم حاصل یک استوانه است که دو مخروط از آن برداشته‌ایم. در مثلث متساوی‌الساقین ABC، AH هم ارتفاع و هم میانه است، پس:




$$CH=BH=۴$$

با توجه به مثلث قائم‌الزاویهٔ AHC داریم: $AH=۳$ پس شعاع قاعدهٔ استوانه ۳ و حجم آن برابر است با:

$$V_۱=\pi r^۲h=\pi(۳)^۲\times۸=۷۲\pi$$

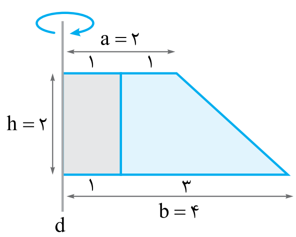
اما حجم دوار، دو قسمت مخروطی چپ و راست را ندارد. شعاع قاعدهٔ مخروط‌ها ۳ و ارتفاع هر کدام ۴ است، پس:

$$V_۲=۲\times\frac{۱}{۳}\pi r^۲h'=۲\times\frac{۱}{۳}\pi(۳)^۲\times۴=۲۴\pi$$

و بنابراین حجم برابر است با:

$$V=V_۱-V_۲=۷۲\pi-۲۴\pi=۴۸\pi$$

**۳۱۷. گزینهٔ ۳** اول فرض کنیم ذوزنقهٔ کامل که به محور چسبیده، دوران می‌کند.




**خاطره** حجم حاصل از دوران ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه حول ساق قائم برابر است با:

$$V=\frac{۱}{۳}\pi(a^۲+b^۲+ab)h$$

پس داریم:

$$V_۱=\frac{۱}{۳}\pi\underbrace{(۲^۲+۴^۲+۲\times۴)}_{۲۸}\times۲=\frac{۵۶\pi}{۳}$$

حالا دقت کنیم که یک قسمت استوانه‌ای را نداریم و باید از حجم کل کم شود، شعاع قاعدهٔ استوانه ۱ و ارتفاعش ۲ است.

$$V_۲=\pi r^۲h=\pi(۱)^۲(۲)=۲\pi$$

$$V=V_۱-V_۲=\frac{۵۶\pi}{۳}-۲\pi=\frac{۵۰\pi}{۳}$$

اما صبر کنید! کل این دوران‌ها به جای °۳۶۰ فقط °۲۷۰ هستند، پس ما $\frac{۳}{۴}=\frac{۲۷۰}{۳۶۰}$ حجم را داریم:

$$V=\frac{۳}{۴}\times\frac{۵۰\pi}{۳}=\frac{۲۵\pi}{۲}$$